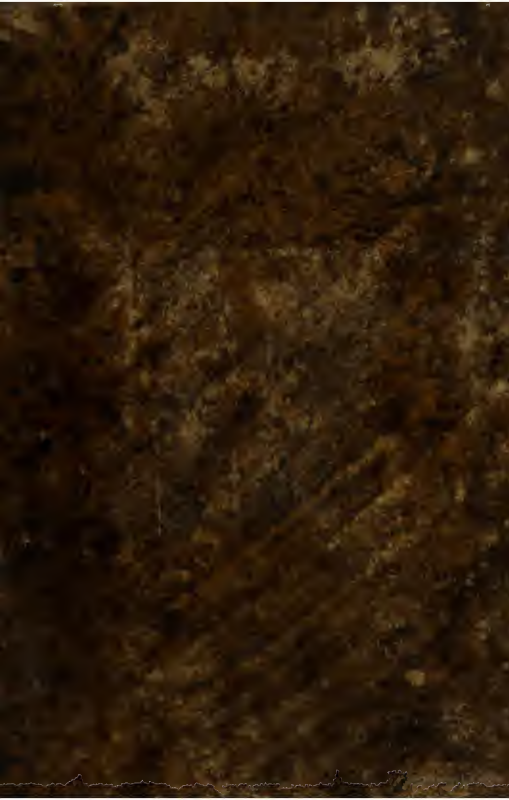




NAZIONALE

B. Prov.

BIBLIOTECA

III

745

NAPOLI

VITT. EM III

~~11893~~

12622 (a)

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

IX

Num.° d'ordine



Palchetto

~~311-38~~

1-15
4
15

B Pro
15
15

ISTITUZIONI

DI

MATEMATICA SUPERIORE



612307

ISTITUZIONI
DI
MATEMATICA SUPERIORE

CONTENENTI

**IL CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE, IL CALCOLO
DELLE VARIAZIONI, E LA GEOMETRIA ANALITICA**

DEL

D.^r T. FRANKE

Professore e Direttore in secondo della Scuola Politecnica di Hannover;

VOLTATE DAL TEDESCO IN ITALIANO

dal

R.^o Prof. R. Tannosli.



NAPOLI
PRESSO VINCENZO PUZZIELLO EDITORE

Stada Toledo N. 346

1860.

Stamperia vico Sanseverino N.º 1.

PREFAZIONE DELL' AUTORE.

Nel comporre questo libro elementare l'autore si è proposto di presentare agli studenti delle scuole politecniche e delle accademie tecniche le verità della Matematica superiore, compresavi la Geometria analitica, con metodo scientifico e semplice; di avere in considerazione, per quanto i limiti dell'opera lo concedevano, le ricerche dei matematici moderni, ed accompagnare le singole teorie con una copiosa scelta di esempi.

Per raggiungere il primo scopo è stato necessario nei diversi luoghi dell'opera accorciare le dimostrazioni, ed aprirsi nuove vie o spiegare nuovi teoremi per istabilire verità conosciute. Ne rendono testimonianza i teoremi sulla continuità delle funzioni derivate, la teoria delle funzioni periodiche, il modo di trattare le curve e superficie di 2° grado, ecc. Se l'ordinamento e l'esposizione delle materie debbano meritare approvazione, l'autore ne lascia decidere ai giudici imparziali ed al tempo.

Quanto poi al vantaggiarsi delle ricerche dei matematici moderni, vuol rilevarsi la circostanza che l'autore nella teoria delle equazioni differenziali ha profittato del metodo di separazione dei simboli operativi, metodo fondato da Servois negli *Annales des Mathématiques*-tom. 5, indi svolto vieppiù da Murphy nelle *Philosophical Transactions* 1837, e più tardi applicato assai utilmente da Gregory negli Exam-

ples of the processes of the Differential and Integral Calculus. Cambridge 1841 e 1846; ed egli crede non aver intrapreso infecondo lavoro trapiantando questo metodo sul suolo germanico, stante l'eslesa applicazione che può farsene nelle ricerche analitiche, e le semplificazioni ed abbreviazioni che ne riceve il calcolo, di che basta citare ad esempio la risoluzione delle equazioni differenziali. ¹

Per conservare l'intimo legame delle verità geometriche e la veduta comprensiva del loro demanio, l'autore anzichè disseminarle pei singoli capi del Calcolo differenziale ed integrale, ha cercato in vece comporre un intero compendio di Geometria analitica sì nel piano che nello spazio; dimodochè, quanto all'uso di questo libro, la Geometria potrà situarsi tra le funzioni differenziali e le equazioni differenziali, ovvero apporne le diverse teorie ai luoghi corrispondenti del Calcolo differenziale ed integrale.

È un fatto le molte volte osservato che l'applicazione

¹ Il metodo di separazione dei simboli di operazione da quelli di quantità, di cui l'autore fa uso frequente nel calcolo integrale, è un complemento dell'Algoritmia superiore, reso indispensabile dalla generalità stessa delle quistioni, cui questa branca delle conoscenze matematiche si è innalzata. « A mesure, ha detto Lagrangia, que l'analyse s'étend et s'enrichit de nouvelles méthodes, elle devient plus compliquée, et l'on ne peut la simplifier qu'en généralisant et en réduisant, tout à la fois, les méthodes qui peuvent être susceptibles de ces avantages » — La teorica dei determinanti ed il metodo di separazione ecc. confermano pienamente le parole dell'illustre analista.

Il Sig. Carmichael dell'Università di Dublino ha pubblicato un'opera contenente i principii di questo nuovo calcolo e le sue più interessanti applicazioni al Calcolo differenziale ed integrale, a quello delle differenze finite ed alla Geometria. A vantaggio dell'istruzione matematica nel nostro paese mi son proposto di pubblicare la traduzione di questo eccellente lavoro; la qual cosa spero poter attuare nel prossimo anno. IL TRADUTTORE.

delle singole teorie matematiche conserva ed eccita l'amore per questa scienza, e guarentisce la sicurezza e l'esercizio, che sono condizioni di un sostanziale progresso, e richiesti per quella educazione matematica che qual fida compagna segue il futuro impiegato tecnico dall'uditorio della scuola alla vita pratica scientifica, alla quale si è destinato. Quindi l'autore, sempre che gli è stato possibile, ha recato esempi per esercizio di ciascuna teoria; e ne ha esteso sì fattamente il numero — più che 400 — che dopo l'*Eulero* verun'altra opera tedesca di egual obbietto e portata oserebbe vantarne altrettanti. Questi esempi parte sono di proprio fondo, parte tolti dalla ricca miniera del Calcolo differenziale ed integrale di *Eulero*, parte trascelti nella citata eccellente raccolta di esempi del *Gregory* ed altri.

Nella composizione di questo libro, oltre alle citate opere, si è fatto ancora tesoro degli scritti di *Cauchy*, *Corrighi*, *Ettingshausen*, *Leroy*, *Malmsten*, *Ottley*, *Raabe*, ed altri.

CALCOLO DIFFERENZIALE

INTRODUZIONE.

1.

Idea della funzione.

Ogni grandezza, che può ricevere tutti i valori possibili tra due limiti dati, dicesi *variabile*; al contrario si dirà *costante*, se il suo valore non può o non deve variare. Le variabili vengono indicate colle ultime lettere dell'alfabeto, le costanti colle prime.

Un'espressione matematica, formata di una o più variabili, ovvero di variabili e costanti, dicesi *funzione* di esse variabili, imperocchè essa suppone matematiche operazioni, le quali potranno o pur no esser algebriche. Così

$$(a + x)^m, y^x, \text{sen}(x + y + z)$$

sono altrettante funzioni, ed in ispecie la prima è funzione di x , la seconda di x ed y , la terza di x , y e z .

Se un'espressione matematica, dipendente da una o più variabili, è formata di una o più operazioni algebriche, la funzione, ch'essa rappresenta, dirassi *algebrica*; in ogni altro caso sarà *trascendente*. Le funzioni algebriche poi si distinguono in *razionali* ed *irrazionali*, secondochè le variabili in esse contenute sono libere ovvero affette da inevitabile segno radicale; ed in fine si le une che

*

le altre si suddividono in fratte ed intere, secondochè la variabile entra o pur no come divisore di tutta l'espressione.

E tra le funzioni trascendenti, le quali per essere molto svariate non possono tutte racchiudersi tra certi limiti, sono da notarsi specialmente

le logaritmiche della forma $\log x$

le esponenziali della forma a^x

le trigonometriche della forma $\sin x$, $\cos x$, ec.

le circolari della forma $\arcsin x$, $\arccos x$, ec.

Ogni qualvolta si vuol indicare che un'espressione matematica sia funzione di una o più variabili, senza voler per nulla definire la forma e natura di essa funzione, si porrà avanti l'indicazione delle variabili una delle lettere f , F , φ , ψ ,... Quindi i simboli

$$f(x) \text{ ovvero } fx, f(x, y), f(x, y, z),$$

nei quali la lettera f potrebbe esser sostituita da una qualunque delle altre F , φ , ψ ,... rappresentano qualsivoglia funzione, algebrica o trascendente, delle variabili che vi sono indicate.

2.

Legge della variazione della funzione.

Se in fx , funzione qualunque di x , venga alterato il valore di x , varierà ancora quello di fx , e perciò il valore di fx sarà dipendente da quello di x . Quindi, per due diversi valori di x , varierà a norma di essi la differenza dei corrispondenti valori di fx ; o in altri termini se x' ed $x' + h$ dinotano due diversi valori di x , la differenza

$$f(x' + h) - fx',$$

ossia l'incremento di fx' , dipenderà dal valore di x . Or la legge di questa dipendenza è di tanto rilievo che per essa van-

no risolte le quistioni di maggior momento nelle scienze fisiche e sociali. Ma se egli è vero che l'incremento di x debba dipendere dalla speciale natura della funzione, dal valore assegnato alla variabile x e dalla grandezza dell'accrescimento h ; purtuttavia non potremo con ciò definire nè la natura dell'espressione matematica che si cela sotto l'espressione generale dell'incremento

$$f(x' + h) - fx',$$

nè il carattere che questo incremento dovrà sostenere, ancorchè h venisse decrescendo oltre ogni limite assegnabile.

Nè la bassa Analisi è in possesso di un mezzo comodo e sicuro per definire gl'incrementi delle funzioni ad essa note. Di una sola funzione, x^n , essa sa svolgere l'incremento

$$(x + h)^n - x^n$$

in una serie di termini, da cui si possono separare quelli affetti da h , cioè

$$\begin{aligned} (x + h)^n - x^n &= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}h^3 + \dots; \end{aligned}$$

donde poi pel rapporto dell'incremento della funzione a quello della variabile si ha la relazione

$$\begin{aligned} \frac{(x + h)^n - x^n}{(x + h) - x} &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}h^2 + \dots \end{aligned}$$

Or questo rapporto si compone del termine nx^{n-1} indipendente da h , e di altri che ne sono affetti. Variando h , quel primo termine non patirà cangiamento veruno; ed il quoziente vi si approssimerà sempre più, come h andrà rav-

vicinandosi a zero, dimodochè pel valore limite di h si avrà l'equazione

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} = nx^{n-1},$$

in cui sta espressa la legge della variazione della funzione.

Or facciamoci a rinvenire un mezzo per ottenere la variazione di una funzione qualunque, ovvero il rapporto di questa variazione a quella della variabile. Stabiliamo perciò l'equazione

$$1. \quad f(x+h) = A,$$

indicando con A una funzione di x ed h ; e supponiamo inoltre che la funzione A possa decomorsi in due altre, A_0 e B , tali che la prima, A_0 , sia funzione della sola x , e che B dipenda da x ed h . Con ciò l'equazione 1 ci darà

$$2. \quad f(x+h) = A_0 + B.$$

ed egli è chiaro che la funzione B dovrà sparire con h , imperocchè divenendo nullo questo aumento, il primo membro dell'equazione si ridurrà a fx ; ed in conseguenza anche il secondo membro dovrà esser funzione della sola x , e non già di x ed h . Perciò sarà

$$fx = A_0,$$

e l'equazione 2 prenderà la forma

$$3. \quad f(x+h) = fx + B.$$

Or dovendo la funzione B annullarsi con h , sarà lecito darle la forma $h^m B_1$, m disegnando un numero intero e positivo, o più semplicemente la forma $h. B_1$. E la B_1 si presenta come funzione di h , imperocchè per essa l'equazione precedente diviene

$$4. \quad f(x+h) = fx + h.B_1,$$

donde la relazione

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = B_1,$$

la quale dimostra esser B_1 dipendente da h .

La quistione è dunque ridotta a dover definire la B_1 , funzione di x ed h . A tal uopo noi ammettiamo che la funzione B_1 possa decomorsi in due altre, A_1 e C_1 , la prima che sia funzione della sola x , la seconda di x ed h . E poichè nell'ipotesi di $h = 0$ la B_1 dovrà dipendere dalla sola x , così la relazione

$$B_1 = A_1 + C_1$$

richiederà che C_1 sparisca insieme con h ; perciò porremo $C_1 = h \cdot B_2$, ritenendo che in generale B_2 sia funzione di x ed h . Or introducendo nell'equazione 4 il valore di B_1 , dato dall'equazione

$$B_1 = A_1 + h \cdot B_2,$$

avremo

$$5. \quad f(x+h) = fx + hA_1 + h^2B_2,$$

e la funzione B_2 , egualmente che la B_1 nell'equazione 4, sarà dipendente da x ed h . Quindi la B_2 s'immaginerà decomposta nelle due, A_2 e C_2 , la prima dipendente dalla sola x , la seconda da x ed h ; e poichè C_2 dovrà annullarsi insieme con h , così prenderà la forma $h \cdot B_3$, essendo B_3 funzione di x ed h . Con ciò l'equazione 5 diverrà

$$6. \quad f(x+h) = fx + h \cdot A_1 + h^2 \cdot A_2 + h^3 \cdot B_3.$$

Decomponendo similmente la B_3 in due altre funzioni, l'una dipendente dalla sola x , l'altra da x ed h , e così continuando sempre, perverremo ad un'equazione della forma

$$7. \quad f(x+h) = fx + h \cdot A_1 + h^2 \cdot A_2 + h^3 \cdot A_3 + h^4 \cdot A_4 + \dots + h^{n-1} \cdot A_{n-1} + h^n \cdot B_n;$$

donde pel rapporto dell'incremento della funzione a quello

della variabile otterremo l'espressione

$$8. \quad \frac{f(x+h) - fx}{h} = A_1 + hA_2 + h^2A_3 + h^3A_4 + \dots \\ + h^{n-2}A_{n-2} + h^{n-1}B_n.$$

In queste due ultime equazioni sta la legge dell'incremento di fx , espressa nelle funzioni $A_1, A_2, A_3, \dots$ della sola x , e nella funzione B_n di x ed h .

Solamente è da osservarsi che la forma di queste funzioni, ed il mezzo di dedurle da fx restano egualmente incogniti, e che rimane tuttavia indiscussa la condizione per la quale sarà possibile e potrà ammettersi la decomposizione delle funzioni

$$f(x+h), B_1, B_2, \dots B_n$$

ciascuna in due, l'una dipendente da x soltanto, l'altra da x ed h .

Intanto la sola forma delle equazioni 7 ed 8 ci mostra chiaramente la via di pervenire alla conoscenza dell'incremento della funzione, o del rapporto di questo incremento a quello della variabile, supponendo che la già indicata decomposizione delle funzioni $f(x+h), B_1, B_2, \dots$ possa venir attuata dal calcolo e sia compatibile colla forma della funzione data: imperocchè, quando ciascuna delle funzioni $f(x+h), B_1, B_2, \dots$ sia decomposta in due di cui l'una dipenda dalla sola x , avremo che secondo una medesima legge saranno dedotte A_1 da fx , A_2 da A_1 , A_3 da A_2 , e così di seguito. Laonde, se per ogni specie di funzione della variabile x sarà nota la funzione A_1 , saranno ancora note le funzioni

$$A_2, A_3, A_4, \dots A_{n-1}.$$

Or dall'equazione 8. noi otterremo la funzione A_1 se, dando all'aumento h un valore α sì piccolo da sparire in comparazione di ogni valore di x , ci valeremo di questo mezzo

per determinare il limite a cui il rapporto

$$\frac{f(x + \alpha) - fx}{\alpha}$$

sempre più si approssima, come α si avvicinerà a zero. In questo caso, ponendo che lo svolgimento sia possibile in generale, spariranno coll' incremento h , esistente nel 1° membro dell'equazione 8, tutti i termini del 2° membro, eccetto il primo, A_1 , che rimarrà come limite. Questo limite, indicato in generale dal simbolo $f'x$, ha ricevuto il nome di *funzione derivata* o semplicemente *derivata* di fx ; dimodochè per un aumento α dato ad x , e nell'ipotesi che α tenda continuamente a zero, avremo l'equazione identica

$$\frac{f(x + \alpha) - fx}{\alpha} = f'x.$$

Il problema è dunque ridotto a dover cercare la derivata di ogni forma o specie di fx ; e mercè l'estensione stessa di questa ricerca alle singole specie di funzioni di una sola variabile verrà risolta l'altra quistione, se ogni funzione cioè possa ammettere una derivata. Or l'ammissibilità di una derivata, ossia la condizione che renderà valido il 2° membro dell'equazione 8, è riposta in ciò, che mentre x varia tra i limiti a e b , fx debba prendere tutti i valori intermedi esistenti tra fa e fb . Se questa condizione è soddisfatta, vale a dire che tra due limiti di x , che possono essere vicini o lontani l'uno dall'altro, fx varia per differenze infinitesime quando x si accresce di simili infinitesimi, la funzione si dirà *continua*, all'opposto sarà *discontinua*.

Così la funzione $\frac{1}{x}$ è continua tra i limiti $x = +a$, $x = +b$, imperocchè essa varierà per differenze infinitesime ed ogni suo valore sarà compreso tra $\frac{1}{a}$ ed $\frac{1}{b}$, quando tra gl' indicati limiti il valore di x andrà cambiando di quantità infinitesime.

tesime. Al contrario la stessa funzione è discontinua tra i limiti $x = +a$ ed $x = -b$, poichè nell'ipotesi di $x = 0$, valore intermedio di $+a$ e $-b$, la funzione $\frac{1}{x}$ assume un valore infinitamente grande, che non può esser compreso tra $\frac{1}{a}$ e $-\frac{1}{b}$.

È del pari discontinua la funzione $\sqrt[n]{x}$ tra $x = +a$ ed $x = -b$; imperocchè con un valore α prossimo a zero, ed in conseguenza compreso tra i limiti assegnati, avremo che ponendo successivamente $x = 2\alpha$ ed $x = \alpha$, l'incremento della funzione $\sqrt[n]{x}$ sarà espresso da

$$\sqrt[n]{2\alpha} - \sqrt[n]{\alpha} = (\sqrt[n]{2} - 1)\sqrt[n]{\alpha}.$$

Or $\sqrt[n]{\alpha}$, ed in conseguenza anche $(\sqrt[n]{2} - 1)\sqrt[n]{\alpha}$ è un numero incomparabilmente più grande di α ; e già per $\alpha = \frac{1}{10^{14}}$ abbiamo $\sqrt[n]{\alpha} = \frac{1}{10^4}$. Non può dunque $\sqrt[n]{x}$ rimaner continua tra due limiti di segni opposti. Lo stesso vale per ogni espressione della forma $\sqrt[n]{x}$, quando la variabile x assume valori prossimi a zero.

3.

Derivate delle funzioni semplici.

Per ottenere le derivate di ogni specie di funzione di una sola variabile, noi cominciamo dal distinguerle in **s e m p l i c i e c o m p o s t e**, comprendendo nella prima classe le undici funzioni

$$a + x, a - x, ax, \frac{a}{x}, x^n, a^x, \\ \log x, \text{sen } x, \cos x, \text{arcsen } x, \text{arccos } x;$$

e rimettendo alla seconda tutte le funzioni di funzione di x , vale a dire quelle che si compongono di funzioni di x .

Per brevità indichiamo fx con y , con Δx l'aumento h di x , e con Δy l'aumento di fx , ovvero $f(x + \Delta x) - fx$; e scriviamo

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = fx = y',$$

quando Δx vada decrescendo fino a zero, nel qual caso supponiamo che Δy tanto più vi si approssimi, per quanto Δx sarà più piccolo, e che in conseguenza il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ debbono esser contemplati per quei soli valori della funzione y , pei quali essa rimane continua.

Rispetto alle funzioni semplici si hanno le seguenti derivate.

1. $y = a + x$
ci dà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a + x + \Delta x) - (a + x)}{\Delta x},$$

ovvero

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = +1, \text{ e } \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = +1.$$

2. Da $y = a - x$
si avrà similmente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1, \text{ e } \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

3. Per $y = ax$

è
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x + \Delta x) - ax}{\Delta x},$$

ovvero

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \text{ e } \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Le derivate delle tre funzioni $a + x$, $a - x$, ax sono costanti. E come è facile a vedersi, le dette funzioni sono ancora continue per ogni valore di x compreso tra $+\infty$ e $-\infty$.

4.

Per $y = \frac{a}{x}$

si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+\Delta x} - \frac{a}{x}}{\Delta x} = \frac{a}{\Delta x} \left[\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} \right],$$

ovvero, trasformando la differenza in un quoziente,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x} = -\frac{a}{x^2 + x \cdot \Delta x}.$$

Or facendo decrescere Δx fino a zero, $x^2 + x \cdot \Delta x$ si ridurrà ad x^2 ; e risulterà

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a}{x^2}, \text{ ossia } y' = -\frac{a}{x^2}.$$

La funzione $\frac{a}{x}$ è continua tra due limiti dello stesso segno, siano positivi o negativi, purchè nessuno di essi limiti sia prossimo a zero, come si è dimostrato nel n° 2.

5.

Per $y = x^a$,

a disegnando un numero qualunque, intero o fratto, assoluto o relativo; si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^a - x^a}{\Delta x},$$

ovvero traendone il fattore x^a ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^a \cdot \frac{\left\{1 + \frac{\Delta x}{x}\right\}^a - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Or per ogni valore reale a la formola del binomio ci dà

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a = 1 + a \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{x^2} + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{x^3} + \dots,$$

donde

$$\frac{\left\{1 + \frac{\Delta x}{x}\right\}^a - 1}{\Delta x} = \frac{a}{x} + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2 \cdot x} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x} \cdot \left\{\frac{\Delta x}{x}\right\}^2 + \dots$$

E facendo decrescere il valore di $\frac{\Delta x}{x}$ fino a zero, il 2° membro dell'ultima equazione si riduce ad $\frac{a}{x}$ che sarà il limite della serie; quindi

$$x^a \frac{\left\{1 + \frac{\Delta x}{x}\right\}^a - 1}{\Delta x} \text{ si riduce ad } ax^{a-1},$$

e per $y = x^a$ avremo

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = ax^{a-1}, \text{ ovvero } y' = ax^{a-1}.$$

Se a è un numero intero positivo, la funzione x^a sarà continua per ogni valore reale di x ; ma se a rappresenti numero intero negativo, o numero frazionario, la funzione x^a diverrà discontinua pei valori di x prossimi a zero. Imperocchè dando ad x valori di questa specie, x^a diverrà più grande di ogni numero assegnabile; e nel caso di un esponente frazionario positivo la funzione x^a non andrà decrescendo fino ad annullarsi, come si è dimostrato nel n° 2.

6. Da $y = \log x$

si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left\{1 + \frac{\Delta x}{x}\right\}}{\Delta x}$$

Facendo in questa espressione $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, abbiamo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(1 + \alpha)}{\alpha} = \frac{1}{x} \cdot \log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}};$$

e la quistione è ridotta a dover definire il valore numerico $\log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ nell'ipotesi di α convergente a zero. Ponendo $\alpha = \frac{1}{n}$, n disegnando un numero grandissimo, intero o frazionario, si ha

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1 + \frac{1}{n})^n,$$

e la formola del binomio ci dà

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{n^4} + \dots$$

ovvero, dividendo per n ciascun fattore del numeratore,

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{2 \cdot 3} + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{3}{n})}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

I numeri

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{m}{n},$$

ovvero

$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, m\alpha,$$

andranno a sparire con α , eccetto il caso di m numero gran-

dissimo. Ma per questa ipotesi sul numero m la frazione $\frac{m}{n}$ si approssimerà a pareggiare l'unità, come m si avvicinerà ad n , ed in conseguenza $1 - \frac{m}{n}$ andrà convergendo a zero. E poichè il fattore $1 - \frac{m}{n}$ ha per divisore m , tanto più celere dovrà essere la convergenza a zero della frazione

$$\frac{1 - \frac{m}{n}}{m}$$

nell'ipotesi di m crescente.

Dalle quali cose si rileva che i fattori costituenti i numeratori della serie vanno approssimandosi all'unità, e che i termini di essa convergono a zero, dimodochè nel limite avremo

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots \\ &= 2,71828 \ 18285\dots, \end{aligned}$$

ossia la base e dei logaritmi naturali. Per qualsivoglia sistema di logaritmi la derivata di $y = \log x$ sarà data da

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log e, \text{ ed } y' = \frac{\log e}{x}.$$

Pei logaritmi naturali o neperiani, che per distinzione rappresentiamo col simbolo l , essendo $\log e = 1$, sarà

$$y' = \frac{1}{x} \text{ per } y = lx.$$

La funzione $\log x$ o lx è continua pei soli valori positivi e finiti di x , imperocchè per ogni valore α di x , che sia prossimo a zero, p. e. $\alpha = \frac{1}{10^n}$, $\log x$ o lx aumenta negativamente con n , ed insieme con n giunge all'infinito ne-

gativo; la stessa funzione poi diviene impossibile dando ad x qualunque valore negativo.

7. Da $y = a^x$
deriva

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

È dunque da cercarsi il valore di

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \text{ ovvero di } \frac{a^x - 1}{\alpha} \text{ per } \Delta x = \alpha,$$

quando Δx ovvero α si approssima sempre più a zero. Poniamo

$$a^\alpha - 1 = \beta, \text{ quindi } a^\alpha = 1 + \beta;$$

sarà dunque β evanescente con α ; si avrà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot a^x,$$

e la quistione sarà ridotta a dover definire il valore del rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$ nell'ipotesi di α evanescente del pari che β . Or dalla relazione

$$a^\alpha = 1 + \beta \text{ deriva } \alpha \log a = \log(1 + \beta),$$

ed

$$\frac{\alpha}{\beta} \log a = \frac{\log(1 + \beta)}{\beta}.$$

Ma avendo qui sopra trovato che per valori di β , che si avvicinano sempre più a zero, si ha

$$\frac{\log(1 + \beta)}{\beta} = \log(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} = \log e,$$

sarà

$$\frac{\alpha}{\beta} \log a = \log e;$$

quindi

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log a}{\log e} \cdot a^x, \text{ ovvero } y' = \frac{\log a}{\log e} \cdot a^x,$$

e pei logaritmi naturali risulta

$$y' = a^x \log a.$$

Questa equazione regge per ogni valore assoluto o relativo di x , poichè la funzione a^x rimane continua.

Or poniamo che la base a si muti nella base e dei logaritmi naturali, l'equazione $y = e^x$ ci darà la derivata

$$y' = e^x,$$

vale a dire che la derivata sarà eguale alla funzione e^x .

8. Rispetto ad $y = \sin x$
abbiamo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x},$$

ovvero, trasmutando la differenza dei seni in un prodotto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left\{ x + \frac{\Delta x}{2} \right\}.$$

Ma per archi che indefinitamente si approssimano a zero, il limite del rapporto tra l'arco ed il seno è l'unità; e già il seno di un secondo non differisce dall'arco corrispondente che nella 13^a decimale.

Rispetto poi al coseno dell'arco $x + \frac{\Delta x}{2}$ osserviamo che

* Questa trasformazione si ottiene sostituendo $\cos^2 \frac{\Delta x}{2} - \sin^2 \frac{\Delta x}{2}$

a $\cos \Delta x$, e $2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{\Delta x}{2}$ a $\sin \Delta x$.

essendo un'unità la sua massima variazione quando l'arco varia di $\frac{\pi}{2}$, sarà sempre la prima differenza minore della seconda, e perciò potremo stabilire l'equazione

$$\cos \left\{ x + \frac{\Delta x}{2} \right\} = \cos x + \beta,$$

nella quale β annullandosi insieme con Δx , sarà

$$\lim. \cos \left\{ x + \frac{\Delta x}{2} \right\} = \cos x;$$

quindi

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x, \text{ ovvero } y' = \cos x.$$

9. Quanto ad $y = \cos x$

troveremo similmente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

e poichè

$$\lim. \sin \left\{ x + \frac{\Delta x}{2} \right\} = \sin x,$$

sarà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \sin x, \text{ ovvero } y' = - \sin x.$$

Le equazioni, ottenute nei n° 8 e 9, saranno soddisfatte per qualunque valore assoluto o relativo dell'arco x , stantchè per ognuno di essi valori le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ rimangono continue.

10. Rispetto ad $y = \arcsen x$
abbiamo

$$x = \sin y \text{ e } \cos y = \sqrt{1 - x^2};$$

donde

$$\Delta x = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta y}{2} \cos \left\{ y + \frac{\Delta y}{2} \right\};$$

e

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\Delta y}{2}} : \cos \left\{ y + \frac{\Delta y}{2} \right\};$$

e per l'osservazione fatta nel n° 8 sarà

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos y}, \text{ vale a dire } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or si conoscerà facilmente che la funzione $\operatorname{arcsen} x$ rimane continua tra i limiti $x = -1$ ed $x = +1$.

11. In fine per $y = \operatorname{arccos} x$
si ha

$$x = \cos y, \operatorname{sen} y = \sqrt{1-x^2},$$

e

$$\Delta x = -2 \operatorname{sen} \frac{\Delta y}{2} \cdot \operatorname{sen} \left\{ y + \frac{\Delta y}{2} \right\};$$

quindi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\Delta y}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\Delta y}{2}} : \operatorname{sen} \left(y + \frac{\Delta y}{2} \right),$$

e per ciò che si è detto nel n° 9

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}, \text{ cioè } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

E la funzione $\operatorname{arccos} x$ è del pari continua tra i limiti $x = -1$ ed $x = +1$.

Derivate delle funzioni composte.

In conseguenza delle cose esposte nel n° 2 possono le funzioni composte ridursi ad una delle due forme

$$y = F(u), \quad y = F(u, v),$$

u e v rappresentando funzioni della variabile x . E le derivate di queste funzioni avranno luogo, finchè le funzioni y resteranno continue rispetto ad u , o rispetto ad u e v , vale a dire che le funzioni y , u e v siano continue rispetto ad x .

Quanto alla prima delle due indicate forme si ha pel rapporto dell'aumento della funzione a quello della variabile l'espressione

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

E poichè abbiamo supposto che le funzioni y ed u restino continue, così per x indefinitamente decrescente saranno ancora indefinitamente decrescenti u ed y ; quindi

$$\frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \text{ passerà in } F'(u), \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ in } u',$$

e sarà

$$1. \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = F'(u) \cdot u'.$$

Nello stesso modo per $y = F(u)$, nell'ipotesi che u sia funzione di v e v di x , si avrà

$$y' = F'(u) \cdot u' \cdot v',$$

purchè y rispetto ad u , ed u insieme con v rispetto ad x restino continue.

Per definire il significato di $F'(u)$, u' e v' è da considerarsi che $F'(u)$ rappresenta la derivata rispetto ad u , e u' ri-

petto a v , e v' rispetto ad x . Ma se la forma stessa di $F'(u)$ c'indica qual ne sia la variabile, non è così di u' e v' . Per togliere di mezzo ogni equivoco, si contrassegna con u'_v , ovvero con $D_v u$ la derivata di u rispetto a v' , e con v'_x ovvero con $D_x v$ la derivata di v rispetto ad x ; dimodochè l'equazione precedente dovrà scriversi come segue.

$$2. \quad y'_x = F(u) \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

Esempio 1. In $y = l(1+x)$ ponendo $1+x=u$, si avrà $y = lu$; e perciò che si è ottenuto nel paragrafo 6 del n° 3, sarà $y' = \frac{1}{u} \cdot u'_x$; ma (§ 1 del n° 3)

$$u'_x = (1+x)'_x = 1;$$

dunque

$$y' = \frac{1}{1+x}.$$

Esempio 2. In $y = l(1 + \sqrt{1-x})$ poniamo

$$\sqrt{1-x} = u, \quad 1-x = v;$$

sarà

$$y'_x = \frac{1}{1+u} \cdot u'_x;$$

ma

$$u'_x = u'_v \cdot v'_x, \quad u'_v = \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} \quad (\S 5, n^\circ 3),$$

e

$$v'_x = -1 \quad (\S 2, n^\circ 3);$$

quindi

$$y'_x = \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1),$$

ovvero, introducendovi i valori di u e v ,

$$y'_x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}}.$$

Quanto alla seconda delle suddette forme, $y = F(u, v)$, si avrà per immediata espressione della derivata

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta x},$$

imperocchè le funzioni v , u ed y debbono variare insieme ad x , da cui dipendono. Or aggiungendo e togliendo al numeratore del secondo membro la funzione $F(u, v + \Delta v)$, si avrà

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} = & \frac{F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ & + \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}, \end{aligned}$$

cosicchè per Δx decrescente all'infinito, passerà

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ in } u', \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \text{ in } v', \quad \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta v} \text{ in } F'_v(u, v).$$

E poichè la funzione y si è supposta continua rispetto ad u e v , è chiaro che

$$\begin{aligned} F(u + \Delta u, v + \Delta v) & \text{ e } F(u, v + \Delta v), \\ F(u, v + \Delta v) & \text{ e } F(u, v) \end{aligned}$$

dovranno avere una differenza convergente a zero insieme con Δx ; dimodochè in questo limite troveremo trasformata

$$\frac{F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v)}{\Delta x} \text{ in } F'_u(u, v),$$

e sarà in conseguenza

$$3. \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = F'_u(u, v) \cdot u' + F'_v(u, v) \cdot v',$$

disegnando y' , u' e v' le derivate rispetto ad x di y , u e v . La quale equazione ci fa noto che per ottenerla bastava adoperar ripetutamente l'equazione 1, componendo in prima la derivata della funzione rispetto ad u , indi quella rispetto

a v , ed aggiungere in fine le due derivate; e lo stesso risultamento avremmo ottenuto se l'una delle funzioni u e v fosse stata riguardata come costante, mentre si cercava la derivata rispetto all'altra.

Esempio 1. — Avendo

$$y = ax^n + bx^m,$$

sarà $2ax$ la derivata di ax^n ; imperocchè ponendo $x^n = u$ in $y = ax^n$, avremo (§ 3, n° 3) $y'_u = a$; e poichè

$$y_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ ed } u'_x = nx^{n-1},$$

sarà

$$y'_x = nax^{n-1}, \text{ se } y = ax^n.$$

Similmente si troverà $3bx^m$ per derivata di bx^m ; in conseguenza quella della proposta funzione sarà

$$y' = 2ax + 3bx^m.$$

Esempio 2. — Sia

$$y = \tan x, \text{ ossia } y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Facciamo $\sin x = u$, $\cos x = v$; quindi $y = \frac{u}{v}$. Supponendo costante il denominatore di questa frazione, sarà (§ 3, n° 3) $\frac{u'}{v}$ la sua derivata; e nell'ipotesi del numeratore costante, la derivata sarebbe $-\frac{u}{v^2} v'$. Unendo queste due derivate avremo

$$y' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2};$$

ma $u' = \cos x$ e $v' = -\sin x$, sarà dunque

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

In simil modo si avrà per

$$y = \operatorname{cotg} x, \quad y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \operatorname{arccotg} x, \quad y' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Per l'uso di queste equazioni è da asservarsi che le funzioni $\operatorname{arctg} x$ ed $\operatorname{arccotg} x$ sono continue per tutti i valori di x compresi tra $+\infty$ e $-\infty$, ma che $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ divengono discontinue, la prima tra i limiti $x = \frac{\pi}{4}$ ed $x = \frac{\pi}{2}$, e la seconda tra i limiti $x = \frac{\pi}{4}$ ed $x=0$, imperocchè esse linee trigonometriche vanno da $+1$ a $+\infty$, mentre l'arco corrispondente cresce rispetto alla prima da $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$, e decresce per la seconda da $\frac{\pi}{4}$ a 0 .

5.

Definizione. *Definizione di limite.* **Definizione di limite.** *Definizione di limite.*

Nell'equazione 9 del n.° 2.

$$\lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

noi riponevamo l'idea del limite del rapporto, che ha luogo tra il cangiamento della funzione e quello della sua variabile; supponendo che l'incremento Δx della variabile x assumesse un valore sempre più piccolo. L'ultimo di questi valori continuamente decrescenti di Δx è un valore prossimo a zero; ed indicandolo con α , avremo il limite del precedente rapporto espresso da

$$\frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha} = f'(x).$$

Questo valore limite α costituisce un infinitamente piccolo, poichè risulta dalla continua diminuzione di Δx o in generale di x . L'idea dell'infinitamente piccolo è dunque dariceversi in senso relativo, imperocchè essa presuppone un numero x dal quale mercede continuata diminuzione risulti un valore sì piccolo, da sparire in comparazione del valore primitivo. Questo valore primitivo rispetto all'infinitamente piccolo prende l'aggiunto di finito; un numero si dirà dunque infinitamente piccolo, quando è divenuto sì piccolo da sparire in comparazione di un numero finito.

Facciamo al contrario che un numero x vada continuamente crescendo coll'aggiungervi sempre un Δx , dimodochè pervenga in fine ad un valore ω così grande, che al paragone sia pressocchè nullo il valore primitivo x . A questo valore ω , risultante da continuato accrescimento del numero finito x , diamo il nome d'infinitamente grande rispetto al primo valore di x .

La natura dell'infinitamente piccolo α , considerato come numero, concede poterlo riguardare come unità, ed a questa comparare le sue potenze intere

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots \alpha^n.$$

Queste diverse potenze dell'infinitesimo α , si dicono infinitesimi del primo, secondo, terzo, ... n^{esimo} ordine. Ed in generale noi diciamo essere un numero infinitesimo del 1° ordine se il suo rapporto ad α , infinitesimo del 2° ordine se il suo rapporto ad α^2 , e così infinitesimo dell'ordine n^{esimo} se il suo rapporto ad α^n converga ad un valore finito, quando α va sempre più avvicinandosi a zero. Quindi $k_1, k_2, k_3, \dots k_n$ indicando valori finiti,

$$k_1\alpha, k_2\alpha^2, k_3\alpha^3, \dots k_n\alpha^n$$

disegneranno infinitesimi del primo, secondo, terzo,

n^{esimo} ordine, poichè i rapporti

$$\frac{k_1 \alpha}{\alpha} = k_1, \quad \frac{k_2 \alpha^2}{\alpha^2} = k_2, \dots \frac{k_n \alpha^n}{\alpha^n} = k_n$$

sono espressi da numeri finiti. Ed in fine essendo per ogni valore finito k

$$\frac{k_1 \alpha}{k} = \frac{k_1 \alpha^2}{k \alpha} = \frac{k_1 \alpha^n}{k \alpha^n} \text{ ecc.}$$

avremo che, non altrimenti che un infinitesimo di 1° ordine rispetto ad una quantità finita, dovrà sparire quello di 2.° ordine rispetto a quello di 1° ordine, quello di 3° rispetto a quello di 2°, ecc. quando α converga a zero, o sia già pervenuta a questo limite. Quindi se $k \alpha^n$ e $k_1 \alpha^{n_1}$ designano due infinitesimi di ordine diverso, e sia $n_1 > n$, la somma $k \alpha^n + k_1 \alpha^{n_1}$ sarà un infinitesimo dell'ordine n^{esimo} , imperocchè si ha

$$k \alpha^n + k_1 \alpha^{n_1} = \alpha^n (k + k_1 \alpha^{n_1-n}),$$

$$\text{e} \quad \frac{\alpha^n (k + k_1 \alpha^{n_1-n})}{\alpha^n} = k + k_1 \alpha^{n_1-n}$$

converge a k , quando α va ravvicinandosi a zero.

Similmente la somma

$$k \alpha^n + k_1 \alpha^{n_1} + k_2 \alpha^{n_2} + \dots$$

rappresenterà un infinitesimo dell'ordine n , quando sia $n < n_1$, $n_1 < n_2$, ecc. Donde poi segue che un tal polinomio conserverà il segno del 1° termine quando α convergerà a zero.

Gl'infinitamente grandi, egualmente che gl'infinitamente piccoli, vanno distinti in diversi ordini, e tra questi si scoprirono facilmente quelle stesse relazioni che han luogo tra infinitesimi di ordine identico o vario.

Qual simbolo dell'idea d'infinitamente grande può valere la stessa espressione $k \alpha^n$, se α essendo quasi che nullo in

comparazione di k , sia n un numero negativo, imperocchè ponendo p. es. $n = -1$, sarà $\frac{k}{\alpha}$ più grande di ogni valore comparabile a k , quando α sia pressochè zero.

Quindi nell'ipotesi di n intero $k\alpha^n$ disegnerà un numero infinitamente piccolo se $n > 0$, un numero finito se $n = 0$, ed un numero infinitamente grande se $n < 0$. Ed anche per riempire le lacune esistenti tra i numeri finiti e gl'infinitamente piccoli, o tra i primi e gl'infinitamente grandi, può servire l'espressione $k\alpha^n$, quando n si consideri come numero frazionario, positivo nel 1° caso e negativo nel secondo. Così, per esempio, $k\alpha^{\frac{n}{2}}$ rappresenta un numero che non può essere nè finito nè infinitamente piccolo, poichè

$$k\alpha^{\frac{n}{2}} < k \text{ e } k\alpha^{\frac{n}{2}} > k\alpha^{\frac{n}{2}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} \text{ ossia } > k\alpha;$$

vale a dire che $k\alpha^{\frac{n}{2}}$ è minore di un numero finito, e maggiore di un infinitesimo.

Osserviamo ancora che l'espressione di un infinitesimo egualmente che di un infinitamente grande essendo riducibile all'idea di potenze di una medesima base, il calcolo di tali numeri dovrà seguire la semplice legge delle potenze di egual base.

In fine le idee di numero infinitesimo, di numero finito e di numero infinitamente grande somministrano un mezzo di render meglio preciso il concetto di quantità continue e discontinue, da noi precedentemente definito nel n° 2. Una funzione di x sarà continua, quando tra due dati limiti di x il suo valore va cangiando per differenze del medesimo ordine d'infinitesimi, per cui viene alterata la variabile x . Così la funzione $(x - a)^{\frac{1}{n}}$ sarà continua per qualunque valore x' di x , finchè $x' - a$ sarà quantità finita; imperocchè lo svolgimento di $(x + k - a)^{\frac{1}{n}}$ secondo le potenze di α dimostra

che $(x + \alpha - a)^{\frac{1}{n}} - (x - a)^{\frac{1}{n}}$ è un infinitesimo del medesimo ordine di α . Al contrario la stessa funzione sarà discontinua per ogni valore di x , il quale differisca da quello di a per un infinitamente piccolo; imperocchè ponendo $x = a + \alpha$, $(x - a)^{\frac{1}{n}} = \alpha^{\frac{1}{n}}$, e questa essendo l'espressione di una grandezza intermedia alle quantità finite ed infinitesime, non può esser quella di un infinitamente piccolo.

6.

Idea del Calcolo differenziale.

Se la differenza Δx , per cui la variabile x va mutando valore in $f x$, diviene infinitamente piccola, essa prenderà il nome di differenziale di x , e sarà indicata dal simbolo dx ; e similmente sarà dinotato da dfx l'infinitesimo aumento ossia il differenziale di $f x$, dimodochè pei limiti, tra quali $f x$ rimane continua, si ha

$$dfx = f(x + dx) - fx;$$

e dividendo per dx si avrà ancora

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{f(x + dx) - fx}{dx}.$$

Ma il secondo membro di quest'ultima equazione diviene identico al primo membro di

$$\lim \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x} = f'x,$$

quando Δx si trasforma in dx ; sarà dunque

$$1. \quad \frac{dfx}{dx} = f'x,$$

e perciò $f'x$ toglie ancora il nome di quoziente differenziale. E poichè ne deriva immediatamente l'altra e-

quazione

2. $dfx = f'x \cdot dx,$

perciò la derivata $f'x$ è denominata ancora coefficiente differenziale.

Differenziare una data funzione vuol dire cercarne il differenziale, ed il Calcolo differenziale stabilisce le leggi secondo le quali dovrà cercarsi il differenziale e la derivata di una funzione, e quindi la legge con cui la derivata dipende dalla funzione, sia questa di una o più variabili.

Egli è più agevole di cercar prima il differenziale di una funzione per quindi dedurne la derivata, anzicchè seguire l'opposta via. Cominceremo dunque per ogni specie di funzione dal comporre l'equazione 2 per indi passare all'equazione 1, purchè a fondamento di nuove verità non si renda necessario l'opposto modo di deduzione.

CAPO PRIMO.

Funzioni di una sola variabile.

A. Differenziali del 1° ordine.

7.

Funzioni semplici.

Applicando l'idea di differenziale, quale l'abbiamo definita nel n° precedente, alle funzioni semplici del n° 3, otterremo immediatamente mercè le equazioni 1 e 2 del n° 6.

$$1. \quad d(a + x) = dx, \quad \frac{d(a + x)}{dx} = 1$$

$$2. \quad d(a - x) = -dx \quad \frac{d(a - x)}{dx} = -1$$

3. $d(ax) = a dx$, $\frac{d(ax)}{dx} = a$
4. $d\left\{\frac{a}{x}\right\} = -\frac{a dx}{x^2}$, $\frac{d\left\{\frac{a}{x}\right\}}{dx} = -\frac{a}{x^2}$
5. $d(x^a) = ax^{a-1} dx$, $\frac{d(x^a)}{dx} = ax^{a-1}$
6. $d \log x = \frac{dx}{x} \cdot \log e$, $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e$
 $dx = \frac{dx}{x}$, $\frac{dx}{dx} = \frac{1}{x}$
7. $d(a^x) = a^x \log a \cdot dx$, $\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log a$
8. $d \sin x = \cos x \cdot dx$, $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$
9. $d \cos x = -\sin x \cdot dx$, $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$
10. $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $d \arccos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

8.

Funzioni composte.

Nell'equazione 2 n° 4

$$y'_x = F'(u) \cdot u'_v \cdot v'_x$$

$F'(u)$ indica la derivata di $F(u)$ rispetto ad u ossia $\frac{dy}{du}$, e-
 gualmente che u'_v la derivata di u rispetto a v ovvero $\frac{du}{dv}$,
 e v'_x come ancora y'_x sono le derivate di v ed y rispetto ad
 x , nell'ipotesi che $F(u)$ sia funzione continua di u , u di v ,
 e v di x . Quella equazione può dunque esser scritta così

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$

dimodochè il differenziale di $y = F(u)$ sarà

$$2. \quad dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx.$$

Sinilmemente rispetto ad $y = F(u, v)$, quando u e v siano funzioni continue di x , l'equazione 3 dello stesso n° diverrà

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$

donde risulta

$$4. \quad dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx$$

In queste 4 equazioni, pel fatto stesso della loro origine, le forme $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dv}$, ... disegnano le derivate della funzione y rispetto ad u , di u rispetto a v ,... cosicchè le equazioni rappresentano la successione delle operazioni, e perciò non sarà lecito trasmutare p. e. $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ in $\frac{dy}{dx}$.

L'equazione 4 può ridursi alle sole due funzioni u e v ; ed in vero se nella funzione $y = F(u, v)$, continua rispetto ad u e v , noi poniamo $u + \Delta u$ in vece di u , e $v + \Delta v$ in vece di v , avremo

$$\Delta y = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v),$$

ovvero, aggiungendo e sottraendo $F(u, v + \Delta v)$ dal secondo membro,

$$\Delta y = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v) + F(u, v + \Delta v) - F(u, v).$$

La prima di queste differenze indicando un'alterazione della funzione rispetto ad u e la seconda rispetto a v , sarà

$$\Delta y = \frac{F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \Delta u + \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta v} \cdot \Delta v.$$

Or mutando Δu , in du , Δv in dv , la continuità della funzione rispetto ad u e v richiederà che Δy divenga dy ; e per un infinitesimo ε reggerà l'equazione

$$\frac{F(u + du, v + dv) - F(u, v + dv)}{du} = \frac{dF(u, v) + \varepsilon}{du},$$

ponendo che ε sia evanescente con dv . Dietro questa considerazione il valore di dy sarà dato dall'equazione limite

$$dy = \frac{dF(u, v)}{du} \cdot du + \frac{dF(u, v)}{dv} \cdot dv,$$

ovvero

$$5. \quad dy = \frac{dy}{du} \cdot du + \frac{dy}{dv} \cdot dv,$$

dimodochè dy si comporrà del differenziale preso rispetto ad u e di quello rispetto a v .

Similmente si avrà per $y = F(u, v, w, \dots)$

$$6. \quad dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv + \frac{dy}{dw} dw + \dots$$

9.

Continuazione.

Le forme più semplici, che può assumere $F(u, v)$, sono .

$$u + v, u - v, u \cdot v, \frac{u}{v}, u^v,$$

quando u e v siano funzioni continue di x .

Or l'equazione 6 del n° precedente ci farà ottenere i differenziali di queste funzioni, indicandoci che sarà d'uopo prenderne i differenziali rispetto ad u e v , e poi addizionarli,

vale a dire :

1. $d(u + v) = du + dv$,
2. $d(u - v) = du - dv$,
3. $d(u \cdot v) = u dv + v du$.

Se nell'ultima equazione v rappresenti una costante a , cosicchè la sua variazione sia nulla, avremo

$$4. \quad d(au) = a du,$$

e questa equazione avrà luogo non solamente per ogni a reale, ma eziandio per un' a immaginaria; imperocchè mutando a in $a\sqrt{-1}$, si avrà dall'equazione $y = au\sqrt{-1}$

$$\Delta y = a(u + \Delta u)\sqrt{-1} - au\sqrt{-1} = a\Delta u\sqrt{-1},$$

e mutando Δu in du , Δy diverrà dy ed avremo

$$dy = a\sqrt{-1}.du.$$

Se $u, v, w, \dots$ sono altrettante funzioni di x , l'equazione 3 ci darà

$$5. \quad d(u \cdot v \cdot w \dots) = vw \dots du + uw \dots dv + uv \dots dw + \dots$$

e

$$6. \quad \frac{d(u \cdot v \cdot w \dots)}{u \cdot v \cdot w \dots} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \dots$$

Rispetto al quoziente $\frac{u}{v}$ si ottiene

$$7. \quad d \frac{u}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u dv}{v^2} = \frac{v du - u dv}{v^2},$$

e quanto alla potenza u^r .

$$8. \quad du^r = u^r \log u \cdot du + r u^{r-1} \cdot dv.$$

Esempio 1. Da $y = l(\tan x)$ si avrà

$$dy = \frac{d \tan x}{\tan x}.$$

E poichè $\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, l'equazione 7 ci darà

$$d(\operatorname{tang} x) = \frac{\cos x \cdot d \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

quindi

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{tang} x} = \frac{2dx}{\operatorname{sen} 2x}.$$

Esempio 2. Ponendo $y = l\left\{\frac{1 - \cos nx}{1 + \cos nx}\right\}^{\frac{1}{2}}$, ossia

$$y = \frac{1}{2} l(1 - \cos nx) - \frac{1}{2} l(1 + \cos nx)$$

abbiamo

$$dy = d\left\{\frac{1}{2} l(1 - \cos nx)\right\} - d\left\{\frac{1}{2} l(1 + \cos nx)\right\}.$$

Ma

$$d\left\{\frac{1}{2} l(1 - \cos nx)\right\} = \frac{1}{2} d l(1 - \cos nx) = \frac{1}{2} \frac{d(1 - \cos nx)}{1 - \cos nx},$$

ossia

$$d\left\{\frac{1}{2} l(1 - \cos nx)\right\} = \frac{1}{2} \frac{n \operatorname{sen} nx \cdot dx}{1 - \cos nx};$$

e nello stesso modo si avrà

$$d\left\{\frac{1}{2} l(1 + \cos nx)\right\} = -\frac{1}{2} \frac{n \operatorname{sen} nx \cdot dx}{1 + \cos nx};$$

quindi

$$dy = \frac{n}{2} \operatorname{sen} nx \cdot dx \left\{ \frac{1}{1 - \cos nx} + \frac{1}{1 + \cos nx} \right\},$$

ovvero

$$dy = \frac{ndx}{\operatorname{sen} nx}.$$

Esempio 3. Sia dato

$$y = \arccos \left\{ \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x} \right\}.$$

Ponendo u in vece del quoziente, si avrà da $y = \arccos u$,

$$dy = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Ma in vece di du abbiamo

$$d\left\{\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right\} \\ = \frac{-(a+b\cos x) \cdot a \sin x \cdot dx + (b+a\cos x) \cdot b \sin x \cdot dx}{(a+b\cos x)^2}$$

ovvero

$$du = - \frac{(a^2 - b^2) \sin x \cdot dx}{(a+b\cos x)^2};$$

ed

$$1 - u^2 = \frac{(a+b\cos x)^2 - (b+a\cos x)^2}{(a+b\cos x)^2} = \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 x}{(a+b\cos x)^2};$$

quindi

$$dy = \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx}{a+b\cos x}.$$

Esempio 4. Per

$$y = \frac{x^3 - 6a^2x - \frac{9}{2}a^3}{(a+x)^3} - 3al(a+x)$$

si ottiene

$$d\left\{\frac{x^3 - 6a^2x - \frac{9}{2}a^3}{(a+x)^3}\right\} \\ = \frac{(a+x)^3(3x^2 - 6a^2)dx - 2(x^3 - 6a^2x - \frac{9}{2}a^3)(a+x)dx}{(a+x)^4} \\ = (x^2 + 3ax^2 + 6a^2x + 3a^3) \cdot \frac{dx}{(a+x)^3},$$

e

$$d(3al(a+x)) = \frac{3adx}{a+x},$$

quindi nella più semplice espressione

$$dy = \left\{\frac{x}{a+x}\right\}^3 dx.$$

*

Esempio 3. In $y = 2(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \arctg \left\{ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\}$

ponendo

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = u,$$

ne risulta

$$dy = 2(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{1 + u^2}.$$

Ma

$$du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}},$$

e

$$1 + u^2 = \frac{(a+b) + (a-b) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{(a+b)} = \frac{a + b \cos x}{(a+b) \cos^2 \frac{x}{2}};$$

dunque

$$dy = \frac{(a^2 - b^2) dx}{a + b \cos x}.$$

La simiglianza dei risultamenti ottenuti negli esempi 3 e 5 è una conseguenza della simiglianza delle funzioni ivi proposte, la quale sarà manifesta quando si consideri che essendo

$$\operatorname{tang} z = u, \text{ quindi } \cos z = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \operatorname{senz} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

sarà

$$\arctg u = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

egualmente che da

$$\operatorname{senz} = v, \text{ quindi } \cos z = \sqrt{1-v^2}, \operatorname{tang} z = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$$

deriva

$$\operatorname{arcsen} v = \arccos \sqrt{1-v^2} = \arctg \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Funzioni implicite.

Se in un'equazione esistente tra le variabili e la funzione di esse, l'ultima si trovi separata dalle prime, la funzione si dirà *esplicita*; ma se nello stesso membro dell'equazione la funzione stia congiunta colle variabili o con una funzione di esse, allora si dirà *implicita*. Così nell'equazione.

$$y = (a + x)lx,$$

y è una funzione esplicita di x , e viceversa è implicita nell'equazione

$$y^4 + 2y^2x^2 + x^4 - 8axy^2 = 0.$$

Per ottenere il differenziale o la derivata di una funzione implicita di x , supponiamo data l'equazione

$$1. \quad z = F(x, y),$$

il cui differenziale per l'equazione 5 del n° 5 sarà

$$2. \quad dz = \frac{dz}{dy} \cdot dy + \frac{dz}{dx} \cdot dx,$$

se y ed x sono funzioni di una stessa variabile. E questa equazione sarà soddisfatta anche nel caso che y sia funzione di x , poichè x è funzione di sè medesima. Or se poniamo che nell'equazione 1 sia

$$z = 0, \text{ ossia } F(x, y) = 0,$$

per la qual cosa y diverrà funzione implicita di x , avremo ancora $dz = 0$, poichè per ogni valore di x compreso tra i limiti di continuità della funzione, l'equazione $F(x, y) = 0$ dev'essere soddisfatta. Perciò l'equazione 2, nell'ipotesi di $z = F(x, y) = 0$ ci darà

$$3. \quad \frac{dz}{dy} \cdot dy + \frac{dz}{dx} \cdot dx = 0;$$

quindi la derivata

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{dz}{dx} : \frac{dz}{dy}$$

ovvero, prendendo il differenziale rispetto ad x ,

$$5. \quad \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} dx = 0.$$

Vale a dire che il differenziale della funzione $F(x,y)$ si compone della somma di due differenziali, l'uno preso rispetto ad x , l'altro rispetto ad y ed x .

Esempio 1. Dall'equazione

$$z = y^3 + x^3 - 3axy = 0$$

si ha

$$\frac{dz}{dy} = 3y^2 - 3ax, \quad \frac{dz}{dx} = 3x^2 - 3ay,$$

quindi

$$(y^2 - ax) dy + (x^2 - ay) dx = 0,$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

Esempio 2. L'equazione

$$z = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 8axy^2 = 0$$

ci dà

$$\frac{dz}{dy} = 4x^2y + 4y^3 - 16axy,$$

$$\frac{dz}{dx} = 4x^3 + 4xy^2 - 8ay^2,$$

in conseguenza

$$(y^3 + x^2y - 4axy)dy + (x^3 + xy^2 - 2ay^2)dx = 0,$$

e

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x^3 + y^2x - 2ay^2}{y^3 + x^2y - 4axy}.$$

Esempio 3. Da $z = y^x - x^y = 0$
risulta

$$\frac{dz}{dy} = xy^{x-1} - x^y \ln x, \quad \frac{dz}{dx} = y^x \ln y - yx^{y-1},$$

quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x} = \frac{y^x - xy \ln y}{x^y - xy \ln x}.$$

B. Derivate e differenziali di ordine superiore.

11.

Funzioni semplici.

La derivata di una funzione della variabile x è in generale un'altra funzione della stessa variabile, la quale nuova funzione ammetterà una seconda derivata, e questa una terza, e così di seguito; dimodochè si avranno sempre nuove funzioni, ciascuna delle quali sarà la derivata di quella che precede. Queste nuove funzioni diconsi *derivate* di ordine superiore di fx o y ; e per $y = fx$ vengono indicate con

$$y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$$

ovvero

$$f'x, f''x, f'''x, \dots, f^{(n)}x,$$

delle quali y' o $f'x$ è la derivata prima, y'' o $f''x$ la derivata seconda, y''' o $f'''x$ la derivata terza, ed in generale, n disegnando un numero intero e positivo, $y^{(n)}x$ ovvero $f^{(n)}x$ sarà l' n esima derivata di fx . Nel tempo stesso y'' o $f''x$ è la derivata di y' o $f'x$, ed in generale $y^{(n)}x$ sarà la derivata di $y^{(n-1)}$ o $f^{(n-1)}x$.

In conseguenza di queste definizioni e notazioni sarà

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx}, \quad y''' = \frac{dy''}{dx} \dots y^{(n)} = \frac{d y^{(n-1)}}{dx},$$

ovvero

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx}, \quad y''' = \frac{d \frac{dy'}{dx}}{dx}, \dots,$$

ed in queste espressioni va sottinteso che dx sia costante nei quozienti

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy'}{dx}, \quad \frac{dy''}{dx}, \dots$$

e che in conseguenza

$$d \frac{dy}{dx} = \frac{ddy}{dx}, \quad d \frac{dy'}{dx} = \frac{ddy'}{dx} = \frac{ddy}{dx \cdot dx}, \dots$$

Or dall'idea del quoziente differenziale $\frac{dy}{dx}$ deriva che

$$dy = y' \cdot dx, \quad dy' = y'' \cdot dx, \quad dy'' = y''' \cdot dx, \dots$$

e poichè dx è costante, si avrà

$$ddy = y'' \cdot dx^2, \quad ddy = y''' \cdot dx^3, \dots$$

Per brevità si scrive $d^n y$ in vece ddy , $d^3 y$ in vece di ddy , ... cosicchè disegnando dx^n l' n esima potenza di dx , si ha

$$d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n, \quad \text{e} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}.$$

Or facendoci a cercare le derivate ed i differenziali di ordine superiore delle funzioni semplici, abbiamo qui appresso per

1. $y = a \pm x,$

$$dy = \pm dx, \quad d^2 y = 0, \quad d^3 y = 0, \dots$$

quindi

$$y' = \pm 1, \quad y'' = 0, \quad y''' = 0, \dots$$

2. $y = ax$

$$dy = adx, \quad d^2y = 0, \quad d^3y = 0, \dots,$$

$$y' = a, \quad y'' = 0, \quad y''' = 0, \dots$$

3. $y = \frac{a}{x},$

$$dy = -\frac{adx}{x^2}, \quad d^2y = 2\frac{adx^2}{x^3}, \quad d^3y = -2.3.\frac{adx^3}{x^4},$$

in generale

$$d^ny = (-1)^n.2.3\dots n.\frac{adx^n}{x^{n+1}},$$

e $y^{(n)} = (-1)^n.2.3\dots n.\frac{a}{x^{n+1}}.$

4. Per $y = x^m$ si ha

$$dy = mx^{m-1}dx, \quad d^2y = m(m-1)x^{m-2}dx^2,$$

$$d^3y = m(m-1)(m-2)\dots x^{m-3}dx^3, \dots$$

$$d^ny = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}dx^n,$$

$$y^{(n)} = n(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Se m è un numero intero positivo, avremo nell'ipotesi di $m = n$

$$y^{(m)} = m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1,$$

vale a dire un numero costante, e perciò

$$y^{(m+1)} = y^{(m+2)} = \dots = 0.$$

5. $y = \log x$ ci dà

$$dy = \frac{dx}{x} \log e, \quad d^2y = -\frac{dx^2}{x^2} \log e, \quad d^3y = +2.\frac{dx^3}{x^3} \log e,$$

quindi

$$d^ny = (-1)^{n-1}.2.3\dots(n-1)\frac{dx^n}{x^n} \log e$$

e $y^{(n)} = (-1)^{n-1}.2.3\dots(n-1)\frac{\log e}{x^n}.$

In conseguenza per $y = lx$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} 2.3 \dots (n-1) \cdot \frac{1}{x^n}.$$

6. Da $y = a^x$ risulta

$$dy = a^x \ln a \cdot dx, \quad d^2y = a^x (\ln a)^2 \cdot dx^2, \quad d^3y = a^x (\ln a)^3 \cdot dx^3, \dots$$

$$d^n y = a^x (\ln a)^n \cdot dx^n \quad \text{e} \quad y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

Quindi per $y = e^x$, e disegnando la base dei logaritmi naturali, avremo

$$d^n y = e^x dx^n, \quad y^{(n)} = e^x.$$

7. Da $y = \sin x$ abbiamo

$$dy = \cos x \cdot dx, \quad \text{o pure} \quad dy = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot dx,$$

quindi

$$d^2y = \sin\left\{x + \frac{2\pi}{2}\right\} \cdot dx^2, \quad d^3y = \sin\left\{x + \frac{3\pi}{2}\right\} \cdot dx^3, \dots$$

$$\text{e} \quad d^n y = \sin\left\{x + \frac{n\pi}{2}\right\} \cdot dx^n, \quad y^{(n)} = \sin\left\{x + \frac{n\pi}{2}\right\}.$$

8. Similmente da $y = \cos x$ si avrà

$$dy = -\sin x \cdot dx, \quad \text{ovvero} \quad dy = \cos\left\{x + \frac{\pi}{2}\right\} \cdot dx,$$

$$d^2y = \cos\left\{x + \frac{2\pi}{2}\right\} \cdot dx^2, \quad d^3y = \cos\left\{x + \frac{3\pi}{2}\right\} \cdot dx^3,$$

$$d^n y = \cos\left\{x + \frac{n\pi}{2}\right\} \cdot dx^n, \quad y^{(n)} = \cos\left\{x + \frac{n\pi}{2}\right\}.$$

Le forme generali delle derivate di ordine superiore delle funzioni $\arcsin x$, $\arctg x$, suppongono sviluppi che avranno luogo nei n° seguenti. Soltanto di $\arctg x$ svolgeremo le derivate nel n° qui appresso.

Funzioni composte.

Come si è osservato nel n° 8, la derivata prima di ogni funzione composta è una somma di due funzioni, ciascuna delle quali può assumere la forma di un prodotto, cosicchè avremo a cercare in generale le derivate ed i differenziali delle forme $u+v$, $u-v$, $u.v$, quando u e v sono funzioni di x .

1. $y = u + v$ dà

$$dy = du + dv, \text{ quindi } d'y = d'u + d'v,$$

ed in generale

$$d^n y = d^n u + d^n v, \quad y^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$$

2. Similmente per $y = u - v$

$$d^n y = d^n u - d^n v, \quad y^{(n)} = u^{(n)} - v^{(n)}$$

3. Da $y = uv$ si ottiene

$$dy = u dv + v du,$$

$$\begin{aligned} d^2 y &= u d^2 v + du dv + dudv + v d^2 u \\ &= u d^2 v + 2 du dv + v d^2 u, \end{aligned}$$

$$d^3 y = u d^3 v + 3 du d^2 v + 3 d^2 u dv + v d^3 u.$$

Svolgendo i differenziali successivi si troverà che i fattori numerici dei singoli termini sono identici ai coefficienti della potenza n^{ima} di un binomio; perciò si ha in generale

$$\begin{aligned} d^n y &= u d^n v + \frac{n}{1} du d^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^2 u d^{n-2} v \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 u d^{n-3} v + \dots + \frac{n}{1} d^{n-1} u \cdot dv + d^n u \cdot v, \end{aligned}$$

$$e \quad y^{(n)} = u.v^{(n)} + \frac{n}{1}.u'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}u''v^{(n-2)} \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u'''v^{(n-3)} + \dots + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + u^{(n)}v.$$

4. Se y e z indicano due funizioni dipendenti da x , e per le quali abbia luogo la relazione $z = f(y)$, si avrà il differenziale di questa equazione rispetto ad y , considerando y come funzione ed in conseguenza dy come variabile, vale a dire che sarà

$$dz = f'(y).dy, \quad d^2z = f''(y).dy^2 + f'(y).d^2y, \\ d^3z = f'''(y).dy^3 + 3f''(y).dyd^2y + f'(y).d^3y,$$

Quindi se nell'equazione $y = f(x)$ la variabile x non venga più considerata come indipendente, ma qual funzione di una nuova variabile, si avranno

$$dy = f'(x).dx, \quad d^2y = f''(x).dx^2 + f'(x).d^2x, \\ d^3y = f'''(x).dx^3 + 3f''(x).dx d^2x + f'(x).d^3x, \text{ ecc.}$$

in vece delle equazioni

$$dy = f(x).dx, \quad d^2y = f''(x).dx^2, \quad d^3y = f'''(x).dx^3, \text{ ecc.}$$

Esempio 1. Poniamo dover cercare la derivata generale di

$$Y = \frac{1}{a \pm bx}$$

Secondo il 3. del n° 11 si ha

$$d^n \left\{ \frac{1}{x} \right\} = (-1)^n.1.2.3\dots n \frac{dx^n}{x^{n+1}};$$

quindi, mutando x in $a + bx$, e perciò dx in $b dx$, si avrà

$$d^n \left\{ \frac{1}{a + bx} \right\} = (-1)^n.1.2.3\dots n \frac{b^n dx^n}{(a + bx)^{n+1}}$$

$$e \quad d^n \left\{ \frac{1}{a - bx} \right\} = + 1.2.3\dots n \frac{b^n dx^n}{(a - bx)^{n+1}},$$

quindi

$$D^{(n)}\left\{\frac{1}{a \pm bx}\right\} = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot \frac{(\pm 1)^n b^n}{(a \pm bx)^{n+1}},$$

indicando con $D^{(n)}$ la derivata n^{esima} .

Esempio 2. Cercando la derivata generale di $\frac{1}{a^2 + x^2}$, ponendo $i = \sqrt{-1}$, avremo primieramente

$$x^2 + a^2 = (x + ai)(x - ai),$$

e

$$\frac{1}{a^2 + x^2} = -\frac{1}{2ai} \left\{ \frac{1}{x + ai} - \frac{1}{x - ai} \right\};$$

quindi

$$D^{(n)}\left\{\frac{1}{a^2 + x^2}\right\} = -\frac{1}{2ai} \left\{ D^{(n)}\frac{1}{x + ai} - D^{(n)}\frac{1}{x - ai} \right\}.$$

Ma le derivate del secondo membro di questa equazione sono già note per gli esempi precedenti, imperocchè nella differenziazione di $\frac{1}{a + bx}$, o in generale della funzione $F(bx)$ è indifferente che b dipenda o no da x , che b sia reale o immaginaria. Quindi sarà

$$\begin{aligned} D^{(n)}\frac{1}{a^2 + x^2} &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{2ai} \left\{ \frac{1}{(x + ai)^{n+1}} - \frac{1}{(x - ai)^{n+1}} \right\} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{2ai(a^2 + x^2)^{n+1}} \{ (x - ai)^{n+1} - (x + ai)^{n+1} \}. \end{aligned}$$

Or se per eliminare gl'immaginarj da questa espressione, poniamo (ciò ch'è permesso per ogni valore reale di x)

$$\varphi = \arctg \frac{a}{x},$$

avremo

$$x = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi, \quad a = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi,$$

quindi

$$(x - ai)^{n+1} = (a^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}} (\cos \varphi - i \sin \varphi)^{n+1},$$

$$(x + ai)^{n+1} = (a^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n+1}.$$

Ma per qualsivoglia angolo φ e per ogni valore intero e positivo m reggono le equazioni

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^m = \cos m\varphi + i \sin m\varphi,$$

$$(\cos \varphi - i \sin \varphi)^m = \cos m\varphi - i \sin m\varphi.$$

Imperocchè rispetto agli archi α , β , γ troviamo soddisfatta in primo luogo l'equazione

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta);$$

quindi l'altra

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \gamma + i \sin \gamma) \\ & = \cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

E poichè la forma dell'equazione rimane inalterata accrescendosi il numero degli angoli, così supponendo m angoli α , β , $\gamma, \dots, \mu$, avremo

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \gamma + i \sin \gamma) \dots (\cos \mu + i \sin \mu) \\ & = \cos(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu), \end{aligned}$$

equazione che nell'ipotesi di $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \mu = \varphi$ diviene

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^m = \cos m\varphi + i \sin m\varphi.$$

E nello stesso modo si avrà la relazione

$$(\cos \varphi - i \sin \varphi)^m = \cos m\varphi - i \sin m\varphi.$$

Or questi valori ci danno

$$(x - ai)^{n+1} = (a^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}} \{ \cos(n+1)\varphi - i \sin(n+1)\varphi \},$$

$$(x + ai)^{n+i} = (a^2 + x^2)^{\frac{n+i}{2}} \left\{ \cos(n+1)\varphi + i \cdot \operatorname{sen}(n+1)\varphi \right\},$$

donde nella forma più semplice abbiamo

$$D^{(n)} \frac{1}{a^2 + x^2} = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{\operatorname{sen}(n+1)\varphi}{(a^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Similmente rispetto alla funzione

$$\frac{x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x + ai} + \frac{1}{x - ai} \right\}$$

si avrà la simile relazione

$$D^{(n)} \frac{x}{a^2 + x^2} = (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot \frac{\cos(n+1)\varphi}{(a^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Or considerando che

$$D^{(n)} \frac{1}{1 + x^2} = D^{(n+i)} \operatorname{arctg} x,$$

si ottiene immediatamente

$$D^{(n)} \operatorname{arctg} x = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot \frac{\operatorname{sen} n\varphi}{(1 + x^2)^{\frac{n}{2}}},$$

ponendo

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Esempio 3. Da $y = \frac{e^{ax}}{x}$ deriva

$$y' = \frac{e^{ax}}{x^2} (ax - 1)$$

$$y'' = \frac{e^{ax}}{x^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2)$$

$$y''' = \frac{e^{ax}}{x^4} (a^3 x^3 - 3a^2 x^2 + 6ax - 6),$$

ed in generale

$$D \frac{e^{ax}}{x} = \frac{e^{ax}}{x^{n+1}} \{ a^n x^n - n a^{n-1} x^{n-1} + n(n-1) a^{n-2} x^{n-2} - n(n-1)(n-2) a^{n-3} x^{n-3} + \dots \mp n(n-1) \dots 3.2.1 \},$$

ovvero

$$D \frac{e^{ax}}{x} = \frac{a^n e^{ax}}{x} \left\{ 1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2 x^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3 x^3} + \frac{n(n-1) \dots 3.2.1}{a^n x^n} \right\}.$$

Similmente per la forma più generale $e^{ax} x^m$ si avrà

$$D^n e^{ax} x^m = e^{ax} \left\{ a^n x^m + n m a^{n-1} x^{m-1} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3} m(m-1) a^{n-2} x^{m-2} + \dots \right\}$$

Esempio 4. Ponendo $y = e^{ax} \cos rx$, si ottiene

$$y' = e^{ax} (a \cos rx - r \sin rx).$$

Ma finchè a ed r rappresenteranno valori reali, si potrà sempre stabilire l'equazione

$$\frac{r}{a} = \tan \varphi,$$

quindi

$$a = (a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi, \quad r = (a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi;$$

in conseguenza

$$y' = (a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} (\cos \varphi \cos rx - \sin \varphi \sin rx) \\ = (a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \cos(rx + \varphi),$$

Similmente si avrà

$$y'' = (a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \cos(rx + 2\varphi),$$

ed in generale

$$D^n e^{ax} \cos rx = (a^2 + r^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \cos(rx + n\varphi).$$

Nello stesso modo si otterrebbe

$$D^{(n)} e^{ax} \sin rx = (a^2 + r^2)^{\frac{n}{2}} \sin(rx + n\varphi).$$

Esempio 3. Se nell'equazione $y = uv$ scambiamo u con $(x-a)^m$ e v con φx , dall'esempio 3 risulterà

$$\begin{aligned} & D^{(n)}[(x-a)^m \varphi x] \\ &= m(m-1)\dots(m-n+1)(x-a)^{m-n} \varphi x \\ &+ \frac{n}{1} \cdot m(m-1)\dots(m-n+2)(x-a)^{m-n+1} \varphi' x \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot m(m-1)\dots(m-n+3)(x-a)^{m-n+2} \varphi'' x \\ &+ \dots + (x-a)^m \varphi^{(n)} x. \end{aligned}$$

Nel caso che m rappresenti un numero intero assoluto, potrà essere maggiore, minore o eguale ad n . Facciamoci a determinare ciò che diverrà questa n^{esima} derivata, allorchè fatta la differenziazione si ponga $x=a$, nella ipotesi che sotto questo valore φx ed in conseguenza φa resti continua. Supponendo $n < m$, l'esponente $m-n$ di $(x-a)$ nel primo termine sarà più piccolo di tutti gli altri esponenti della serie dei termini, e sarà maggiore di zero; in conseguenza tutti i termini spariranno nell'ipotesi di $x=a$, e sarà

$$D_a^{(n)}[(x-a)^m \varphi x] = 0,$$

indicando col simbolo $D_a^{(n)}$ che dopo aver eseguito la differenziazione si è fatta $x=a$ nella n^{esima} derivata.

Ponendo $n=m$, il primo termine della serie diverrà

$$m(m-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot (x-a)^0 \varphi x,$$

e nell'ipotesi di $x=a$ verrà trasformato in

$$m(m-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot \varphi a;$$

nella stessa ipotesi tutti gli altri termini spariranno, come

quelli che contengono il fattore $x - a$ cogli esponenti 1, 2, ecc.

E se in fine facciamo $n > m$ e sia $n = m + 1$ allora il primo termine della serie sarà nullo, poichè nella m^{esima} derivata era già divenuto $m(m-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot (x-a)^0 \varphi x$. Similmente ponendo $n = m + 2$, $n = m + 3, \dots n = m + k$ saranno nulli i primi due, i primi tre, ... i primi k termini della serie; ed il termine del posto $k + 1$ avrà il valore

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} m(m-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot (x-a)^0 \varphi^{(k)} x,$$

ossia

$$\frac{n(n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)} \cdot m(m-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot \varphi^{(n-m)} x.$$

Tutti i termini seguenti spariranno colla sostituzione di a ad x , perchè contengono il fattore $(x-a)$ elevato alle potenze 1^a , 2^a , ecc.

Sarà dunque

$$\begin{aligned} D_a^{(n)}[(x-a)^m \varphi x] &= 0, \text{ per } n < m \\ &= m(m-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot \varphi a, \text{ per } n = m \\ &= n(n-1) \dots (n-m+1) \varphi^{n-m} a, \text{ per } n > m. \end{aligned}$$

13.

Funzioni implicite.

Le derivate ed i differenziali di ordine superiore della funzione implicita

$$u = f(x, y) = 0$$

si possono immediatamente ottenere dalle equazioni 3, e 4 del n° 10, o più semplicemente differenziando l'equazione

$$1. \quad \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx} = 0,$$

nella quale si consideri u come funzione di y ed x , ed y dipendente da x , e prendendo in fine dagli ottenuti sviluppi i valori di y' , y'' , y''' , ecc. In tal modo si avranno successivamente

$$2. \quad \frac{du}{dy} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 + 2 \frac{d^2u}{dy dx} \frac{dy}{dx} + \frac{d^3u}{dx^3} = 0,$$

$$3. \quad \frac{du}{dy} \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \left\{ \frac{d^2u}{dy^2} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dy dx} \right\} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3u}{dy^3} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^3 \\ + 3 \frac{d^2u}{dy^2 dx} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 + 3 \frac{d^2u}{dy dx^2} \frac{dy}{dx} + \frac{d^3u}{dx^3} = 0$$

ec. ec.

e da queste equazioni si ottengono facilmente i valori di

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$$

Esempio 1. L'equazione

$$\arcsen \frac{x}{a} + \arcsen \frac{y}{b} = c$$

dà per primo differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = 0,$$

e per secondo

$$(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx + (b^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} y dy + (b^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} d'y = 0;$$

quindi

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \left[(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} x + (b^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} y \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 \right] (b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Esempio 2. Da

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0$$

si hanno per mezzo di due successive differenziazioni

$$\begin{aligned} 2(x'' + y'')xdx + 2(x'' + y'')ydy - a''xdx + b''ydy &= 0, \\ (6x'' + 2y'' - a'')dx^2 + 8xy'dxdy + (2x'' + 6y'' + b'')dy^2 \\ &+ (2x'' + 2y'' + b'')x'dy = 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= - \frac{(2x'' + 2y'' - a'')x}{(2x'' + 2y'' + b'')y}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= - \left[(6x'' + 2y'' - a'') + 8xy' \frac{dy}{dx} + (2x'' + 6y'' + b'') \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 \right] \\ &\quad : (2x'' + 2y'' + b''). \end{aligned}$$

14.

Cangiamento della variabile indipendente.

Nel n° 11 abbiamo concepito l'idea dei differenziali di ordine superiore colla condizione di essere

$$d \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} dx, \quad d \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3} dx, \text{ ecc.}$$

vale a dire che abbiamo considerato come costante il differenziale della variabile indipendente x , ed all'opposto come variabile quello della funzione y . Ma questa supposizione non sarà più ammissibile se nell'equazione $y = f(x)$ la x sia funzione di un'altra variabile t , imperocchè l'equazione 3 del n° 8 ci darà in questo caso

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt},$$

donde

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Or da questa equazione si ottengono le derivate degli ordini superiori, differenziandola rispetto a t , e considerando

dt come costante ed y come funzione di x . In questo modo si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{dt} = \left\{ \frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \right\} : \left\{ \frac{dx}{dt} \right\}^3,$$

donde

$$2. \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \right\} : \left\{ \frac{dx}{dt} \right\}^3.$$

Similmente si otterrà

$$3. \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \left[\left\{ \frac{dx}{dt} \right\}^3 \frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} \right\}^2 - \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \frac{d^3x}{dt^3} \right] : \left\{ \frac{dx}{dt} \right\}^6, \text{ ecc.}$$

Se in queste equazioni si supponga $t = x$, sarà

$$\frac{dx}{dt} = 1, \text{ quindi } \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^3x}{dt^3} = 0, \dots$$

ed esse equazioni diverranno

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}, \dots$$

come dall'ipotesi stessa immediatamente si deduce.

Se al contrario poniamo $t = y$, sarà

$$\frac{dy}{dt} = 1, \text{ e } \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \frac{d^3y}{dt^3} = 0, \dots$$

dimodochè le equazioni, da 1. a 3., prenderanno le seguenti forme

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}, \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{d^2x}{dy^2} : \left\{ \frac{dx}{dy} \right\}^3, \\ \frac{d^3y}{dx^3} = \left[3 \left\{ \frac{d^2x}{dy^2} \right\}^2 - \frac{dx}{dy} \frac{d^3x}{dy^3} \right] : \left\{ \frac{dx}{dy} \right\}^6.$$

Le equazioni 2 e 3 prenderanno forma più semplice, se lasciando indeterminata la variabile t da cui dipendono y ed x , riguardiamo come variabili i due termini della frazione $\frac{dy}{dx}$ nell'equazione

$$\frac{d^n y}{dx^n} D^{(n-1)} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}.$$

In tal modo avremo

$$\begin{aligned} d^n y &= \frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{dx^2} dx^n \\ d^2 y &= d \left\{ \frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{dx^2} \right\} dx^2 \\ &\text{ec.} \quad \text{ec.} \end{aligned}$$

Esempio 1. Se nell'equazione

$$\left[1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 \right] \frac{dy}{dx} + (y - a) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

supponiamo che y divenga variabile indipendente, le equazioni 4 mercè semplici sostituzioni la trasformeranno immediatamente in

$$1 + \left\{ \frac{dx}{dy} \right\}^2 - (y - a) \frac{d^2 x}{dy^2} = 0.$$

Sotto la stessa condizione l'equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - (x - ey) \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 = 0$$

diverrà

$$\frac{d^2 x}{dy^2} - x + ey = 0.$$

Esempio 2. Nell'equazione

$$y^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + Ay \frac{du}{dy} + Bu = 0$$

poniamo che debba essere $y = e^x$ e che in conseguenza sia x la variabile indipendente. Scambiando y con u , x con y e t con x nelle equazioni 1 e 2, si avrà

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx} : \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} \frac{du}{dx} \right\} : \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2;$$

quindi, nell'ipotesi di $y = e^x$,

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx} : e^x, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} e^x - \frac{du}{dx} e^x \right\} : e^{2x}.$$

Questi valori, sostituiti nell'equazione proposta la trasformeranno in

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (A - 1) \frac{du}{dx} + Bu = 0.$$

Similmente l'equazione

$$\frac{du}{dy} + \frac{u}{(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = a$$

diverrà

$$\frac{du}{dx} + u = \frac{a}{2} (e^x + e^{-x}),$$

se poniamo che x , essendo la variabile indipendente, sia legata ad y mercè la relazione $x = \ln[y + (1 + y^2)^{\frac{1}{2}}]$.

Esempio 3. Poniamo che nell'equazione

$$(1 - y^2) \frac{d^2u}{dy^2} - y \frac{du}{dy} + n^2u = 0$$

la variabile y debba scambiarsi con $\cos x$, e che x debba esser la variabile indipendente. Avremo in conseguenza

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx} : -\sin x, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \sin x - \frac{du}{dx} \cos x \right\} : \sin^2 x;$$

quindi l'equazione proposta diverrà

$$\frac{d^2u}{dx^2} + n^2u = 0.$$

Esempio 4. Poniamo che nell'equazione

$$\rho = \left[1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 \right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$$

1. debba prendersi per variabile indipendente s , per la quale ha luogo la relazione

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

2. che vi si debbano introdurre le variabili r e t definite dalle relazioni

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t,$$

e che t debba essere la variabile indipendente.

Volendo soddisfare la prima condizione, avremo

$$\left\{ \frac{ds}{dx} \right\}^2 = 1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right\} : \left\{ \frac{dx}{ds} \right\}^3;$$

quindi

$$\rho = 1 : \left\{ \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right\}.$$

Quanto poi alla seconda condizione avremo, differenziando rispetto a t i valori di x ed y ,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos t - r \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin t + r \cos t;$$

donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dr \sin t + r dt \cos t}{dr \cos t - r dr \sin t}.$$

Da queste equazioni deducendo i valori di $\frac{d^2x}{dt^2}$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$, ed introducendoli nella proposta, si avrà per la condizione richiesta

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r^3 + 2 \left\{ \frac{dr}{dt} \right\}^2 - r \frac{d^2r}{dt^2}}.$$

Continuità delle funzioni derivate.

Se Fx è una funzione continua tra limiti x' ed $x' + h$, e tra questi limiti sempre crescente, o sempre decrescente; reggerà rispetto ad essa tanto l'equazione

$$\lim \frac{F(x + \alpha) - Fx}{\alpha} = F'x,$$

che avrà luogo quando α continuamente decrescendo giunga ad essere infinitamente piccola, quanto l'altra

$$\frac{F(x + \alpha) - Fx}{\alpha} = F'x + \varepsilon,$$

nella quale ε deve indicare una grandezza evanescente con α e nel tempo stesso infinitesima, poichè si è supposto che Fx sia continua tra i limiti x' ed $x' + h$ e che tra questi siano compresi i valori x ed $x + \alpha$. L'incremento della funzione sarà dunque espresso da

$$1. \quad F(x + \alpha) - Fx = \alpha F'x + \alpha^2 k_1,$$

ponendo $\alpha^2 = \alpha^2 k_1$, e considerando in conseguenza k_1 come l'indice di un valore finitamente o infinitamente piccolo.

Or se nell'equazione 1 la variabile vada sempre crescendo di un infinitesimo α , avremo la serie di relazioni

$$\begin{aligned} F(x + \alpha) - Fx &= \alpha F'x + \alpha^2 k_1, \\ F(x + 2\alpha) - F(x + \alpha) &= \alpha F'(x + \alpha) + \alpha^2 k_2, \\ F(x + 3\alpha) - F(x + 2\alpha) &= \alpha F'(x + 2\alpha) + \alpha^2 k_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x + [n-1]\alpha) - F(x + [n-2]\alpha) &= \alpha F'(x + [n-2]\alpha) + \alpha^2 k_{n-1}, \\ F(x + n\alpha) - F(x + [n-1]\alpha) &= \alpha F'(x + [n-1]\alpha) + \alpha^2 k_n, \end{aligned}$$

nelle quali le grandezze $k_1, k_2, \dots k_{n-1}, k_n$ sono analo-

ghe alla k_i dell'equazione 1. E se di tutte queste equazioni si faccia l'addizione di membro a membro, ne risulterà l'altra

$$2..F(x + n\alpha) - Fx = \alpha[F'x + F'(x + \alpha) + F'(x + 2\alpha) + \dots \\ + F'(x + [n - 2]\alpha) + F'(x + [n - 1]\alpha) \\ + \alpha^2(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{n-1} + k_n),$$

in cui supponiamo ancora che x ed $x + n\alpha$ siano compresi tra i limiti di continuità della funzione Fx .

Or egli è chiaro che dovrà esistere un valore di x della forma $x + m\alpha$, compreso tra x ed $x + n\alpha$, che renderà $F'(x + m\alpha)$ eguale al medio aritmetico di tutti i termini della serie

$$F'x, F'(x + \alpha), F'(x + 2\alpha), \dots, F'(x + [n - 2]\alpha), F'(x + [n - 1]\alpha)$$

quantunque rimanesse tuttavia indeterminato di quanto $x + m\alpha$ differisca da $x + n\alpha$, e se m , che dovrà essere maggiore di zero e minore di n , sia numero intero o frazionario. Poniamo che sia un numero frazionario della forma $\frac{m}{r}$, e che il suo valore sia compreso tra gl'interi p e $p + 1$. Scambiando l'incremento α con $\frac{\alpha}{r}$, la serie dei numeri compresi tra p , $p + \frac{m}{r}$, $p + \frac{m}{r} + 1$ sarà trasformata nella serie degli interi

$$rp, rp + 1, rp + m, rp + m + 1 \dots rp + m + r,$$

ed egli è chiaro che le equazioni 1 e 2 reggeranno ancora per $\frac{\alpha}{r}$.

Dovrà similmente esservi un medio aritmetico dei numeri

$$k_1, k_2, k_3 \dots k_{n-1}, k_n,$$

e che rappresentiamo con k_q .

Questi valori medii $F'(x + mx)$ e k_q , moltiplicati pel numero dei termini ed introdotti nell'equazione 2. la trasformano in

$$F(x + nx) - Fx = nx[F'(x + mx) + ak_q],$$

ovvero, ponendo $nx = h$, in

$$3 \quad F(x + h) - Fx = h[F'(x + mx) + ak_q],$$

sempre però nell'ipotesi che il valore $x + h$ resti tra i limiti di continuità.

I valori medii, che si trovano nei secondi membri delle due ultime equazioni, dipendendo dalla forma della funzione Fx , e quindi da $F'x$; dovrà sempre aversi un valore $x + \mu x$, compreso tra x ed $x + nx$, che renda soddisfatta l'equazione

$$F'(x + \mu x) = F'(x + mx) + ak_q;$$

imperocchè essendo $F'(x + \mu x) - F'(x + mx)$, ossia ak_q , una quantità infinitamente piccola, sarà μ prossima ad m , e quindi al pari di questa sarà compresa tra zero ed n . In conseguenza dall'equazione 3 risulterà

$$4. \quad F(x + h) - Fx = hF'(x + \mu x),$$

ovvero

$$5. \quad F(x + h) - Fx = hF'(x + \Delta h)$$

se porremo $\Delta nx = \Delta h$ in vece di μx , e riguarderemo in conseguenza Δ come una frazione vera.

L'equazione 4 o 5 avrebbe luogo ancora per una funzione che non rimanesse continua tra i limiti x ed $x + h$, imperocchè se in questo caso alcuni dei valori

$$k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}, k_n$$

divengono infinitamente grandi, sarà purtuttavia sempre possibile di concepire, se non rappresentare, un loro valore medio k_q .

E la stessa equazione valerà ancora nell'ipotesi che h sia infinitamente piccola, ma sarà d'uopo che n significhi un numero finito, poichè dovrà soddisfare la relazione $n\alpha = h$; μ ancora avrà valore finito, dovendo rappresentare un numero intero compreso tra zero ed n , ovvero un numero frazionario che sia tra gl'interi p e $p + 1$. Donde poi segue che

$$\Delta = \frac{\mu\alpha}{n\alpha} = \frac{\mu}{n}$$

sarà un numero frazionario finito.

Queste osservazioni si appoggiano purtuttavia alla condizione da principio stabilita, che Fx tra i limiti x ed $x+h$ vada sempre crescendo o decrescendo. Or poniamo che la funzione rimanendo continua tra i limiti x ed $x+h$, sia crescente tra x ed $x+k$ e decrescente tra $x+k$ ed $x+h$, o viceversa, essendo $k < h$. In tal caso l'equazione 5 rispetto all'aumento k ci darà

$$F(x+k) - Fx = kF'(x+\Delta k),$$

e quanto all'aumento $h-k$ tra $x+k$ ed $x+h$ ne otterremo

$$F(x+h) - F(x+k) = (h-k)F'(x+k+\Delta'[h-k]),$$

Δ e Δ' indicando frazioni vere. Dalle quali due equazioni addizionate insieme risulta

$$F(x+h) - Fx = kF'(x+\Delta k) + (h-k)F'(x+k+\Delta'[h-k]).$$

Or sarà sempre possibile di trovare un valore $F'(x+\Delta''h)$, che sia medio tra $F'(x+\Delta k)$ a $F'(x+k+\Delta'[h-k])$, e pel quale sia $x+\Delta''h$ compreso tra x ed $x+h$, e che in conseguenza sia Δ'' l'indice di una frazione vera. Con ciò avremo ancora

$$F(x+h) - Fx = hF'(x+\Delta''h).$$

L'equazione 5, dandoci per espressione dell' aumento della funzione

$$F(x + h) = Fx + hF'(x + \Delta h),$$

giustifica la supposizione fatta nel n.° 2, in forza della quale $F(x + h)$ sarebbe decomposta in due altre funzioni, l'una dipendente dalla sola x , l'altra da x ed h nel tempo stesso. Ma poichè in generale non vi è mezzo di scovire il valore della frazione vera Δ , così neppure si potrà rappresentare il valore di $F(x + h)$, quando siano dati x ed h .

16.

Continuazione.

L'equazione 5 del n.° precedente mena ad una relazione tra le funzioni continue e loro derivate. Ponendo che Fx sia continua tra i limiti x_0 ed x_1 , l'incremento della funzione tra questi limiti dovrà soddisfare la duplice relazione

$$\begin{aligned} 1. \quad & F(x + \alpha) - Fx = \alpha F'(x + \Delta \alpha) \\ & F(x + \alpha) - Fx = \alpha F'x + k\alpha^2. \end{aligned}$$

Or quantunque sia vero che $F'x$ tra i limiti di continuità debba essere una grandezza finitamente o infinitamente piccola, poichè in contrario $\alpha F'x$ sarebbe una quantità finita, ed in conseguenza Fx non sarebbe continua, pur tuttavia rimane incerto se $F'x$, del pari che Fx sia o pur no continua tra gli stessi limiti x_0 ed x_1 . Intanto per le cose dette nel n.° precedente reggerà sempre rispetto all'incremento $F'x$ la relazione

$$F'(x + \Delta \alpha) - F'x = \Delta \alpha F''(x + \Delta \alpha),$$

Δ' indicando una frazione di $\Delta \alpha$. Perciò la prima delle equazioni 1 diverrà

$$F(x + \alpha) - Fx = \alpha F'x + \Delta \alpha^2 F''(x + \Delta' \alpha)$$

quindi l'eliminazione di $F(x + \alpha) - Fx$ ci darà

$$\alpha F'x + \alpha^2 k = \alpha F'x + \Delta \alpha^2 F''(x + \Delta' \alpha)$$

ed in conseguenza

$$k = \Delta F''(x + \Delta' \alpha).$$

Ma per le osservazioni fatte sull'equazione 3 del n° 13, ad un valore infinitesimo di α deve corrispondere un valore frazionario finito di Δ , e quindi k dovrà essere un numero finito; dunque $F''(x + \Delta' \alpha)$ sarà ancora un numero finitamente o infinitamente piccolo, e perciò nell'equazione

$$F'(x + \alpha) - F'x = \alpha F''(x + \Delta' \alpha)$$

avremo che $\alpha F''(x + \Delta \alpha)$ dovrà indicare una grandezza infinitamente piccola. Quindi $F'x$ tra i limiti $F'x_0$ e $F'x$, sarà crescente o decrescente di quantità infinitesima, quando x varierà per un infinitesimo α .

E siccome si è trovata valida per $F'x$ la conclusione ottenuta per Fx , così lo sarà ancora per $F''x$ rispetto a $F'x$, per $F'''x$ rispetto a $F''x$, ecc. Quindi il teorema:

Se una funzione di x è continua tra due limiti, continue ancora saranno le sue derivate tra gli stessi limiti.

Che poi la proposizione inversa sia anche vera, lo dimostra la semplice osservazione che $F'x$ designando un valore finito, $\alpha F'x$ sarà l'espressione di un infinitamente piccolo, quando α sia infinitesima; e che in conseguenza l'equazione

$$\alpha F'x = F(x + \alpha) - Fx$$

esprime che Fx varia per differenze infinitamente piccole.

C. Valori rimarchevoli delle funzioni.

17.

Valori indeterminati delle funzioni.

Coll' aiuto dei differenziali o delle derivate si possono scoprire i veri valori delle forme indeterminate che assumono le funzioni in conseguenza di taluni valori assegnati alle variabili. Queste forme indeterminate sono

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^{\infty}.$$

Quando una funzione prende il valore $\frac{0}{0}$ in conseguenza di un determinato valore di x , essa avrà in generale la forma $\frac{F_x}{f_x}$, cosicchè ponendo $x = x_1$, ne risulti

$$\frac{F_{x_1}}{f_{x_1}} = \frac{0}{0}.$$

Per iscrivere il vero valore di questo quoziente, basterà svolgere mercè l'equazione 5 del n° 15 i valori di $F(x_1 + \alpha)$ e $f(x_1 + \alpha)$ nell' ipotesi di α infinitamente piccola; imperocchè essendo

$$F(x_1 + \alpha) = F_{x_1} + \alpha F'(x_1 + \Delta \alpha),$$

$$\text{e} \quad f(x_1 + \alpha) = f_{x_1} + \alpha f'(x_1 + \Delta' \alpha),$$

quando Δ e Δ' disegnano frazioni finite, si avrà per effetto di $F_{x_1} = 0$ e $f_{x_1} = 0$,

$$\frac{F(x_1 + \alpha)}{f(x_1 + \alpha)} = \frac{F'(x_1 + \Delta \alpha)}{f'(x_1 + \Delta' \alpha)}$$

ovvero, attesa la continuità delle funzioni Fx ed fx ,

$$\frac{F(x_1 + \alpha)}{f(x_1 + \alpha)} = \frac{F'_{x_1}}{f'_{x_1}}.$$

E questo quoziente non essendo che il valore limite della frazione indeterminata $\frac{F'x_i}{f'x_i}$, avremo che per questo limite sarà esattamente soddisfatta la relazione

$$1. \quad \frac{F'x_i}{f'x_i} = \frac{F''x_i}{f''x_i}.$$

E se $F'x_i$ e $f'x_i$ sono ancora nulle, si avrà similmente

$$\frac{F'x_i}{f'x_i} = \frac{F''x_i}{f''x_i}.$$

In generale, se le prime $n-1$ derivate di Fx_i , e $f'x_i$, sono nel tempo stesso nulle, avrà luogo l'equazione

$$\frac{F'x_i}{f'x_i} = \frac{F^{(n)}x_i}{f^{(n)}x_i}.$$

Esempio 1. Ponendo $x=a$, si ottieno

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{0}{0}.$$

Ma

$$D(x^m - a^m) = mx^{m-1}, \text{ e } D(x^n - a^n) = nx^{n-1};$$

dunque nell'ipotesi di $x=a$ avremo

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

Similmente si avrà che per $x = \frac{\pi}{2}$, sarà

$$\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1} = 1.$$

Esempio 2. Due successive differenziazioni ci daranno, nell'ipotesi di $x=a$,

$$\frac{x^4 - 4a^3x + 3a^4}{x^4 - ax^3 - a^3x + a^4} = 2,$$

$$e \quad \frac{a - x - a + ax}{a - \sqrt{(2ax - x^2)}} = \pm 1,$$

Esempio 3. Facendo $x = 0$, si ha

$$\frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{0}{0}.$$

Ma con due differenziazioni successive si avrà il suo vero valore $\frac{1}{3}$.

Similmente tre successive differenziazioni ci daranno nella stessa ipotesi di $x = 0$

$$\frac{e^x - 2x - e^{-x}}{x - \operatorname{sen} x} = 2,$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x - \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x} = \frac{1}{2}.$$

18.

Continuazione.

Tutte le forme indeterminate delle funzioni possono ridursi alle equazioni 1 e 2 del n.° 17.

1. Se dando ad x un valore determinato x_1 , risulti

$$\frac{F x_1}{f x_1} = \frac{\infty}{\infty},$$

egli è chiaro che dovrà essere

$$\frac{1}{F x_1} = 0, \text{ ed } \frac{1}{f x_1} = 0,$$

quindi

$$\frac{F x_2}{f x_2} = \frac{1}{f x_1} : \frac{1}{F x_1},$$

e per l'equazione 1 del n.° 17 sarà

$$\frac{F'x_1}{fx_1} = -\frac{f'x_1}{(fx_1)^2} : -\frac{F''x_1}{(F'x_1)^2} = \frac{(F'x_1)^2}{(fx_1)^2} \cdot \frac{f'x_1}{F''x_1},$$

ovvero, semplificando l'espressione,

$$\frac{F'x_1}{fx_1} = \frac{F''x_1}{f'x_1}.$$

Esempio. Così, ponendo $x = \infty$, avremo

$$\frac{a^x}{x} = a^x \frac{1}{x} = \infty,$$

e
$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log e}{x} = 0;$$

dimodochè le due funzioni sono crescenti, l'una assai più celeramente di x , l'altra assai più lentamente.

2. Se per le due funzioni Fx ed fx ha luogo l'equazione

$$Fx_1 \cdot fx_1 = 0 \times \infty,$$

sarà

$$Fx_1 : \frac{1}{fx_1} = \frac{0}{0},$$

ed in conseguenza questa forma rientra nell'equazione 1 del n° 17.

Esempio. Si ha

$$(a - x) \lg \frac{\pi x}{2a} = 0 \times \infty, \text{ ponendo } x = a,$$

ma poichè

$$(a - x) \lg \frac{\pi x}{2a} = \frac{a - x}{\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2a}},$$

così nell'ipotesi di $x = a$ si ottiene

$$\frac{a - x}{\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2a} = \frac{2a}{\pi}.$$

Similmente nell'ipotesi di $x = \frac{\pi}{4}$ si avrà

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \cot g \left\{ \frac{\pi}{4} + x \right\} = \frac{1}{2}.$$

3. Se nell'equazione

$$Fx - fx = \infty - \infty$$

Fx e fx rappresentano funzioni frazionarie, si potrà mutare la differenza in un quoziente, e così venire nuovamente ad applicare l'equazione 1 del n° 17.

Abbiamo, per esempio,

$$\frac{1}{1x} - \frac{1}{x-1} = \infty - \infty \text{ per } x = 1;$$

ma questa differenza può trasformarsi nel fratto

$$\frac{(x-1) - 1x}{(x-1)1x},$$

i cui termini, differenziati due volte, faranno risultare $\frac{1}{2}$ per vero valore della funzione proposta.

4. Poniamo che la funzione esponenziale $u = Fx^{fx}$ si presentasse sotto una delle forme 0^0 , ∞^0 , 1^0 . Essendo

$$lu = fx l(Fx),$$

sarà

$$u = e^{fx l(Fx)} = e^{\frac{l(Fx)}{(fx)-1}},$$

e secondo l'equazione 1 del n° 17 sarà $-\frac{F'x(fx)^2}{Fxlfx}$ il vero valore dell'esponente $\frac{l(Fx)}{(fx)-1}$.

Esempio. Ponendo $x = 0$ si ha

$$x^x = e^{\frac{lx}{x-1}} = e^{-\frac{x^2}{x}} = e^{-x} = 1, *$$

ponendo $x = \infty$: $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} = c^{\frac{1}{x}} = 1,$

ponendo $x = 1$: $x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-x}} = c^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{c}.$

19.

Massimi e minimi.

Il valore speciale Fx_1 di una funzione Fx sarà un massimo, se i valori prossimi $F(x_1 - \alpha)$ e $F(x_1 + \alpha)$ sieno minori di Fx_1 , e si dirà viceversa di essere un minimo se quei valori prossimi sieno più grandi di Fx_1 . Or per questa definizione dovendo Fx nel caso del massimo cessar di crescere in vicinanza di $x = x_1$, per cominciare a diminuire, e viceversa in caso di minimo cessar di diminuire per cominciare a crescere, segue che una funzione potrà contenere più massimi e minimi. Ed in vero se ad $x = x_1$ corrisponda un massimo, Fx la quale cominciando da Fx_1 ed andando innanzi avrà preso valori sempre minori in corrispondenza di quelli di x sempre più grandi o più piccoli di x_1 , potrà finalmente cominciar a crescere di bel nuovo, e così da un massimo potrà venir fuori un minimo e seguirlo dappresso: similmente si troverà che ad un minimo potrà seguire un massimo.

Or ponendo che α rappresenti un infinitamente piccolo, sarà

$$F(x_1 + 2\alpha) - F(x_1 + \alpha) = \alpha F'(x_1 + \alpha),$$

e $Fx_1 - F(x_1 - \alpha) = \alpha F'(x_1 - \alpha).$

Ma pel massimo dovrà essere

$$Fx_1 > F(x_1 + \alpha) \text{ e } Fx_1 > F(x_1 - \alpha);$$

e Fx dovrà cominciare a decrescere da un valore prossimo ad $x_1 + \alpha$ andando innanzi, dimodochè sarà

$$F(x_i + \alpha) > F(x_i + 2\alpha);$$

dunque

$$\frac{Fx_i - F(x_i - \alpha)}{\alpha}, \text{ ossia } F'(x_i - \alpha) \text{ sarà positiva}$$

$$\text{e } \frac{F(x_i + 2\alpha) - F(x_i + \alpha)}{\alpha} \text{ ossia } F'(x_i + \alpha) \text{ sarà negativa.}$$

All'opposto, essendo pel minimo

$$Fx_i < F(x_i + \alpha) \text{ e } Fx_i < F(x_i - \alpha),$$

e dovendo cominciare l'incremento di Fx da un valore prossimo ad $x_i + \alpha$, dinuodochè avremo

$$F(x_i + \alpha) < F(x_i + 2\alpha);$$

$$\text{sarà } \frac{Fx_i - F(x_i - \alpha)}{\alpha} \text{ ossia } F'(x_i - \alpha), \text{ negativa}$$

$$\text{e } \frac{F(x_i + 2\alpha) - F(x_i + \alpha)}{\alpha} \text{ ossia } F'(x_i + \alpha), \text{ positiva.}$$

Il massimo dunque suppone che $F'x$ in vicinanza del valore $x = x_i$ passi dal positivo al negativo, ed il minimo al contrario che $F'x$ in vicinanza dello stesso valore passi dal negativo al positivo. Questa condizione del massimo e minimo è indispensabile e nel tempo stesso è sufficiente.

Or una funzione non può passare dal positivo al negativo, o viceversa, senza che tocchi lo zero o l'infinito, secondochè in vicinanza del passaggio si troverà esser continua o discontinua.

Se Fx è continua pei valori di x prossimi ad x_i , $F'x_i$ dovendo soddisfare alla relazione.

$$F(x_i + \alpha) - Fx_i = \alpha F'x_i,$$

non potrà essere infinitamente grande. Sarà dunque

$$1. \quad F'x_i = 0$$

sì pel massimo che pel minimo.

Poniamo che abbia luogo un massimo, in vicinanza di esso $F'x$ passerà dal positivo al negativo, ed in conseguenza si avrà $F'(x_1 - \alpha) > F'x_1, F'x_1 > F'(x_1 + \alpha), F'(x_1 + \alpha) > F'(x_1 + 2\alpha)$,
dove

$$F'x_1 - F'(x_1 - \alpha) = \alpha F''(x_1 - \alpha) < 0,$$

$$F'(x_1 + \alpha) - F'x_1 = \alpha F''x_1 < 0,$$

$$F'(x_1 + 2\alpha) - F'(x_1 + \alpha) = \alpha F''(x_1 + \alpha) < 0;$$

vale a dire che $F''(x_1 - \alpha), F''x_1$ e $F''(x_1 + \alpha)$ saranno tutte negative.

Ponendo invece che che abbia luogo un minimo, avremo che prossimamente ad esso $F'x$ dovrà passare dal negativo al positivo, cosicchè sarà

$$F'(x_1 - \alpha) < F'x_1, F'x_1 < F'(x_1 + \alpha), F'(x_1 + \alpha) < F'(x_1 + 2\alpha);$$

quindi

$$F'x_1 - F'(x_1 - \alpha) = \alpha F''(x_1 - \alpha) > 0,$$

$$F'(x_1 + \alpha) - F'x_1 = \alpha F''x_1 > 0,$$

$$F'(x_1 + 2\alpha) - F'(x_1 + \alpha) = \alpha F''(x_1 + \alpha) > 0;$$

vale a dire che $F''(x_1 - \alpha), F''x_1$ e $F''(x_1 + \alpha)$ saranno tutte positive.

Volendo dunque definire se una funzione continua Fx tenga un massimo o un minimo, si porrà l'equazione $F'x=0$, ed il valore che ne riporterà x , sarà introdotto in $F''x$; se $F''x_1$ risulterà negativa, Fx_1 sarà un massimo, ed un minimo viceversa se $F''x_1$ sarà positiva.

Il valore di $F''x_1$ non può risultar infinito, poichè se ciò fosse, $F'x_1$ ed in conseguenza (n.° 16) Fx_1 sarebbe discontinua. Ma potrà essere $F''x_1 = 0$. Or essendo Fx_1 un massimo, i valori di $F''(x_1 - \alpha), F''x_1, F''(x_1 + \alpha)$ dovranno esser negativi; quindi $F''x_1 = 0$ sarà il limite dei valori negativi più grandi possibili, e $F''x_1$ sarà essa stessa un massimo. Similmente abbiamo che dovendo esser positivi i valori di $F''(x_1 - \alpha),$

$F''x_i$ e $F''(x_i + x)$ quando Fx_i è un minimo, sarà $F''x_i = 0$ il limite inferiore dei valori positivi, e $F''x_i$ essa stessa sarà un minimo. Or essendo $F''x_i = 0$ un massimo o un minimo, sarà $F'''x_i = 0$, e nel tempo stesso $F''x_i$ sarà negativa se $F''x_i$ significa un massimo, e positiva se esprime un minimo. E se fosse anche $F''x_i = 0$, le stesse conseguenze precedenti si ripeterebbero, dimodochè Fx_i per essere un massimo o un minimo, le prime $2n - 1$ derivate dovranno esser nulle, e $F^{(2n)}x_i$ dovrà esser negativa pel massimo, positiva pel minimo — La funzione $e^x + 2\cos x + e^{-x}$ ce ne offre un esempio.

Se Fx è discontinua in vicinanza di $x = x_i$, ivi $F'x$ dovrà pasare dal positivo al negativo se Fx_i è un massimo, e viceversa dal negativo al positivo se Fx_i è un minimo; ma $F'x_i$ sarà nulla, o infinitamente grande o approssimante all'infinito. In tal caso non potremo più distinguere il massimo dal minimo mercè le derivate successive, perchè queste diverranno anch'esse infinite, o almeno convergenti allo infinito. Allora non si potrà far altro che introdurre $x_i - a$ ed $x_i + a$ in $F'x_i$; se troveremo $F'(x_i - a)$ positiva e $F'(x_i + a)$ negativa, Fx_i sarà un massimo, e viceversa la stessa funzione dinoterà un minimo, se $F'(x_i - a)$ risulterà negativa, e $F'(x_i + a)$ positiva: ma se queste derivate avranno uno stesso segno, Fx_i non sarà nè un massimo, nè un minimo.

Esempio 1. Qual'è il valore di x che fa della funzione

$$u = 3x^4 - 28ax^3 + 84a^2x^2 - 96a^3x + 48a^4$$

un massimo o un minimo?

$$\frac{du}{dx} = 12x^3 - 84ax^2 + 168a^2x - 96a^3$$

ci dà

$$x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3 = 0.$$

Le radici di quest'equazione sono a , $2a$ e $4a$; e nel tempo

stesso abbiamo

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 36x^2 - 168ax + 168a^2;$$

quindi

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 36a^2 \text{ per } x = a$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -24a^2 \text{ per } x = 2a$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 72a^2 \text{ per } x = 4a.$$

Perciò

$u = 11a^4$ è un minimo per $x = a$

$u = 16a^4$ è un massimo per $x = 2a$

$u = -16a^4$ è un minimo per $x = 4a$.

Similmente da

$$u = \frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}$$

avremo che

$$u = -\left\{ \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right\}^2 \text{ è un minimo per } x = \sqrt{ab}$$

$$u = -\left\{ \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right\}^2 \text{ è un massimo per } x = -\sqrt{ab}$$

Esempio 2. Sia data la funzione

$$u = \operatorname{sen}^m x \operatorname{sen}^n(a-x).$$

Se per un determinato valore di x la funzione u diviene un massimo o un minimo, lu seguirà le stesse fasi di grandezza, dovendo crescere e decrescere con u . Per facilitare il calcolo ci facciamo a cercare il massimo o il minimo di $lu = v$. Avremo primieramente

$$\frac{dv}{dx} = m \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - n \frac{\cos(a-x)}{\operatorname{sen}(a-x)} = 0.$$

Da questa equazione si ottiene

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(a-x)} = \frac{m}{n};$$

quindi

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(n-x)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(a-x)} = \frac{m+n}{m-n},$$

ovvero

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}(2x-a)} = \frac{m+n}{m-n},$$

donde

$$x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \left\{ \frac{m-n}{m+n} \operatorname{sen} a \right\}.$$

E poichè

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{m}{\operatorname{sen}^3 x} - \frac{n}{\operatorname{sen}^3(a-x)}$$

rimane negativa per ogni valore di x , così per l'ottenuto valore di questa variabile la funzione v e quindi u sarà un massimo.

Esempio 3. Determinare il massimo dei triangoli aventi lo stesso perimetro ed una medesima base.

Rappresenti $2s$ il perimetro, a il lato dato, x uno dei rimanenti, ed in conseguenza $2s - a - x$ il terzo lato. Quindi la superficie del triangolo sarà espressa da

$$u = \sqrt{(s-a)(s-x)(a+x-s)},$$

e pel massimo valore di u avremo

$$\frac{du}{dx} = (s-a)(s-x)(a+x-s)^{-\frac{1}{2}} s(s-a)(s-a-x+s-x) = 0;$$

donde

$$x = s - \frac{a}{2}, \quad 2s - a - x = s - \frac{a}{2},$$

vale a dire che il triangolo sarà isoscele.

Che poi questo valore di x corrisponda ad un massimo, ciò

viene indicato dall'espressione negativa di $\frac{d^2u}{dx^2}$. Oltracchè l'è chiaramente ancora dalla natura stessa del problema, il quale non ammette altro minimo fuorchè $u = 0$.

Similmente si troverà che il triangolo, di cui son dati i lati a e b , avrà la massima area, quando i lati a e b comprenderanno un angolo retto.

Il calcolo precedente sarebbe stato più breve, se in vece del valore massimo di u si fosse cercato quello di u'' ; la qual cosa avrebbe menato allo stesso risultamento, imperocchè il valore di x che darà valore massimo ad u'' , renderà massimo anche u .

Esempio 4. In una retta data AB si cerca un punto C tale che la somma delle congiungenti $MC + NC$ a due punti dati sia un minimo.

Dicansi b e c le perpendicolari MD ed NE che abbassate dai punti M ed N sulla retta AB , la incontrano in D ed E ; e pongasi $DE = a$, la distanza richiesta $DC = x$, e la somma $MC + NC = u$. Sarà

$$u = \sqrt{(b^2 + x^2)} + \sqrt{(c^2 + (a - x)^2)},$$

quindi

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(b^2 + x^2)}} - \frac{a - x}{\sqrt{(c^2 + (a - x)^2)}} = 0.$$

cioè

$$\frac{DC}{MC} = \frac{EC}{NC}.$$

Dunque se u debba essere un massimo o un minimo è d'uopo che i triangoli MCD , NCE siano simili, e che in conseguenza sia l'angolo $MCD = NCE$. Or egli è chiaro che u non potrà divenire un massimo, senza che il punto C sia allontanato ad una distanza infinita sulla retta AB ; sarà dunque un minimo; e dalla simiglianza dei triangoli risultando l'equazione

$$\frac{MD}{DC} = \frac{NE}{CE}, \text{ ossia } \frac{b}{x} = \frac{c}{a - x},$$

sarà

$$x = \frac{ab}{b+c}.$$

Esempio 3. In qual caso il quadrilatero, di cui sono lati a, b, c, d , racchiuderà l'area massima?

Indicando con x ed y due angoli opposti, e sia x formato dai lati a e b , y da c e d ; sarà l'area u del quadrilatero espressa da

$$u = \frac{1}{2} (\text{absen } x + \text{cdsen } y),$$

e per la diagonale, che separa i lati a e b da c e d , avremo

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos x = c^2 + d^2 - 2cd \cos y.$$

Così abbiamo due equazioni per x ed y , l'ultima delle quali ci mostra che y è una funzione di x . Differenziando le due equazioni rispetto ad x , si ha

$$2 \frac{du}{dx} = ab \cos x + cd \cos y \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\text{absen } x = \text{cdsen } y \frac{dy}{dx},$$

e sostituendo nella prima il valore di $\frac{dy}{dx}$, tolto dalla seconda, risulterà

$$\cos x \text{sen } y + \text{sen } x \cos y = 0,$$

ossia

$$\text{sen } (x + y) = 0.$$

sarà dunque $x + y = \pi$, vale a dire che il quadrilatero sarà inscrittibile in un cerchio. In fine si troverà facilmente essere $\frac{d^2u}{dx^2} < 0$.

Esempio 6. Quale dei parallelepipedi rettangolari aventi lo stesso volume a^3 e comune lo spigolo c , avrà minima superficie?

Indicando con x ed y gli altri due lati, avremo

$$cxy = a^2, \text{ quindi } y = \frac{a^2}{cx}.$$

Ed i tre rettangoli differenti della superficie u del parallelepipedo saranno

$$cx, cy = \frac{a^2}{x}, yx = \frac{a^2}{c}.$$

Quindi avremo

$$u = 2 \frac{a^2}{c} + 2cx + 2 \frac{a^2}{x},$$

e

$$\frac{du}{dx} = 2c - 2 \frac{a^2}{x^2} = 0,$$

donde

$$x = y = a \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Il valore di $\frac{d^2u}{dx^2}$ risulterà positivo, come è chiaro dall'equazione precedente.

Similmente si troverà che il cilindro di minima superficie avrà l'altezza eguale al raggio o al diametro della base, secondo che questa verrà considerata sola o insieme all'altra.

20.

Continuazione.

Se y dipende implicitamente da x mercè l'equazione

$$1. \quad f(x, y) = 0$$

le derivate $\frac{dy}{dx}$, e $\frac{d^2y}{dx^2}$ ci saranno date (n° 13) dalle equazioni

$$2. \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3. \quad \frac{d^2f}{dx^2} + 2 \frac{d^2f}{dydx} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 + \frac{df}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Or dall'equazione 2 si avrà pel massimo o minimo della funzione y la condizione

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} = 0.$$

quindi l'equazione 3 diverrà

$$5. \quad \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Le equazioni 1 e 4 somministrano i valori di x ed y , appartenenti ad un massimo o ad un minimo, e l'equazione 5 mercè il segno che ne riporterà $\frac{d^2y}{dx^2}$ farà conoscere quale dei due notati valori avrà luogo.

Esempio 1. L'equazione della curva

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

che rappresenta la foglia di Cartesio, ne dà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax};$$

e perchè y sia un massimo o un minimo, dovrà esser soddisfatta la relazione

$$ay - x^2 = 0.$$

che congiunta all'equazione $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ ne dà

$$x^3 - 2a^2x^2 = 0;$$

donde

$$x = 0, \text{ ed } x = a\sqrt[3]{2},$$

ed i corrispondenti valori di y saranno

$$y = 0, \quad y = a \sqrt[3]{4}.$$

Dall'equazione 5 si ottiene

$$(y^3 - ax) \frac{d^2y}{dx^2} + 2x = 0 :$$

e se in questa poniamo $x = a \sqrt[3]{2}$ ed $y = a \sqrt[3]{4}$, avremo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{a} ;$$

quindi per gl'indicati valori di x ed y la funzione diverrà un massimo.

Ponendo invece $x = 0$ ed $y = 0$ nell'equazione che dà il valore di $\frac{dy}{dx}$, si avrà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} .$$

Intanto le derivate 2^a e 3^a della funzione danno

$$(y^3 - ax) \frac{d^2y}{dx^2} + 2y \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 - 2a \frac{dy}{dx} + 2x = 0,$$

$$(y^3 - ax) \frac{d^2y}{dx^2} + \left\{ 6y \frac{dy}{dx} - 3a \right\} \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 + 2 = 0,$$

nelle quali se poniamo $x = 0$ ed $y = 0$, risulta

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ e } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3a} ;$$

dunque per gl'indicati valori la funzione y è un minimo.

Esempio 2. Dall'equazione

$$y^4 - 4a^2xy + x^4 = 0$$

risulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2y - x^3}{y^3 - a^2x}, \text{ quindi } a^2y - x^3 = 0.$$

ed unendo quest'equazione a quella della curva, si ha

$$x^2 - 3a^2 = 0.$$

Le due radici reali di quest'ultima equazione danno

$$x = + a \sqrt[3]{3}, \quad y = + a \sqrt[3]{27},$$

$$x = - a \sqrt[3]{3}, \quad y = - a \sqrt[3]{27}.$$

Ma per la derivata seconda si ha

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2 \frac{dy}{dx} - 3x^2}{y^2 - a^2x} = - \frac{3x^2}{y^2 - a^2x}.$$

Quindi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = + \frac{3\sqrt[3]{3}}{7a\sqrt[3]{3}} \text{ per } x = + a \sqrt[3]{3},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{3\sqrt[3]{3}}{7a\sqrt[3]{3}} \text{ per } x = - a \sqrt[3]{3}.$$

ed in conseguenza al valore positivo di x corrisponde un minimo ed al negativo un massimo.

D. Delle funzioni in serie.

21.

Serie di Taylor.

Se Fx è una funzione continua tra i limiti x_1 ed x_2 , sarà ancora continua

$$Fk = F(x + (k - x))$$

per ogni valore $k = x$ che renda soddisfatta la relazione

$x_n > k > x_1$. E se consideriamo $k - x$ qual incremento di x , avremo mercè l'equazione 3 del u° 13

$$Fk = Fx + (k - x) F'(x + \Delta_1[k - x])$$

ovvero ponendo $F'(x + \Delta_1[k - x]) = u'$,

$$1. \quad Fk = Fx + (k - x) u',$$

purchè sia $x_n > x > x_1$.

Or differenziando l'ultima equazione rispetto ad x e supponendo k indipendente da x , si avrà successivamente

$$0 = F'x - u' + (k - x) u'',$$

$$0 = F''x - 2u'' + (k - x) u''',$$

$$0 = F'''x - 3u''' + (k - x) u^{(4)}$$

$$.$$

$$0 = F^{(n)}x - nu^{(n)} + (k - x)u^{(n+1)}.$$

Quindi per u' , u'' , u''' , ... $u^{(n)}$ si avranno i valori

$$u' = F'x + (k - x)u''$$

$$u'' = \frac{F''x}{2} + \frac{(k - x)}{2} u'''$$

$$u''' = \frac{F'''x}{3} + \frac{(k - x)}{3} u^{(4)}$$

$$.$$

$$u^{(n)} = \frac{F^{(n)}x}{n} + \frac{k - x}{n} u^{(n+1)};$$

e se questi valori nello stesso ordine, con cui si succedono l'uno all'altro, siano introdotti nell'equazione 1, si avrà

$$2. \quad Fk = Fx + \frac{k - x}{1} F'x + \frac{(k - x)^2}{1.2.} F''x + \frac{(k - x)^3}{1.2.3.} F'''x + \dots$$

$$+ \frac{(k - x)^n}{1.2.3\dots n} F^{(n)}x + \frac{(k - x)^{n+1}}{1.2.3\dots n} u^{(n+1)}.$$

Or ponendo $k = x + h$, a condizione però che x ed $x + h$ stiano tra i limiti di continuità, e restituendo ad u il suo valore, si otterrà

$$\begin{aligned} 3. F(x + h) = Fx + \frac{h}{1} F'x + \frac{h^2}{1.2.} F''x + \frac{h^3}{1.2.3.} F'''x + \dots \\ + \frac{h^n}{1.2.3\dots n} F^{(n)}x + \frac{h^{n+1}}{1.2.3\dots n} F^{(n+1)}(x + \Delta h). \end{aligned}$$

In quest'equazione consiste la legge dell'incremento di una funzione continua, legge indicata nel n° 2 e che si potrà ottenere dall'equazione 7 dello stesso numero, qualora si consideri che dev'essere

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{df(x+h)}{dh}, \text{ ossia } f'_x(x+h) = f'_h(x+h).$$

Quantunque nell'ultimo termine, denominato termine residuo, Δ significhi una frazione vera, purtuttavia non è possibile determinare esattamente il valore di $F^{(n+1)}(x + \Delta h)$, quando son dati x_0 ed h ; sappiamo soltanto che questo valore dev'essere compreso tra $F^{(n+1)}x_0$ e $F^{(n+1)}(x_0 + h)$, e conosciamo egualmente se tra questi limiti $F^{(n+1)}x$ cangi o pur no di segno. Mercè questi dati si perviene ad ottenere un valore approssimato di $F(x + h)$, senza che si abbia a tener conto del termine residuo.

22.

Validità di questa serie.

Se una serie continua di numeri

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}$$

ciascun dei quali deriva dal precedente mercè una data legge, sia costituita in modo che la somma s_n dei primi n nu-

meri

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$$

col crescere dell'intero n si approssimi sempre più ad un certo limite s , la serie si dirà convergente, ed s ne sarà la somma. Se al contrario la somma s_n non si avvicini continuamente ad un simile limite, la serie sarà divergente, e sarà impossibile ottenerne la somma.

Come contrassegni della convergenza di una serie valgono le due seguenti leggi, facili ad esser comprese e che si trovano dimostrate nei numeri 71 e 72 degli Elementi della teoria dei numeri.

1. Se con n sempre crescente le somme

$$a_n + a_{n+1},$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2},$$

ecc. ecc.

qualunque ne sia il numero dei termini, risultino sempre minori di ogni numero dato, la serie

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

sarà convergente.

* Questo teorema deriva immediatamente dall'idea di convergenza, imperocchè se la somma dei termini della serie

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1},$$

deve approssimarsi ad un valore s , come n va crescendo, necessariamente coll'aumentarsi di n la differenza

$$s - s_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

dovrà convergere a zero, e la somma

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

risultar minore di ogni quantità data. (Il Tr.)

2. La stessa serie sarà convergente, se

$$a_n < x^n, \text{ ossia } (a_n)^{\frac{1}{n}} < x,$$

nell'ipotesi che x sia minore dell'unità ed appartenga alla serie

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$$

* Se due serie, che rappresentiamo con

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots \quad (1)$$

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots \quad (2)$$

abbiano i termini corrispondenti collo stesso segno, e che a cominciare dai termini a_n ed α_n si abbia

$$a_n < \alpha_n, a_{n+1} < \alpha_{n+1}, \text{ ecc.}$$

la serie (1) sarà convergente, se sia tale la serie (2).

Chiamiamo E_{n+1} il termine complementare della serie (1) ed E'_{n+1} quello di (2). Essendo $a_n < \alpha_n, a_{n+1} < \alpha_{n+1}$, ecc. ed i termini corrispondenti avendo lo stesso segno, sarà evidentemente

$$E_{n+1} < E'_{n+1}.$$

Ma per ipotesi E'_{n+1} converge a zero, sarà dunque anche E_{n+1} convergente a zero.

Or è noto che la somma dei termini della progressione

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$$

converge al limite $\frac{1}{1-x}$ nell'ipotesi di $x < 1$; sarà dunque convergente ancora la serie

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

quando si abbia

$$a_n < x^n, a_{n+1} < x^{n+1}, \text{ ecc. (Il Trad.)}$$

*

Mercè questo secondo contrassegno si trova che la serie

$$1. \quad \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{1.2.3.4}, \frac{x^n}{1.2.3\dots n}$$

rimane convergente per ogni valore finito di x . Ed in vero supponendo che n sia numero pari, il prodotto $1.2.3\dots n$ assumerà la forma

$$1. n \times 2(n-1) \times 3(n-2) \dots \frac{n}{2} \left\{ \frac{n}{2} + 1 \right\},$$

se i termini equidistanti dal mezzo si compongano a due a due. Si avranno così $\frac{n}{2}$ prodotti di fattori a due a due; ed il minimo di questi prodotti è il primo $1.n$. Quindi se ciascuno dei prodotti seguenti fosse eguale al primo, sarebbe $n^{\frac{n}{2}}$ il valore di $1.2.3.4\dots n$. Ma abbiamo $2(n-1) > 1.n$, $3(n-2) > 2(n-1)$, ... sarà dunque

$$1.2.3\dots n > n^{\frac{n}{2}}$$

per ogni numero pari n .

Se al contrario n è numero dispari, e quindi $n-1$ pari, sarà $\frac{n+1}{2}$ il medio dei numeri $1, 2, 3, \dots n$; perciò il prodotto potrà prendere la forma

$$1.n \times 2(n-1) \times 3(n-2) \dots \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+3}{2} \times \frac{n+1}{2}.$$

Ma evidentemente si ha

$$1.n \times 2(n-1) \times 3(n-2) \dots \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+3}{2} > n^{\frac{n-1}{2}},$$

sarà dunque

$$1.2.3\dots n > n^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n+1}{2}.$$

E poichè per ogni numero dispari n , che sia maggiore della unità, è $\frac{n+1}{2} > \sqrt{n}$; così anche per un numero dispari n si avrà

$$1. 2. 3. \dots n > n^{\frac{n}{2}}.$$

Da ciò segue che il termine generale della nostra serie renderà soddisfatta la relazione

$$\frac{x^n}{1. 2. 3. \dots n} < \frac{x^n}{n^{\frac{n}{2}}}$$

e che in conseguenza sarà

$$\left\{ \frac{x^n}{1. 2. 3. \dots n} \right\}^{\frac{1}{n}} < \left\{ \frac{x^n}{n^{\frac{n}{2}}} \right\}^{\frac{1}{n}} \text{ ovvero } < \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

E poichè con n sempre crescente l'espressione $\frac{x}{\sqrt{n}}$ diviene minore dell'unità, tanto più quel termine generale si approssimerà a zero.

Tutte queste osservazioni insieme ci menano alla conclusione che la serie 1 sia convergente.

Or tornando alla serie 3 del n° 21, noi troviamo ch'essa sarà convergente, se il suo termine generale renderà soddisfatta la condizione

$$\left\{ \frac{h^n}{1. 2. 3. \dots n} F^{(n)} x \right\}^{\frac{1}{n}} < \frac{h}{\sqrt{n}} \cdot (F^{(n)} x)^{\frac{1}{n}}.$$

Finchè $F^{(n)} x$ rimarrà quantità finita, la sua n^{esima} radice si approssimerà a zero * come n andrà crescendo. $F^{(n)} x$ è conti-

* Il valore limite della radice n^{esima} di qualsivoglia quantità finita, quando n cresce indefinitamente, è da riporsi nell'unità anzichè nello zero. Del resto questa osservazione nulla toglie al rigore della conseguenza che ne trae l'autore. (il trad.)

nna finchè lo sarà Fx , come si è dimostrato nel n° 16; ma poichè con n crescente all'infinito anche in $F^{(n)}x$ la variabile può eccedere i limiti di continuità, così la serie

$$2. \quad F(x+h) = Fx + \frac{h}{1} F'x + \frac{h^2}{1.2.} F''x + \frac{h^3}{1.2.3.} F'''x + \dots \\ + \frac{h^n}{1.2.3\dots n} F^{(n)}x + \dots$$

sarà convergente, finchè Fx e $F(x+h)$ restino continue, h sia quantità finita e lo sia ancora $F^{(n)}x$ comunque n vada crescendo.

Se con n crescente il valore di $F^{(n)}x$ divenga infinito, sarà d'uopo cercare nei singoli casi la convergenza o divergenza della serie.

La serie della forma 2, che può far a meno del termine residuo, ha ricevuto dal nome dell'inventore quello di serie di Taylor.

Egli è chiaro che la serie 2 resterà continua, quando $F^{(n)}x$ col crescere di n divenga nulla e nulla resti. Sia per esempio

$$Fx = x^3 + x^2 + 1,$$

e si cerchi il valore di questo trinomio pel caso in cui x venga mutata in $x-2$. Essendo

$$F'x = 3x^2 + 2x, \quad F''x = 6x + 2, \quad F'''x = 6, \\ F^{(4)}x = F^{(5)}x = \dots = 0,$$

avremo a cagione di $h = -2$,

$$F(x-h) = x^3 - 5x^2 + 8x - 3.$$

Similmente

$$3x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 7$$

si trasformerà in

$$3x^4 - 29x^3 + 102x^2 - 144x + 57$$

ponendovi $x-2$ invece di x .

Formola del binomio.

L'equazione 5 del n° 7 ci dà per $Fx = x^m$

$$F^{(n)}x = D^{(n)}x^m = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n};$$

quindi per l'equazione 2 del n° precedente

$$1. \quad (x+h)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} \cdot h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \cdot h^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} \cdot h^3 + \dots$$

Questa equazione reggerà per ogni valore intero o fratto, positivo o negativo di m , se i valori di x ed h siano scelti in modo che x^m e $(x+h)^m$ restino continue, e che crescendo n , $D^{(n)}x^m$ non divenga infinita.

Veramente l'equazione 5 del n° 7 suppone la formola del binomio in tutta la sua generalità. Intanto anche senza questa supposizione si potrebbe pervenire alla derivata generale di x^m per ogni valore reale di m . Imperocchè se nell'equazione 5 del n° 9 si scambino $u, v, w, \dots$ con x , si avrà per m intero e positivo

$$d(x^m) = mx^{m-1}dx;$$

e se, ponendo

$$y = x^{\frac{m}{n}}, \quad y = x^{-n}$$

si differenzino le equazioni

$$y^n = x^m, \quad \text{e} \quad \frac{1}{y} = x^n,$$

e si risolvano rispetto a dy , si otterrà egualmente l'espressione $D^{(n)}x^m = mx^{m-n}$ per ogni valore reale di m .

1. Se m è intero e positivo, la serie si comporrà di un

numero finito di termini, imperocchè

$$D^{(m)}x^m = m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1$$

$$e \quad D^{(m+r)}x^m = D^{(m+r-1)}x^m = \dots = 0.$$

Quindi

$$2. \quad (x+h)^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}.h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}.h^2 + \dots + \frac{m}{1}x.h^{m-1} + h^m.$$

2. Se all'opposto m disegni un numero frazionario positivo della forma $\frac{m}{n}$, l'equazione 1 darà luogo alla serie

$$(x+h)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}.h + \frac{m(m-n)}{2n^2}x^{\frac{m}{n}-2}.h^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{2.3.n^3}x^{\frac{m}{n}-3}.h^3 + \dots$$

la quale non avrà fine, poichè la derivata generale non diverrà giammai nulla. Ed eleggendo a fattore $x^{\frac{m}{n}}$ si avrà

$$3. \quad (x+h)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \left[1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{h}{x} + \frac{m(m-n)}{2n^2} \cdot \left\{ \frac{h}{x} \right\}^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{2.3.n^3} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^3 + \dots \right].$$

Di questa serie il termine generale

$$\frac{m(m-n)\dots(m-(r-1)n)}{2.3\dots r.n^r} \cdot \left\{ \frac{h}{x} \right\}^r$$

dimostra che crescendo r , il primo fattore, restando sempre minore dell'unità, convergerà a zero; quindi se sarà il secondo fattore

$$\frac{h}{x} = 1 \text{ ovvero } \frac{h}{x} < 1,$$

la serie sarà convergente, in contrario divergente.

La serie 3 è comoda per l'estrazione delle radici. Togliendo ad esempio la radice 2^a, avremo $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$; quindi

$$4. \quad \sqrt{x+h} = x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{x} - \frac{1}{8} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^2 + \frac{1}{16} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^3 - \frac{1}{128} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^4 + \dots \right],$$

supponendo che x sia stato scelto in modo che $\sqrt{x}$ sia un numero razionale. Applicando questa formola a $\sqrt{6}$, porremo $x=4$, $h=2$; e così

$$\sqrt{6} = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{128} - \frac{5}{2048} + \dots \right\}.$$

Volendo ottenere una serie che converga più rapidamente, si farà

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2},$$

come risulta dalla serie precedente, limitata al 2° termine. Sarà

$$6 = \left\{ \frac{5}{2} \right\}^2 - \frac{1}{4},$$

quindi $x = \frac{25}{4}$, $h = -\frac{1}{4}$; e dalla serie 4 si avrà

$$\sqrt{6} = \frac{5}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cdot 25} - \frac{1}{8 \cdot 25^2} - \frac{1}{16 \cdot 25^3} - \frac{5}{128 \cdot 25^4} - \dots \right\}.$$

ossia

$$\sqrt{6} = 2,44948 \, 97427.$$

3. Ponendo in fine che m sia un numero negativo, l'equazione 1 darà

$$(x+h)^{-m} = x^{-m} - mx^{-m-1} \cdot h + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} x^{-m-2} h^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{-m-3} h^3 + \dots,$$

ovvero estraendone il fattore x^{-m} ,

$$(x+h)^{-m} = x^{-m} \left\{ 1 - m \frac{h}{x} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \cdot \left\{ \frac{h}{x} \right\}^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^3 + \dots \right\}$$

La convergenza di questa serie dipende ad un tempo da due condizioni, cioè che sia $\frac{h}{x} < 1$, vale a dire $h < x$, e che x non divenga infinitamente piccola, poichè in questo caso x^{-m} non resterebbe quantità finita. Oltretutto la serie reggerà sempre, sia m intero o frazionario.

24.

Serie per $\log(x+h)$.

Qualunque sia la base di un sistema di logaritmi, l'equazione 5 del n° 11 ne dà

$$D^{(n)} \log x = (-1)^{(n-1)} \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot \frac{\log e}{x^n},$$

disegnando con e la base dei logaritmi naturali. Quindi mercè la serie 2 del n° 22 si avrà

$$1. \quad \log(x+h) + \log x + \log e \left[\frac{h}{x} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^2 + \frac{1}{3} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^3 - \frac{1}{4} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^4 + \dots \right]$$

serie che sarà convergente qualunque siano i valori assoluti di x ed h , purchè si abbia $h < x$.

E se h si suppone negativa, sarà

$$2. \quad \log(x-h) = \log x - \log e \left[\frac{h}{x} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^2 + \frac{1}{3} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^3 + \frac{1}{4} \left\{ \frac{h}{x} \right\}^4 + \dots \right].$$

Or se in queste equazioni si muti x in 1, ed h in x , e si

soltragga la seconda dalla prima, si avrà

$$3. \log \frac{1+x}{1-x} = 2 \log e \left\{ x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{7} x^7 + \dots \right\},$$

serie che sarà convergente, quando sarà $x < 1$. E se nell'ultima equazione poniamo $\frac{y}{2x+y}$ in vece di x , x ed y indicando due numeri interi qualunque, ne risulterà

$$4. \quad \log(x+y) = \log x + 2 \log e \left\{ \frac{y}{2x+y} + \frac{y^3}{3(2x+y)^3} + \frac{y^5}{5(2x+y)^5} + \dots \right\}.$$

Le equazioni, da 1 a 4, suppongono che il logaritmo di e sia preso rispetto a ciascuna base a ; logaritmo che si ottiene dall'equazione

$$e = a^{\log e}$$

della quale prendendo i logaritmi naturali si ha

$$1 = \log e. 1a, \text{ quindi } \log e = \frac{1}{1a}.$$

Queste equazioni sono sufficienti per calcolare i logaritmi in qualsivoglia sistema. Ponendo per esempio $x = y = 1$ nell'equazione 4, ne risulta

$$\log 2 = \log e \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right\},$$

ossia $\log 2 = 0,69314\ 71806 \times \log e$.

Similmente per $x = 2$ ed $y = 1$ si ha

$$\log 3 = \log 2 + 2 \log e \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right\}$$

ossia $\log 3 = 1,09861\ 22887 \times \log e$

Ponendo $x = 4$ ed $y = 1$, si ha

$$\log 5 = 1,60943\ 79124 \times \log e,$$

come ancora per $x=6$ ed $y=1$ si ottiene

$$\log 7 = 1,94591\ 01490 \times \log e.$$

I logaritmi dei rimanenti numeri fino a 10, si dedurranno facilmente da quelli che precedono, imperocchè

$$\log 4 = 2.\log 2,$$

$$\log 6 = \log 2 + \log 3,$$

$$\log 8 = 3.\log 2,$$

$$\log 9 = 2.\log 3$$

$$\log 10 = \log 2 + \log 5.$$

$$= 2, 30258\ 50930 \dots \times \log e.$$

Or ponendo la base dei logaritmi $= 10$, sarà $\log 10 = 1$;
e l'ultima equazione ci darà pel logaritmo decimale di e

$$\log e = \frac{1}{2, 30258\ 509\dots} = 0, 43429\ 44819\dots$$

Viceversa pel logaritmo naturale di 10 che indicheremo con L , avremo

$$L10 = 2, 30258\ 50930.$$

Quindi pei logaritmi naturali di 11 e 9, l'equazione 4, essendo $L1 = 0$, ci darà

$$L.11 = L(10+1) = L10 + \frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^2} + \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{4.10^4} + \dots$$

e

$$L.9 = L(10-1) = L10 - \frac{1}{10} + \frac{1}{2.10^2} - \frac{1}{3.10^3} + \frac{1}{4.10^4} - \dots$$

Vale a dire $L11 = 2, 39789\ 52728\dots$

e

$$L9 = 2, 19722\ 45773\dots$$

Pei logaritmi poi degli stessi numeri rispetto alla base 10, avremo

$$\begin{aligned}\log 11 &= \log(10+1) = 1 + \log e \left\{ \frac{1}{10} - \frac{1}{2 \cdot 10^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3 \cdot 10^3} - \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \dots \right\} \\ &= 1, 04139 \ 26852 \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log 9 &= \log(10-1) = 1 - \log e \left\{ \frac{1}{10} + \frac{1}{2 \cdot 10^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \dots \right\} \\ &= 0, 95424 \ 24251 \dots\end{aligned}$$

In simil guisa si ottengono le serie per calcolare i logaritmi delle funzioni trigonometriche. Così rispetto a $\log \operatorname{sen} x$, a modo di esempio, avendosi

$$\begin{aligned}D \log \operatorname{sen} x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \log e, \quad D^{(2)} \log \operatorname{sen} x = - \frac{\log e}{\operatorname{sen}^2 x}, \\ D^{(3)} \log \operatorname{sen} x &= \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \log e, \quad D^{(4)} \log \operatorname{sen} x = - \frac{2 + 4 \cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} \log e \\ &\text{ecc.} \quad \text{ecc.}\end{aligned}$$

sarà

$$\begin{aligned}\log \operatorname{sen}(x+h) &= \log \operatorname{sen} x \\ &+ \log e \left\{ \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} h - \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x} h^2 + \frac{\cos x}{3 \operatorname{sen}^3 x} h^3 - \frac{1 + 2 \cos^2 x}{4 \operatorname{sen}^4 x} h^4 + \dots \right\};\end{aligned}$$

serie convergente per qualunque valore finito di x , purchè sia $h < 1$. E per applicarla porremo $x = a$ ed $h = z - a$; con ciò si ottiene

$$\begin{aligned}\log \operatorname{sen} z &= \log \operatorname{sen} a \\ &+ \log e \left\{ \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} (z-a) - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a} \cdot \frac{(z-a)^2}{2} + \frac{\cos a}{\operatorname{sen}^3 a} \cdot \frac{(z-a)^3}{3} - \dots \right\}\end{aligned}$$

Or facendo $a = \frac{\pi}{2}$ si avrà

$$\log \operatorname{sen} z = - \log e \left\{ \frac{1}{2} (z-a)^2 + \frac{1}{4} (z-a)^4 + \frac{1}{4} (z-a)^6 + \dots \right\}$$

Per $z = \text{arc } 90^\circ, 10'$ è

$$z - a = \text{arc } 90^\circ, 10' - \frac{\pi}{2} = 0,002\ 9088....,$$

quindi

$$\begin{aligned} \log \text{sen } 90^\circ, 10' &= -0,00000\ 42305... \log e \\ &= -0,00000\ 17973, \end{aligned}$$

e poichè il diametro delle tavole è $10''$, si avrà

$$\log. \text{sen } 90^\circ, 10' = 9,99999\ 82027... - 10.$$

25.

Serie per $\text{arctg}(x + h)$

Dalla serie di Taylor, e dall'equazione dell'esempio 2 n° 12

$$D^{(n)} \text{arctg} x = (-1)^{n-1} \cdot 1.2.3...(n-1) \frac{\text{sen } n\varphi}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\text{in cui si è posto } \varphi = \text{arctg } \frac{1}{x},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 1. \quad & \text{arctg}(x + h) = \text{arctg} x \\ & + h \cdot \frac{\text{sen } \varphi}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\text{sen } 2\varphi}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{h^3}{3} \cdot \frac{\text{sen } 3\varphi}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{h^4}{4} \cdot \frac{\text{sen } 4\varphi}{(1+x^2)^{\frac{7}{2}}} \dots \end{aligned}$$

serie che rimane convergente per ogni valore di x , e per ogni valore finito di h . E poichè

$$\varphi = \text{arccotg} x,$$

ed in conseguenza

$$x = \cot \varphi \text{ e } (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{sen } \varphi},$$

così la serie precedente assume ancora la forma

$$2. \operatorname{arctg}(x + h) = \operatorname{arctg} x + h \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi - \frac{h^2}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} 2\varphi \\ + \frac{h^3}{3} \operatorname{sen}^3 \varphi \operatorname{sen} 3\varphi - \frac{h^4}{4} \operatorname{sen}^4 \varphi \operatorname{sen} 4\varphi + \dots$$

Cercando, per esempio, l'arco la cui tangente sia cento volte maggiore del raggio, si troverà non differire che di pochi secondi in più dall'arco $89^\circ 25'$; supponendo però, come sempre, che le espressioni $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arc} \operatorname{sen} z$, ecc. disegnino l'arco minimo, la cui tangente, il seno ecc. sia eguale a z . Or abbiamo

$$\operatorname{tg} 89^\circ, 25' = 98,21794 = x,$$

quindi

$$100 - 98,21794 = 1,78206 = h.$$

Con questi valori l'equazione 2 ci darà per espressione dell'arco in angolo

$$\operatorname{arctg}(100) = 98^\circ 25' + 38,0996 - 0,6912 + 0,0125 \\ - 0,0002 \text{ secondi} \\ = 98^\circ 25' 37'', 421$$

Le equazioni 1 e 2 valgono ancora per $x = 0$ ed $h < 1$, imperocchè questi valori conservano la convergenza della serie, mentre nell'ipotesi di $x = 0$ da

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \text{ segue } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Mercè questi valori e sostituendo z ad h , l'equazione 1 o 2 si trasforma in

$$3. \operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \dots,$$

nella quale ponendo $z = 1$ ne risulta la serie leibniziana per $\frac{\pi}{4}$, cioè

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots$$

serie che converge assai lentamente, ancorchè si riducessero sempre due termini in un solo, cosicchè ne risulti

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \dots$$

Volendo applicare la serie 3 al calcolo di π , si porrà

$$\frac{\pi}{4} = a + b,$$

quindi

$$\operatorname{tg}(a + b) = 1 = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

e mercè quest'ultima equazione si cercheranno per $\operatorname{tg} a$ e $\operatorname{tg} b$ due frazioni vere razionali.

Ponendo $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$, si avrà $\operatorname{tg} b = \frac{1}{3}$; quindi dall'equazione 3 risulterà

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(a + b) = \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} - \frac{3}{3.3^3} + \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^7} + \dots \\ &+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.3^3} - \frac{1}{7.3^7} + \dots \end{aligned}$$

Calcolando i termini di questa doppia serie fino alla 15^a cifra decimale, si ottiene

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793 \dots$$

Da questo valore risulta per lunghezza dell'arco di un grado, di un minuto, di un secondo

$$\operatorname{arc} 1^\circ = 0,01745\ 32925\ 20 \dots$$

$$\operatorname{arc} 1' = 0,00029\ 08882\ 09 \dots$$

$$\operatorname{arc} 1'' = 0,00000\ 48481\ 37 \dots$$

Serie per $\text{sen}(x + h)$ e $\cos(x + h)$.

Poichè dall'equazione 7 del n° 11 si ha

$$D^{(n)} \text{sen } x = \text{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

così la serie di Taylor ci dà per $\text{sen}(x + h)$:

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{sen}(x + h) = \text{sen } x + h \cos x - \frac{h^2}{1.2} \text{sen } x - \frac{h^3}{1.2.3} \cos x \\ + \frac{h^4}{1.2.3.4} \text{sen } x + \dots \end{aligned}$$

E similmente, per essere

$$D^{(n)} \cos x = \cos\left\{x + \frac{n\pi}{2}\right\},$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \cos(x + h) = \cos x - h \text{sen } x - \frac{h^2}{1.2} \cos x + \frac{h^3}{1.2.3} \text{sen } x \\ + \frac{h^4}{1.2.3.4} \cos x - \dots \end{aligned}$$

Qualunque sia x e qualsivoglia valore finito abbia h , queste due serie saranno sempre convergenti.

Ponendovi $x = 0$ ed $h = z$, si avranno due serie esprimenti $\text{sen } z$ e $\cos z$, cioè

$$3. \quad \text{sen } z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.....7} + \dots$$

$$4. \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.....6} + \dots$$

Per ottenere l'esatto significato delle serie da 1 a 4, è da considerarsi che $\text{sen}(x + h)$, $\cos(x + h)$, $\text{sen } x$ e $\cos x$ indicano parti del raggio, ma che h nel 2° membro dell'equazione significa parte della circonferenza. Queste eterogenee quan-

tità debbono dunque ridursi ad essere omogenee. Nell'ipotesi di $z = 1''$, l'equazione 3, nella quale s'intenda per z la lunghezza dell'arco di $1''$, ci darà mercè un facile calcolo

$$\text{sen } 1'' = 0,00000\ 48481\ 37...,$$

valore, che comparato a quello di $\text{sen } 1''$, ci dimostra che fino alla 12^a decimale si ha esattamente $\text{arc } 1'' = \text{sen } 1''$. Estendendo il calcolo a maggior numero di cifre, si trova che la differenza comincia primieramente a mostrarsi nella 13^a decimale.

Perciò volendo esprimere un certo numero di secondi in parti del raggio, bisognerà moltiplicarlo per $\text{arc } 1''$ o per $\text{sen } 1''$; e viceversa se si voglia trasformare una frazione di raggio in secondi, farà d'uopo dividerla per $\text{arc } 1''$, ossia moltiplicarla per

$$\frac{1}{0,0''4848...} = 206264, 806247.$$

Quindi bisognerà scrivere le serie 3 e 4 nel seguente modo:

$$\text{sen } z = z \text{sen } 1'' - \frac{(z \text{sen } 1'')^3}{1.2.3} + \frac{(z \text{sen } 1'')^5}{1.2.3.4.5} - + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{(z \text{sen } 1'')^2}{1.2} + \frac{(z \text{sen } 1'')^4}{1.2.3.4} - + \dots$$

Lo stesso sarà delle equazioni 1 e 2, non che delle serie 1, 2 e 3 del n° precedente.

Le serie 1 e 2 possono servire per calcolare $\text{sen}(x + h)$ e $\cos(x + h)$, quando siano noti $\text{sen } x$ e $\cos x$. Così per mezzo di $\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ si trova

$$\text{sen } 45^\circ 1' = 0,70731\ 24403....$$

$$\cos 45^\circ 1' = 0,70690\ 10622....$$

Ma le serie 3 e 4 danno i valori dei seni e coseni di tutti gli angoli da 0° a 90° , quando si sostituisca $m.90^\circ$ a z , cosicchè

m resti sempre frazione vera, e si calcoli il valore di $\left\{m \frac{\pi}{2}\right\}^a$ per ogni numero intero assoluto. In tal modo si otterranno l'equazioni

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(m.90^\circ) &= 1, 57079 \ 63268..... m \\ &- 0, 64596 \ 40975..... m^3 \\ &+ 0, 07969 \ 26262 .. m^5 \\ &- 0, 00468 \ 17541 .. m^7 \\ &+ 0, 00016 \ 04412 .. m^9 \\ &- 0, 00000 \ 35088 .. m^{11} \\ &+ 0, 00000 \ 00569 .. m^{13} \\ &- 0, 00000 \ 00007 .. m^{15} \\ \cos(m.90^\circ) &= 1 - 1, 23370 \ 05501 .. m^2 \\ &+ 0, 25366 \ 95079 .. m^4 \\ &- 0, 02086 \ 34808 .. m^6 \\ &+ 0, 00091 \ 92603 .. m^8 \\ &- 0, 00002 \ 52020 .. m^{10} \\ &+ 0, 00000 \ 04711 .. m^{12} \\ &- 0, 00000 \ 00064 .. m^{14} \\ &+ 0, 00000 \ 00001 .. m^{16}. \end{aligned}$$

La serie 3, ossia

$$\operatorname{sen} z = z \left\{ 1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - + \dots \right\},$$

diviene eguale a zero, quando z prende i valori $0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots$ ovvero i valori $0, -\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$ ed in generale se in vece di z si ponga $n\pi$, n disegnando ogni numero intero positivo o negativo. Questi valori son dunque da considerarsi quali radici dell'equazione

$$0 = 1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - + \dots;$$

donde nell'ipotesi di $z = \frac{1}{y}$ risulta l'equazione

$$0 = y^n - \frac{y^{n-2}}{2.3} + \frac{y^{n-4}}{2.3.4.5} - + \dots$$

*

le cui radici saranno

$$\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots, -\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{3\pi}, \dots$$

Quindi

$$\begin{aligned} y^n &= \frac{y^{n-2}}{2 \cdot 3} + \frac{y^{n-4}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \\ &= \left\{y - \frac{1}{\pi}\right\} \left\{y + \frac{1}{\pi}\right\} \left\{y - \frac{1}{2\pi}\right\} \left\{y + \frac{1}{2\pi}\right\} \dots \end{aligned}$$

ovvero, dividendo per y^n e riunendo a due a due i fattori contigui del 2° membro,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2 \cdot 3 y^2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 y^4} + \dots \\ &= \left\{1 - \frac{1}{\pi^2 y^2}\right\} \left\{1 - \frac{1}{4 \pi^2 y^2}\right\} \left\{1 - \frac{1}{9 \pi^2 y^2}\right\} \dots \end{aligned}$$

Introducendo dinuovo in questa equazione la z , si ha

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \\ &= \left\{1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right\} \left\{1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right\} \left\{1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right\} \dots \end{aligned}$$

e con ciò

$$5. \quad \operatorname{sen} z = z \left\{1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right\} \left\{1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right\} \left\{1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right\} \dots$$

Similmente si avrà

$$6. \quad \cos z = z \left\{1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right\} \left\{1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right\} \left\{1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right\}$$

Queste equazioni 5 e 6 sono assai utili pel calcolo dei logaritmi di $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$. Ed oltracciò la prima per $z = \frac{\pi}{2}$ ci dà l'espressione

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \dots$$

Serie di Stirling.

Nell' ipotesi che Fx non cessi di esser continua per $x=0$, la serie di Taylor, scambiandovi h con x , ci darà

$$1. \quad Fx = F0 + \frac{x}{1} F'0 + \frac{x^2}{1.2} F''0 + \frac{x^3}{1.2.3} F'''0 + \dots \\ + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} F^{(n)}0 + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots n} F^{(n+1)}(\Delta x).$$

E poichè (n° 16) le derivate $F'0, F''0, F'''0, \dots$ sono continue quando lo sia $F0$, così la serie precedente convergerà in conseguenza degli stessi principii che reggono la convergenza di quella di Taylor. In questo caso potrà trascurarsi il termine residuo, e si avrà la serie di Stirling,

$$2. \quad Fx = F0 + \frac{x}{2} F'0 + \frac{x^2}{2.3} F''0 + \frac{x^3}{1.2.3} F'''0 + \dots$$

così denominata dal nome del suo inventore.

Questa serie somministra il mezzo di svolgere tra i limiti di continuità una funzione di x in una serie infinita di termini. E già nei num. 25 e 26 si è dato lo svolgimento di $\arctg x$, $\sen x$, $\cos x$.

Rispetto alle funzioni a^x , e^x , $\sen x$ e $\cos x$ abbiamo

$$D^{(n)}a^x = a^x \ln a, \quad D^{(n)}e^x = e^x$$

$$D^{(n)}\sen x = \sen\left\{x + \frac{n\pi}{2}\right\}, \quad D^{(n)}\cos x = \cos\left\{x + \frac{n\pi}{2}\right\}.$$

Or ponendo $x=0$ in queste quattro espressioni ne risulta

$$D^{(n)}a^x = \ln a, \quad D^{(n)}e^x = 1$$

$$D^{(n)}\sen x = \sen\frac{n\pi}{2}, \quad D^{(n)}\cos x = \cos\frac{n\pi}{2},$$

quindi il termine generale della serie di Stirling per queste

quattro funzioni sarà ordinatamente

$$\frac{x^n l^n a}{1.2.3\dots n}, \frac{x^n}{1.2.3\dots n}, \frac{x^n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{1.2.3\dots n}, \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{2}}{1.2.3\dots n}.$$

Veramente $D^{(n)}a^x$ aumenta di valore col crescere di n e può ancora divenire infinitamente grande, mentre la derivata n^{esima} delle tre altre funzioni rimane finita. Ma il termine generale della prima funzione mostra (n° 22) il contrassegno della convergenza; quindi la serie

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} l a + \frac{x^2}{1.2} l^2 a + \frac{x^3}{1.2.3} l^3 a + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2\dots 7} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\dots 6} + \dots$$

valgono per ogni valore finito di x .

E. Variabile immaginaria.

28.

Serie di Taylor e di Stirling per una variabile immaginaria.

Se per Fx , funzione di una variabile reale x , regga l'equazione

$$Fx = \varphi x + \sqrt{-1} \psi x,$$

e che Fx sia continua tra due limiti, dovranno esserlo ancora le funzioni φx e ψx . Quindi avrà luogo l'equazione

$$\frac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi x}{\Delta x} + \sqrt{-1} \cdot \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi x}{\Delta x},$$

la quale, passando al limite col continuo decrescere di Δx fino a cangiarsi in dx , si trasformerà in

$$\frac{F(x + dx) - Fx}{dx} = \frac{\varphi(x + dx) - \varphi x}{dx} + \sqrt{-1} \cdot \frac{\psi(x + dx) - \psi x}{dx}.$$

ossia

$$1. \quad F'x = \varphi'x + \sqrt{-1} \cdot \psi'x;$$

donde

$$2. \quad F'x \cdot dx = \varphi'x \cdot dx + \sqrt{-1} \cdot \psi'x \cdot dx.$$

Or poniamo che in Fx la variabile x sia essa stessa un numero complesso, vale a dire che sia

$$x = \alpha + \beta \sqrt{-1}, \text{ ovvero } x = (a + b\sqrt{-1})z$$

α e b indicando costanti e z una variabile. In questo caso si potrà sempre stabilire l'equazione

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t),$$

indicando con t la costante e con r , denominata modulo, la variabile, dimodochè sarà

$$\alpha = r \cos t, \quad \beta = r \sin t,$$

ed in conseguenza

$$r = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \text{ e } t = \arctg \frac{\beta}{\alpha}.$$

Con ciò Fx ossia $F[r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)]$ prenderà la forma di numero complesso, le cui parti sono funzioni di r ; e ne risulterà l'equazione

$$F[r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)] = \varphi r + \sqrt{-1} \psi r.$$

Or se Fx è continua rispetto ad x , pel valore di questa variabile sarà continua anche rispetto ad r ; e questa proprietà dovendosi estendere ancora alle funzioni φr e ψr , ne segue che se Fx è continua tra i limiti x_1 ed x_2 , e che abbiano luogo le equazioni

$$x_1 = r_1(\cos t + \sqrt{-1} \sin t), \quad x_2 = r_2(\cos t + \sqrt{-1} \sin t)$$

le funzioni φr e ψr resteranno continue tra i limiti r_1 ed r_2 .

Supponendo che Fx resti continua per $x=0$ e quindi per $r=0$, anche i valori $\varphi(0)$ e $\psi(0)$ giaceranno tra i limiti di continuità r_1 ed r_2 , e le due funzioni φr e ψr potranno svolgersi secondo la serie di Stirling. Quindi si avrà

$$\begin{aligned} \varphi r &= \varphi 0 + \frac{r}{1} \varphi' 0 + \frac{r^2}{1 \cdot 2} \varphi'' 0 + \dots \\ &\quad + \frac{r^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^{(n)} 0 + \frac{r^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^{(n+1)}(\Delta_1 r) \\ \psi r &= \psi 0 + \frac{r}{1} \psi' 0 + \frac{r^2}{1 \cdot 2} \psi'' 0 + \dots \\ &\quad + \frac{r^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \psi^{(n)} 0 + \frac{r^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \psi^{(n+1)}(\Delta_2 r), \end{aligned}$$

Δ_1 e Δ_2 indicando frazioni vere. Or se la seconda di queste due equazioni si moltiplichi per $\sqrt{-1}$ ossia per i , e poi si aggiunga alla prima, risulterà

$$\begin{aligned} 3. \quad \varphi r + i\psi r &= \varphi 0 + i\psi 0 + \frac{r}{1} (\varphi' 0 + i\psi' 0) \\ &\quad + \frac{r^2}{1 \cdot 2} (\varphi'' 0 + i\psi'' 0) + \dots + \frac{r^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (\varphi^{(n)} 0 + i\psi^{(n)} 0) \\ &\quad + \frac{r^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} [\varphi^{(n+1)}(\Delta_1 r) + i\psi^{(n+1)}(\Delta_2 r)]. \end{aligned}$$

Ma differenziando successivamente l'equazione

$$F[r(\cos t + i \sin t)] = \varphi r + i\psi r,$$

si ottengono

$$\begin{aligned}(\cos t + i \sin t) \cdot F'[r(\cos t + i \sin t)] &= \varphi' r + i \psi' r \\(\cos t + i \sin t)^2 \cdot F''[r(\cos t + i \sin t)] &= \varphi'' r + i \psi'' r,\end{aligned}$$

ed in generale

$$(\cos t + i \sin t)^n F^{(n)}[r(\cos t + i \sin t)] = \varphi^{(n)} r + i \psi^{(n)} r;$$

dove nell'ipotesi di $r = 0$ risultano

$$\begin{aligned}F0 &= \varphi 0 + i \psi 0 \\(\cos t + i \sin t) F'0 &= \varphi' 0 + i \psi' 0 \\(\cos t + i \sin t)^2 F''0 &= \varphi'' 0 + i \psi'' 0 \\(\cos t + i \sin t)^n F^{(n)}0 &= \varphi^{(n)} 0 + i \psi^{(n)} 0.\end{aligned}$$

Si ha ancora in generale

$$r^n = \frac{x^n}{(\cos t + i \sin t)^n};$$

ed introducendo tutti questi valori nell'equazione 3, ne risulta

$$\begin{aligned}Fx &= F0 + \frac{x}{1} F'0 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''0 + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} F^{(n)}0 \\&+ \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{\varphi^{(n+1)}(\Delta_1 r) + i \psi^{(n+1)}(\Delta_1 r)}{(\cos t + i \sin t)^{n+1}}\end{aligned}$$

Il termine residuo di quest'ultima equazione assumerà una forma più semplice, ove si consideri che mercè le equazioni ottenute nell'esempio 2 del n° 12 si ha

$$(\cos t + i \sin t)^{n+1} = \cos(n+1)t + i \sin(n+1)t,$$

che

$$\frac{1}{\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t} = \cos(n+1)t - i \sin(n+1)t,$$

e che in conseguenza

$$\frac{\varphi^{(n+1)}(\Delta_1 r) + i \psi^{(n+1)}(\Delta_1 r)}{(\cos t + i \sin t)^{n+1}}.$$

ossia

$$[\varphi^{(n+1)}(\Delta_1 r) + i \psi^{(n+1)}(\Delta_2 r)] [\cos(n+1)t - i \sin(n+1)t],$$

riceve la forma $K_1 + i K_2$. Con ciò l'equazione relativa a Fx sarà trasformata in

$$4. Fx = F0 + \frac{x}{1} F'0 + \frac{x^2}{1.2} F''0 + \dots + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} F^{(n)}0 + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots n} (K_1 + i K_2).$$

Ponendo $f(z+x)$ in vece di Fx , dimodochè z resti indipendente da x , $F0$ si cambierà in fz , $F^{(n)}0$ in $f^{(n)}z$, e stabilendo la relazione

$$f[z + r(\cos t + i \sin t)] = \varphi(z+r) + i \psi(z+r),$$

$$\varphi(\Delta_1 r) \text{ si muterà in } \varphi(z + \Delta_1 r) \text{ e } \psi(\Delta_2 r) \text{ in } \psi(z + \Delta_2 r);$$

e così dall'equazione 4 si avrà

$$f(z+x) = fz + \frac{x}{1} f'z + \frac{x^2}{1.2} f''z + \dots + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} f^{(n)}z + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots n} (L_1 + i L_2)$$

L_1 ed L_2 indicando quantità dipendenti da $\varphi(z + \Delta_1 r)$ e $\psi(z + \Delta_2 r)$. Mutando in fine il simbolo f in F , la variabile z in x ed x in h , la serie equivalente a $f(z+x)$ si trasmuterà in

$$5. F(x+h) = Fx + \frac{h}{1} F'x + \frac{h^2}{1.2} F''x + \dots + \frac{h^n}{1.2.3\dots n} F^{(n)}x + \frac{h^{n+1}}{1.2.3\dots n} (L_1 + i L_2).$$

L'equazione 5 comparata coll'equazione 3 del n° 21, e l'equazione 4 coll'equazione 1 del n° 27, dimostrano che quelle serie valgono ancora nell'ipotesi di x numero complesso.

Quanto poi alla convergenza di queste serie nel caso che x abbia un'espressione complessa, essa avrà luogo se la legge di convergenza sarà soddisfatta dai termini generali

$$\frac{r^n}{1.2.3\dots n} \varphi^{(n)} 0, \quad \frac{r^n}{1.2.3\dots n} \psi^{(n)} 0$$

delle già ottenute serie per φr e ψr , ovvero dai termini generali

$$\frac{\rho^n}{1.2.3\dots n} \varphi^{(n)} r, \quad \frac{\rho^n}{1.2.3\dots n} \psi^{(n)} r$$

delle serie $\varphi(r + \rho)$ e $\psi(r + \rho)$ da svolgersi secondo le potenze di ρ , e per le quali sta l'equazione

$$\begin{aligned} F(x + h) &= F(r + \rho)(\cos t + i \sin t) \\ &= \varphi(r + \rho) + i \psi(r + \rho); \end{aligned}$$

vale a dire se le radici n^{ime} di questi termini generali si approssimeranno ad una frazione vera, a misura che n andrà crescendo. In questo caso dunque si potrà scrivere

$$6. \quad Fx = F0 + \frac{x}{1} F'0 + \frac{x^2}{1.2} F''0 + \frac{x^3}{1.2.3} F'''0 + \dots$$

$$7. \quad F(x + h) = Fx + \frac{h}{1} F'x + \frac{h^2}{1.2} F''x + \frac{h^3}{1.2.3} F'''x + \dots,$$

cosicchè le serie di Stirling e di Taylor valgono ancora per una variabile complessa o immaginaria; ed in conseguenza le quattro equazioni, stabilite verso la fine del n° 27 rispetto alle funzioni a^x , e^x , $\cos x$, $\sin x$, reggeranno per ogni modulo r della variabile complessa x , se le dette funzioni restino continue pei moduli r_1 ed r_2 , e si abbia $r_2 > r > r_1$.

Serie per e^{ix} ed e^{-ix} .

Nella serie

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

la quale regge per ogni valore reale o complesso di x , si ponga $\sqrt{-1} \cdot x$, ossia ix invece di x , si avrà

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{1.2} + \frac{i^3 x^3}{1.2.3} + \frac{i^4 x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Ma considerando che per ogni valore intero e positivo di n , dovranno aver luogo le relazioni

$$i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, i^{4n+4} = +1,$$

così l'equazione precedente si trasformerà in

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2...6} + \dots + i \left\{ x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2...7} + \dots \right\}$$

Or la prima serie di quest'equazione essendo (n° 27) identica alla serie di $\cos x$, e la seconda a quella di $\sin x$, avremo

$$1. \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Similmente si avrà, sostituendo $-ix$ a $+ix$,

$$2. \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Queste equazioni 1 e 2 danno, mercè addizione e sottrazione,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$3. \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

ed esse contengono le proprietà goniometriche delle funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Moltiplicando p. e. l'una per l'altra le equazioni

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \operatorname{sen} x \\ e^{iy} &= \cos y + i \operatorname{sen} y, \end{aligned}$$

si avrà

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ &\quad + i(\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y). \end{aligned}$$

Or sostituendo $x + y$ ad x nell'equazione 1, questa ci darà immediatamente

$$4. \quad e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y)$$

E se in queste due espressioni del valore di $e^{i(x+y)}$ pareremo da un lato le quantità reali, e dall'altro le immaginarie, avremo le due note equazioni

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \\ \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x. \end{aligned}$$

30.

Formola di Moivre.

Sostituendo nell'equazione 4 del n° precedente $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1}$ ad y , si avrà

$$\begin{aligned} e^{i(x+x_1+x_2+\dots+x_{n-1})} &= \cos(x+x_1+x_2+\dots+x_{n-1}) \\ &\quad + i \operatorname{sen}(x+x_1+x_2+\dots+x_{n-1}), \end{aligned}$$

ovvero se pongasi $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x$,

$$e^{inx} = \cos nx + i \operatorname{sen} nx.$$

Ma è

$$e^{i(x+x_1+x_2+\dots+x_{n-1})} = e^{ix} \cdot e^{ix_1} \cdot e^{ix_2} \dots e^{ix_{n-1}};$$

sarà dunque

$$1. \quad (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

risultamento identico a quello ottenuto nell'esempio 2 del n° 12.

Si può nell'equazione 1 del n° precedente sostituire $\frac{n}{m}x$ ad x , cosicchè ne risulta

$$e^{i \frac{n}{m} x} = \cos x + i \sin \frac{n}{m} x,$$

m ed n indicando numeri reali ed interi. Ma dalla precedente equazione 1 si ha

$$\left\{ \cos \frac{n}{m} x + i \sin \frac{n}{m} x \right\}^m = \cos m \frac{n}{m} x + i \sin m \frac{n}{m} x \\ = \cos nx + i \sin nx,$$

ossia

$$\left\{ \cos \frac{n}{m} x + i \sin \frac{n}{m} x \right\}^m = (\cos x + i \sin x)^n,$$

ed estraendone la radice m^{esima} ,

$$\cos \frac{n}{m} x + i \sin \frac{n}{m} x = \sqrt[m]{(\cos x + i \sin x)^n};$$

così dall'equazione

$$\sqrt[m]{(\cos x + i \sin x)^n} = (\cos x + i \sin x)^{\frac{n}{m}}$$

risulta

$$2. \quad (\cos x + i \sin x)^{\frac{n}{m}} = \cos \frac{n}{m} x + i \sin \frac{n}{m} x.$$

Si ponga per analogia ai numeri reali l'equazione

$$(\cos x + i \sin x)^{-n} = \frac{1}{(\cos x + i \sin x)^n},$$

si avrà

$$\frac{1}{(\cos x + i \sin x)^n} = \frac{1}{\cos nx + i \sin nx} \\ = \cos nx - i \sin nx.$$

E poichè $\cos nx = \cos(-n)x$, e $-\sin nx = \sin(-n)x$, sarà

$$3. \quad (\cos x + i \sin x)^{-n} = \cos(-n)x + i \sin(-n)x.$$

Comparando le equazioni 2 e 3 coll'equazione 1 si rileva che questa reggerà per ogni valore di n , intero o fratto, assoluto o relativo. Questa equazione 1 costituisce la formola di Moivre.

E poichè essa regge anche per un valore negativo di x , così si ottiene finalmente

$$4. \quad (\cos x - i \sin x)^n = \cos nx - i \sin nx.$$

La formola di Moivre, non altrimenti che l'introduzione degl'immaginarii in generale, è di una speciale importanza. Imperocchè l'equazione 1 dimostra che la legge fondamentale delle potenze con esponenti reali vale ancora per gli esponenti immaginarii, essendochè qualunque sia n sarà sempre soddisfatta l'equazione

$$(e^{ix})^n = e^{inx},$$

e dimostra ancora che la moltiplicazione ed elevazione a potenze per espressioni della forma

$$\cos x + i \sin x$$

si riduce ad addizione e moltiplicazione. Altri vantaggi che la stessa formola può produrre, saranno esposti nel n° seguente.

Serie per $\cos nx$ e $\sin nx$.

Dalle equazioni 1 e 4 del n° precedente si avranno per mezzo di addizione e sottrazione

$$\begin{aligned} 2 \cos nx &= (\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n \\ 2 i \sin nx &= (\cos x + i \sin x)^n - (\cos x - i \sin x)^n. \end{aligned}$$

Svolgendo le potenze che si contengono in queste due equazioni e facendone le debite riduzioni si troverà

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos nx &= \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1. 2} \cos^{n-2} x \sin^2 x \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1. 2. 3. 4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - + \dots \\ \sin nx &= \frac{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x \\ &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1. 2. 3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots \end{aligned}$$

Queste equazioni reggono per ogni valore di n , intero o fratto, assoluto o relativo. Ma se n sia frazionario o negativo, esse saranno sottoposte alla legge di convergenza della formula del binomio. A tal uopo estraendone il fattore $\cos^n x$, esse prenderanno la forma

$$\begin{aligned} \cos nx &= \cos^n x \left\{ 1 - \frac{n(n-1)}{1. 2.} \operatorname{tg}^2 x \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1. 2. 3. 4} \operatorname{tg}^4 x - + \dots \right\} \\ \sin nx &= \cos^n x \left\{ \frac{n}{1} \operatorname{tg} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1. 2. 3} \operatorname{tg}^3 x \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1) \dots (n-4)}{1. 2. 3. 4. 5} \operatorname{tg}^5 x - + \dots \right\} \end{aligned}$$

e poichè in queste equazioni si richiede $\operatorname{tg} x < 1$, così esse saranno utili per valori di x compresi tra $+\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$.

Per esprimere le potenze del coseno per mezzo di quelle del seno, quando n è un numero positivo, bisogna sostituire $1 - \operatorname{sen}^2 x$ a $\cos^2 x$, e svolgere ciascuna potenza del coseno. Così, se n è un numero pari, si avrà

$$\begin{aligned}\cos nx &= 1 - \frac{n}{1} \left\{ \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \right\} \operatorname{sen}^2 x \\ &+ \frac{n(n-2)}{1 \cdot 2} \left\{ \frac{(n-1)(n-3)}{2 \cdot 4} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \right\} \operatorname{sen}^4 x - + \dots \\ \sin nx &= \cos x \left[\frac{n}{1} \operatorname{sen} x - \frac{n(n-2)}{1 \cdot 3} \left\{ \frac{n-1}{2} + \frac{3}{2} \right\} \operatorname{sen}^3 x \right. \\ &\left. + \frac{n(n-2)(n-4)}{1 \cdot 3 \cdot 5} \left\{ \frac{(n-1)(n-3)}{2 \cdot 4} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} \right\} \operatorname{sen}^5 x \dots \right]\end{aligned}$$

ovvero, vieppiù contraendo,

$$\begin{aligned}2. \quad \cos nx &= 1 - \frac{n^2}{1 \cdot 2} \operatorname{sen}^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \operatorname{sen}^4 x \\ &- \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \operatorname{sen}^6 x + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin nx &= \cos x \left[\frac{n}{1} \operatorname{sen} x - \frac{n(n^2-1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \operatorname{sen}^3 x \right. \\ &\left. + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \operatorname{sen}^5 x - + \dots \right]\end{aligned}$$

Se poi n è un numero dispari, allora dalle equazioni 1 si avrà

$$\begin{aligned}\cos nx &= \cos x \left[1 - \frac{n-1}{1} \left\{ \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right\} \operatorname{sen}^2 x \right. \\ &\left. + \frac{(n-1)(n-3)}{1 \cdot 3} \left\{ \frac{n(n-2)}{2 \cdot 4} + \frac{n}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \right\} \operatorname{sen}^4 x - + \dots \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} nx &= \frac{n}{1} \operatorname{sen} x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 3} \left\{ \frac{n-2}{2} + \frac{3}{2} \right\} \operatorname{sen}^3 x \\ &+ \frac{n(n-1)(n-3)}{1 \cdot 3 \cdot 5} \left\{ \frac{(n-2)(n-4)}{2 \cdot 4} + \frac{n-2}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} \operatorname{sen}^5 x - + \dots \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} 3. \quad \cos nx &= \cos x \left\{ 1 - \frac{n^2 - 1^2}{1 \cdot 3} \operatorname{sen}^2 x \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \operatorname{sen}^4 x - + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} nx &= \frac{n}{1} \operatorname{sen} x - \frac{n(n^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \operatorname{sen}^3 x \\ &+ \frac{n(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \operatorname{sen}^5 x - + \dots \end{aligned}$$

La prima delle equazioni 2 dà per $n=2$, $n=4$, $n=6$:

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 4x = 1 - 8 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen}^4 x$$

$$\cos 6x = 1 - 18 \operatorname{sen}^2 x + 48 \operatorname{sen}^4 x - 32 \operatorname{sen}^6 x,$$

e la seconda delle equazioni 3 dà per $n=1$, $n=3$, $n=5$:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$$

$$\operatorname{sen} 5x = 5 \operatorname{sen} x - 20 \operatorname{sen}^3 x + 16 \operatorname{sen}^5 x.$$

32.

Serie per $\cos^n x$ e $\operatorname{sen}^n x$.

Ponendo per brevità

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = u, \quad \cos x - i \operatorname{sen} x = v,$$

si avrà

$$2 \cos x = u + v, \quad 2i \operatorname{sen} x = u - v;$$

quindi per $(u + v)^n$ e $(u - v)^n$

$$2^n \cos^n x = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-2} v^2 + \dots + nuv^{n-1} + v^n.$$

$$2^n i^n \sin^n x = u^n - nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-2} v^2 + \dots \pm nuv^{n-1} \mp v^n.$$

Or essendo

$$u^n + v^n = 2 \cos nx, \quad u^n - v^n = 2 i \sin nx, \quad uv = 1,$$

si avrà, nell'ipotesi di n pari, mercè una facile riduzione

$$2^{n-1} \cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1} \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)x + \dots + \frac{n(n-1) \dots \frac{n}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \left\{ \frac{n}{2} - 1 \right\}} \cos 2x + \frac{1}{2} \frac{n(n-1) \dots \left\{ \frac{n}{2} + 1 \right\}}{1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}}$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \sin^n x = \cos nx - \frac{n}{1} \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)x - \dots + \frac{n(n-1) \dots \frac{n}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \left\{ \frac{n}{2} - 1 \right\}} \cos 2x \mp \frac{1}{2} \frac{n(n-1) \dots \left\{ \frac{n}{2} + 1 \right\}}{1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}}$$

Similmente per n impari

$$2^{n-1} \cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1} \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)x + \dots + \frac{n(n-1) \dots \frac{n+1}{2}}{1 \cdot 2 \dots \frac{n-1}{2}} \cos x.$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \sin^n x = \sin nx - \frac{n}{1} \sin(n-2)x + \frac{n(n-2)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)x + \dots + \frac{n(n-1) \dots \frac{n+1}{2}}{1 \cdot 2 \dots \frac{n-1}{2}} \sin x.$$

*

Quindi è

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2},$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

$$\sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

ecc. ecc.

33.

Fattori di $x^n \pm 1$.

Le radici dell'equazione

$$x^n = 1$$

possono in generale esser reali o immaginarie; quindi potremo rappresentarle con

$$x = r(\cos t + i \sin t),$$

dimodochè sarà

$$x^n = 1 = r^n (\cos t + i \sin t)^n,$$

ossia

$$1 = r^n (\cos nt + i \sin nt).$$

Rappresentando con k qualsivoglia valore positivo o negativo, non eccettuato lo zero, l'ultima equazione resterà soddisfatta ponendovi

$$r = 1 \text{ ed } nt = \pm 2k\pi,$$

imperocchè con questi valori si avrà

$$r^n = 1, \cos(\pm 2k\pi) = 1 \text{ e } \sin(\pm 2k\pi) = 0.$$

Ma ponendo $nt = \pm 2k\pi$, si ha $t = \pm \frac{2k\pi}{n}$, ed in conseguenza

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

Or per trovare tutti i valori di k che possono dare un nuovo valore alla radice x , supporremo primieramente k positiva, ed avremo

$$\text{per } k = 0 \text{ e } k = n: \quad x = 1$$

$$k = 1 \text{ e } k = n + 1: \quad x = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2 \text{ e } k = n + 2: \quad x = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}$$

.

$$k = n - 1 \text{ e } k = 2n - 1: \quad x = \cos \frac{n(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$$

Lo stesso avverrà per ogni coppia di valori positivi di k , i quali differiscano tra essi di n . Laonde come valori positivi di k non si hanno che gli n valori differenti 0, 1, 2, 3, ... $n - 1$.

Se poniamo k negativa, facciamo p. e. $k = -h$, si avrà

$$x = \cos \left\{ -\frac{2h\pi}{n} \right\} + i \sin \left\{ -\frac{2h\pi}{n} \right\},$$

ossia

$$x = \cos \frac{2h\pi}{n} - i \sin \frac{2h\pi}{n};$$

e due valori di $-h$, che abbiano la differenza n , daranno per x due valori eguali.

Pongasi infine $k = n - h$. Nell'ipotesi di h positiva e mi-

nore di n : ne risulterà

$$x = \cos \frac{2h\pi}{n} - i \sin \frac{2h\pi}{n},$$

valore identico a quello ottenuto per $k = -h$. Donde si rileva che ponendo a vicenda

$$k = +1, +2, \dots, +(n-2), +(n-1) \\ \text{e } k = -(n-1), -(n-2), \dots, -2, -1$$

si ottengono gli stessi valori per la radice x , e che in conseguenza la metà dei valori precedenti, presi positivamente e negativamente, somministrerà tutti i valori di x . Perciò dando a $2k$ tutti i valori pari compresi tra 0 ed n , le radici dell'equazione

$$x^n = 1$$

saranno rappresentate da

$$1. \quad x = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

L'equazione più generale

$$x^{\frac{n}{m}} = 1$$

può ridursi alla precedente; imperocchè questa dando per la n^{esima} radice di $+1$ il valore

$$\sqrt[n]{+1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

ne risulta

$$(+1)^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{+1})^m = [(+1)^{\frac{1}{n}}]^m;$$

ed in conseguenza le radici dell'equazione

$$x^{\frac{n}{m}} = 1$$

avranno la forma

$$x = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n} \mp i \sin \frac{2k\pi}{n} \right\}^m$$

ovvero

$$2. \quad x = \cos \frac{2km}{n} \pi \mp i \sin \frac{2km}{n} \pi,$$

dando a k lo stesso significato precedente.

Similmente l'equazione

$$x^n = a$$

ha le radici

$$3. \quad x = a^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n} \mp i \sin \frac{2k\pi}{n} \right\},$$

per ogni valore intero o fratto di n e per ogni numero pari $2k$ compreso tra zero ed n .

Rispetto all'equazione

$$x^n = -1$$

si ha come condizione delle radici l'altra

$$-1 = r^n (\cos nt + i \sin nt),$$

la quale è soddisfatta dai valori

$$r = 1 \text{ ed } nt = \pm (2k + 1)\pi$$

Donde risultando $t = \pm \frac{(2k + 1)\pi}{n}$, sarà

$$x = \cos \left\{ \mp \frac{2k + 1}{n} \pi \right\} + i \sin \left\{ \mp \frac{2k + 1}{n} \pi \right\}$$

ovvero

$$4. \quad x = \cos \frac{2k + 1}{n} \pi \mp i \sin \frac{2k + 1}{n} \pi$$

E come precedentemente rispetto a $2k$, così ancora trove-

remmo che ponendo nell' equazione 4 in vece di $2k+1$ tutti gl'impari compresi tra 0 ed n si avrebbero tutte le radici della proposta.

Quindi all' equazione

$$x^n = -1$$

appartengono le radici

$$5. \quad x = \cos \frac{2k+1}{n} \pi \mp i \sin \frac{2k+1}{n} \pi,$$

egualmente che all' equazione

$$x^n = -a$$

le radici

$$6. \quad x = a^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{2k+1}{n} \pi \mp i \sin \frac{2k+1}{n} \pi \right\},$$

quando a $2k+1$ siano sostituiti tutti gl'impari da zero ad n .

Così l' equazione $x^n = 1$ ha le radici

$$x = 1$$

$$x = \cos \frac{\pi}{4} \mp i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} \mp \sqrt{2})$$

$$x = \cos \frac{\pi}{2} \mp i \sin \frac{\pi}{2} = \mp \sqrt{-1}$$

$$x = \cos \frac{3\pi}{4} \mp i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2} (-\sqrt{2} \mp \sqrt{-2})$$

$$x = -1.$$

Le equazioni generali 3 e 6 dimostrano che potremo decomporre la differenza $x^n - a^n$ in fattori binomiali dalla forma ;

$$x - a \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n} \mp i \sin \frac{2k\pi}{n} \right\},$$

$$x - a \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right\},$$

e la somma $x^n + a^n$ in fattori binomii della forma

$$x - a \left\{ \cos \frac{2k+1}{n} \pi - i \operatorname{sen} \frac{2k+1}{n} \pi \right\}$$

$$x - a \left\{ \cos \frac{2k+1}{n} \pi + i \operatorname{sen} \frac{2k+1}{n} \pi \right\}.$$

Ma i fattori risultanti da due radici conjugate daranno trinomii di forma reale, cioè

$$x^2 - 2ax \cos \frac{2k\pi}{n} + a^2$$

per la differenza $x^n - a^n$, ed

$$x^2 - 2ax \cos \frac{2k+1}{n} \pi - a^2$$

per la somma $x^n + a^n$.

34.

Valori di $l(a + ib)$.

Come nel n° 29 abbiamo esteso l'idea di potenza agli esponenti immaginari, così ancora potrà esser ampliata quella di logaritmo, se daremo questo nome agli esponenti immaginari egualmente che ai reali, dinodochè $x + iy$ si dirà esser il logaritmo di $e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Quindi per ottenere il logaritmo del numero complesso $a + ib$, si ha immediatamente per $\sqrt{a^2 + b^2} = r$ e $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} x$,

$$a + ib = r(\cos x + i \operatorname{sen} x) = e^{r+ix}$$

ovvero indicando con φ il minimo degli archi x ,

$$1. \quad a + ib = e^{r+i(\varphi \mp 2n\pi)}$$

e similmente

$$a - ib = e^{ir - i(\varphi \mp 2n\pi)}.$$

Donde pei logaritmi si ha

$$2. \quad l(a \pm ib) = \frac{1}{2} l(a^2 + b^2) \pm i(\varphi \mp 2n\pi).$$

Ponendo $b = 0$, si avranno tutti i valori del logaritmo di a , cioè

$$la \pm i(\varphi \mp 2n\pi).$$

Or nell'ipotesi di $b = 0$, sarà $\varphi = 0$ ovvero $\varphi = \pi$; se φ è zero, $r \cos \varphi$, ed in conseguenza a , sarà positivo; e se $\varphi = \pi$, $r \cos \varphi$ insieme con a sarà negativo. Quindi indicando con la il valore numerico del logaritmo di a si avrà

$$3. \quad \begin{aligned} l(+a) &= la \mp 2n\pi \\ l(-a) &= la \mp (2n+1)\pi \end{aligned}$$

La prima espressione dà un solo valore reale, la seconda non ne dà alcuno.

Dalle equazioni 3, ponendo $a = 1$, si ottiene

$$l(+1) = 2n\pi \quad \text{e} \quad l(-1) = (2n+1)\pi.$$

L'equazione

$$r(\cos x \mp i \sin x) = e^{ir \mp ix}$$

ci dà la relazione

$$l \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = 2ix,$$

ovvero, dividendo i due termini del fratto per $\cos x$,

$$4. \quad x = \frac{1}{2i} l \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x},$$

quindi per $\operatorname{tg} x = z$,

$$5. \quad \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} l \frac{1 + zi}{1 - zi}.$$

Egualemente che per le potenze di base immaginaria, si otterranno i valori relativi ai seni e coseni degli archi immaginari. Imperocchè sostituendo a queste funzioni le equivalenti forme esponenziali, si avrà

$$\operatorname{sen}(a + ib) = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \operatorname{sen} a + i \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2} \operatorname{cosa}$$

6.

$$\operatorname{cos}(a + ib) = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \operatorname{cosa} - i \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2} \operatorname{sena}$$

Mercè queste equazioni 6, e le relazioni donde è tratta l'equazione 4, si ha il convincimento che l'equazione 4 debba reggere per un immaginario x , e che in conseguenza debba esser altrettanto per l'equazione 5 rispetto ad un immaginario z .

CAPO SECONDO.

Funzioni di più variabili.

A. Differenziali del primo ordine.

85.

Differenziali parziali e totali in generale.

Disegnando $u = F(x, y, z, \dots)$ una funzione di più variabili indipendenti $x, y, z, \dots$, potrà ciascuna di queste variabili ricevere un cangiamento, senza che perciò avesse verun' influenza a mutare i valori delle altre. Può dunque la funzione u patire un cangiamento vario, secondochè un' alterazione si apporti ad una sola, a talune ovvero a tutte le variabili indipendenti. Se una variabile soltanto, e sia p. e. x , patisse un cangiamento, il differenziale che ne risulta, prenderà l' aggiunto di parziale, e sarà indicato con

$$d_x u, \frac{du}{dx} dx, \frac{dF(x, y, z, \dots)}{dx} dx, \text{ ovvero } F'_x(x, y, z, \dots) dx,$$

dimodochè in $\frac{du}{dx} dx$ la forma $\frac{du}{dx}$ è da trattarsi come funzione, e non come quoziente. Laonde il differenziale parziale $\frac{du}{dx} dx$, o la derivata parziale $\frac{du}{dx}$, si otterrà differenziando la funzione $u = F(x, y, z, \dots)$ soltanto rispetto ad x , e considerando in conseguenza le rimanenti variabili come altrettante costanti.

Se poi tutte le variabili ad un tempo venissero alterate, allora il differenziale della funzione u si direbbe totale, e sarebbe indicato con du .

Per trovare il differenziale totale di u , poniamo che u sia una funzione continua tra i limiti u_1 e u_2 , e propriamente nel doppio senso di esser alterate tutte, alcune, o infine una sola delle variabili indipendenti. Or sia $u = F(x, y)$ una funzione di x ed y continua tra certi limiti, e poniamo che l'una dopo l'altra siano alterate le due variabili x ed y . Se x divenga primieramente $x + dx$, u si tramuterà in $u + d_x u$; e sostituendo poi $y + dy$ ad y , $u + d_x u$ diverrà

$$u + d_x u + d_y(u + d_x u),$$

ovvero

$$u + d_x u + d_y u + d_y d_x u.$$

Questa espressione rappresenta il valore di u , ottenuto mercè l'alterazione di x ed y . La differenza di questo valore dal primitivo disegnerà dunque il differenziale totale du , e si avrà

$$1. \quad du = d_x u + d_y u + d_y d_x u.$$

In questa equazione $d_x u$ e $d_y u$ significheranno differenziali del primo ordine, se nelle equazioni identiche

$$d_x u = \frac{du}{dx} dx, \quad d_y u = \frac{du}{dy} dy$$

$\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ disegnino funzioni continue. Ma la forma $d_y d_x u$ equivale a

$$\frac{d_x u}{dy} dy = \frac{du}{dy} dx dy,$$

ed a quest'ultima notazione sostituendo l'altra $\frac{d^2 u}{dxdy} dx dy$ si ha

$$d_y d_x u = \frac{d^2 u}{dxdy} dx dy,$$

nella quale espressione $\frac{d^2 u}{dxdy}$ indica una funzione di x ed y , ottenuta mercè due successive differenziazioni, la prima rispetto ad x e l'altra rispetto ad y . Questa funzione sarà continua sì per x che per y . Ed in vero abbiamo primieramente pel n° 16 che $F'_x(x, y)$ sarà continua per x , poichè tale si è supposta $F(x, y)$. Or se la variabile y per un aumento infinitesimo β divenga $y + \beta$, si avrà

$$F'_x(x, y + \beta) - F'_x(x, y) = \beta \frac{dF'_x(x, y)}{dy},$$

e se la funzione $\frac{dF'_x(x, y)}{dy}$ ossia $\frac{d^2 u}{dxdy}$ è discontinua per un valore $y = y_1 + \beta$, lo sarà ancora pel valore prossimo y_1 . Ma per questo valore y_1 sappiamo che $F'_x(x, y)$ è continua, rispetto ad x e tale dev'essere per tutti i valori di y , pei quali $F(x, y)$ conserva la sua continuità; supponendo dunque che $F'_x(x, y)$ sia discontinua rispetto ad y , dovrebbe esserlo ancora la funzione data $u = F(x, y)$, e ciò ch'è contro la supposizione. Or se $F'_x(x, y)$ è continua rispetto ad y , tale dovrà essere ancora $\frac{d^2 u}{dxdy}$. Similmente si dimostrerebbe che $\frac{d^2 u}{dxdy}$, tra gli stessi limiti che $F(x, y)$, è ancora continua rispetto ad x .

Or essendo $\frac{d^2 u}{dxdy}$ una funzione continua tra i limiti di

continuità di $F(x, y)$, ne segue che nel limite dei valori dx e dy , dovrà

$$\frac{d^2 u}{dx dy} dx dy$$

sparire come infinitamente piccolo rispetto a $\frac{du}{dx} dx$ e $\frac{du}{dy} dy$.

Quindi l'equazione 1 si ridurrà a

$$du = d_x u + d_y u,$$

ossia

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy,$$

2.

$$= \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy,$$

ponendo F invece di $F(x, y)$. È dunque il differenziale totale eguale alla somma dei differenziali parziali.

Questo teorema ha luogo per qualsivoglia numero di variabili indipendenti. Imperocchè rappresentando $u = F(x, y, z)$ una funzione delle tre variabili x, y, z , il suo valore alterato in conseguenza del cangiamento di x ed y , sarà espresso da

$$u + d_x u + d_y u + d_z d_x u, \text{ ossia } u + d_x u + d_y u.$$

Or ponendo che z divenga $z + dz$, l'ultima espressione si trasformerà in

$$\begin{aligned} & u + d_x u + d_y u + d_z (u + d_x u + d_y u) \\ &= u + d_x u + d_y u + d_z u + d_z d_x u + d_z d_y u. \end{aligned}$$

Ma nell'ipotesi che la differenziazione avvenga tra i limiti di continuità di $F(x, y, z)$, saranno, come è facile a dimostrarsi, $d_z d_x u$ e $d_z d_y u$ infinitesimi del 2° ordine, ed in conseguenza

$$u + d_x u + d_y u + d_z u$$

disegnerà il valore di u dopo l'alterazione apportata alle va-

riabili x, y, z , ovvero sarà

$$u + du = u + d_x u + d_y u + d_z u;$$

quindi

$$\begin{aligned} 3. \quad du &= \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz \\ &= \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz \end{aligned}$$

esprimerà il differenziale totale della funzione delle tre variabili indipendenti x, y, z .

Dalla funzione $F(x, y, z)$ di tre variabili facilmente la conclusione si estende ad una funzione di quattro e più variabili, dimodochè ponendo $u = F(x, y, z, v, \dots)$ si avrà

$$4. \quad du \pm \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz + \frac{dF}{dv} dv + \dots$$

Alla medesima espressione del differenziale totale si perverrà, quando l'alterazione delle variabili si ponga contemporanea invece di successiva, e si abbia riguardo alla continuità della funzione nel definire le derivate parziali.

Supponiamo che nell'equazione $u = F(x, y, z, v, \dots)$ le variabili $x, y, z, v, \dots$ divengano insieme funzioni di una sola variabile t , allora per l'equazione 3 del n° 8 si avrà

$$\frac{du}{dt} \pm \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dt},$$

dove per l'equazione 5 dello stesso numero risulterà

$$5. \quad du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dv} dv + \dots$$

Purtuttavia è da osservarsi che se questa equazione 5 è identica alla 4 rispetto alla forma, ne differisce pel significato, imperocchè le quantità $dx, dy, dz, dv, \dots$ sono nell'equazione 5 dipendenti da t e quindi variabili con t , men-

tre nell'equazione 4 sono arbitrarie e costanti. Laonde nel cercare il differenziale totale di u sarà cosa indifferente il riguardare le variabili $x, y, z, v, \dots$ come indipendenti, o come funzioni di un'altra variabile t .

Esempio 1. Rispetto alla funzione

$$u = \left\{ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

si ha

$$d_x u = \frac{2xy^2 dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad d_y u = - \frac{2x^2 y dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

donde

$$du = \frac{2xy(ydx - xdy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ma se consideriamo x ed y come funzioni di una nuova variabile, avremo

$$du = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot d \left\{ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right\},$$

e

$$\begin{aligned} d \left\{ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right\} &= \frac{(x^2 + y^2)(2xdx - 2ydy) - (x^2 - y^2)(2xdx + 2ydy)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4xy^2 dx - 4x^2 y dy}{(x^2 + y^2)^2}; \end{aligned}$$

quindi avremo di nuovo

$$du = \frac{2xy(ydx - xdy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Esempio 2. Ponendo

$$u = \operatorname{I} \operatorname{tang} \frac{x}{y},$$

si ottiene

$$d_x u = \frac{dx}{y \cos^2 \frac{x}{y} \operatorname{I} \operatorname{g} \frac{x}{y}}, \quad d_y u = - \frac{xdy}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y} \operatorname{I} \operatorname{g} \frac{x}{y}};$$

donde

$$du = \frac{2(ydx - xdy)}{y^2 \operatorname{sen} \frac{2x}{y}}.$$

Ovvero :

$$du = \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{y}}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}},$$

ma

$$d \operatorname{tg} \frac{x}{y} = \frac{d \frac{x}{y}}{\cos^2 \frac{x}{y}} = \frac{ydx - xdy}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}},$$

dunque

$$du = \frac{ydx - xdy}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y} \operatorname{tg} \frac{x}{y}} = \frac{2(ydx - xdy)}{y^2 \operatorname{sen} \frac{2x}{y}}.$$

Esempio 5. La funzione

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{z} + \frac{z^2}{2}$$

ci dà

$$d[(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\operatorname{dare} \operatorname{tg} \frac{x}{z} = \frac{zdx - xdz}{z^2 \left\{ 1 + \frac{x^2}{z^2} \right\}} = \frac{zdx - xdz}{x^2 + z^2},$$

e

$$d \frac{z^2}{2} = zdz;$$

quindi

$$du = \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{zdx - xdz}{x^2 + z^2} + zdz.$$

36.

Funzioni implicite.

Dalla funzione $F(x, y) = 0$ mercè l'equazione 3 del n° 10 si ottiene la relazione;

FRANKE CALC. DIFF.

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

scrivendo dF in vece di $dF(x, y)$. Ma nell'equazione

$$1. \quad F(x, y, z) = 0$$

z è una funzione delle variabili indipendenti x ed y ; quindi, essendo z una funzione di x , dall'equazione precedente si avrà

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \text{ e } \frac{dz}{dx} = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dz};$$

e poichè z è funzione di y , si avrà

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0, \text{ e } \frac{dz}{dy} = -\frac{dF}{dy} : \frac{dF}{dz},$$

ed in fine essendo z funzione di x ed y , sarà

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Or introducendo in quest'ultima equazione i valori ottenuti per $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$, avremo dai differenziali parziali di z il differenziale totale

$$2. \quad dz = -\left\{ \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy \right\} : \frac{dF}{dz},$$

ovvero, riducendo a zero,

$$3. \quad \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0.$$

Ponendo $u = F(x, y, z)$ e pareggiandone a zero il differenziale totale, ne risulterà l'equazione precedente, la quale ci dimostra in conseguenza che anche per le funzioni implicite potremo a vantaggio della differenziazione riguardare le varia-

bili indipendenti x ed y come se dipendessero da una nuova variabile.

Esempio. Dall'equazione

$$F(x, y, z) = k(Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1) \\ - (Aax + Bby + Ccz - 1)^2 = 0$$

si ottengono i differenziali parziali

$$\frac{dF}{dx} dx = [kx - (Aax + Bby + Ccz - 1)a]Adx = 0$$

$$\frac{dF}{dy} dy = [ky - (Aax + Bby + Ccz - 1)b]Bdy = 0$$

$$\frac{dF}{dz} dz = [kz - (Aax + Bby + Ccz - 1)c]Cdz = 0.$$

Or differenziando compiutamente l'equazione proposta, si ottiene l'altra

$$k(Axdx + Bydy + Czdz) \\ - (Aax + Bby + Ccz - 1)(Aadx + Bbdy + Ccdz) = 0,$$

la quale, ordinata secondo dx , dy e dz , riproduce identicamente la somma dei tre differenziali parziali.

37.

Funzioni omogenee.

Una funzione $F(x, y, z, \dots)$ di più variabili indipendenti $x, y, z, \dots$ dicesi omogenea, se essa varia secondo una ragione geometrica, tostochè le sue variabili vengano alterate a norma di una semplice ragione. Da questa definizione segue che se le variabili $x, y, z, \dots$ si pongano dipendenti da una nuova variabile t , e siano ordinatamente scambiate con $xt, yt, zt, \dots$ dovrà per la funzione omogenea $F(x, y, z, \dots)$ aver luogo l'equazione

$$1. \quad F(xt, yt, zt, \dots) = t^n F(x, y, z, \dots).$$

Il numero n dicesi grado della funzione omogenea.

Donde segue che una funzione omogenea deve aver forma algebrica, o tutto al più esser forma trascendente di una funzione algebrica. Ed in quest' ultimo caso non solamente la funzione algebrica dev'essere omogenea, ma eziandio di grado zero, poichè in contrario lo svolgimento della funzione in serie renderebbe vario il grado di ogni termine, e la serie non potrebbe esser omogenea.

Poichè (n° 35) è indifferente pel differenziale di una funzione che le variabili si trattino come indipendenti l'una dall'altra, o come dipendenti da una nuova variabile t , così noi porremo nell'equazione 1

$$xt = u, \quad yt = v, \quad zt = w, \dots,$$

e ne otterremo l'equazione

$$F(u, v, w, \dots) = t^n F(x, y, z, \dots),$$

la quale differenziata rispetto a t , ci darà

$$\frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{dF}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dF}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} + \dots = nt^{n-1} F(x, y, z, \dots)$$

Ma $\frac{du}{dt} = x, \quad \frac{dv}{dt} = y, \quad \frac{dw}{dt} = z, \dots;$

in conseguenza l'equazione precedente diviene

$$x \frac{dF}{du} + y \frac{dF}{dv} + z \frac{dF}{dw} + \dots = nt^{n-1} F(x, y, z, \dots)$$

Il valore di t resterà arbitrario, finchè non renda discontinua la funzione proposta; potremo in conseguenza porre $t = 1$, e così trasformare du in dx , dv in dy , dw in dz ,... Per la qual cosa l'equazione precedente diviene

$$2. \quad x \frac{dF}{dx} + y \frac{dF}{dy} + z \frac{dF}{dz} + \dots = nF(x, y, z, \dots).$$

Se la funzione omogenea $F(x, y, z, \dots)$ è una funzione della

somma $x + y + z + \dots$, potremo considerarne la dipendenza da t ponendo $\tau = x + y + z + \dots$ e così si avranno le derivate parziali

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dt} \frac{dt}{dx}, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dt} \frac{dt}{dy}, \quad \frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dt} \frac{dt}{dz}, \dots$$

Ma l'equazione di condizione rispetto a t ci dà

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dy} = \frac{dt}{dz} \dots = 1,$$

sarà dunque

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dz} = \dots$$

ossia

$$3. \quad F'_x(x+y+z+\dots) = F'_y(x+y+z+\dots) = F'_z(x+y+z+\dots).$$

Esempio 1. Dall'equazione

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2} (Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz)$$

si ha

$$\frac{dF}{dx} = Ax + Dy + Ez, \quad \frac{dF}{dy} = By + Dx + Fz,$$

$$\frac{dF}{dz} = Cz + Ex + Fy.$$

Or essendo $n = 2$, sarà

$$(Ax + Dy + Ez)x + (By + Dx + Fz)y + (Cz + Ex + Fy)z \\ = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz.$$

Esempio 2. Nella funzione

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x + y} = F(x, y)$$

si ha $n = -\frac{1}{2}$, quindi

$$x \frac{dF}{dx} + y \frac{dF}{dy} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{yx^{\frac{1}{2}} + xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{(x+y)^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{x + y}$$

Esempio 5. Nella funzione trascendente

$$\arcsen \left\{ \frac{x-y}{x+y} \right\}^{\frac{1}{2}} = F(x, y)$$

si ha $n=0$; la funzione è dunque omogenea, e ci dà

$$x \frac{dF}{dx} + y \frac{dF}{dy} = \frac{yx - xy}{(x+y)[(x-y)2y]^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

B. Differenziali di ordine superiore.

38.

Differenziali parziali.

Se le derivate parziali $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ del differenziale completo

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots$$

della funzione $u = F(x, y, z, \dots)$, sono funzioni delle variabili indipendenti $x, y, z, \dots$ si potranno di bel nuovo differenziare rispetto a ciascuna variabile. Il differenziale totale dell'ordine n^{esimo} della funzione u sarà indicato con $d^n u$; ma il differenziale del medesimo ordine rispetto ad x sarà disegnato da

$$\frac{d^n u}{dx^n} dx^n, \text{ ovvero } d_x^n u, \text{ o infine } F_x^{(n)}(x, y, z, \dots) dx^n.$$

E se il differenziale si è tolto m volte rispetto ad x , n volte rispetto ad y , ed r volte rispetto a z , ciò s'indicherà con

$$\frac{d^{m+n+r} u}{dx^m dy^n dz^r} dx^m dy^n dz^r, \text{ ovvero } d_x^m d_y^n d_z^r u.$$

Or per ottenere il differenziale parziale del 2° ordine di una funzione di due variabili $u = F(x, y)$ rispetto ad x ed y , si ponga primieramente $x + dx$ in luogo di x , indi nella funzione alterata si sostituisca $y + dy$ ad y . Così avremo pel n° 35

$$u + du = u + d_x u + d_y u + d_y d_x u.$$

Ma se nella funzione data cominceremo dal sostituire $y + dy$ ad y , per quindi porre $x + dx$ in luogo di x nell'alterata funzione, otterremo egualmente la completa alterazione della funzione rispetto ad x ed y ; e così avremo ancora l'equazione

$$u + du = u + d_y u + d_x u + d_x d_y u.$$

Dalla doppia espressione dell'alterata funzione $u + du$ risulta

$$d_y d_x u = d_x d_y u, \text{ ovvero } \frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d^2 u}{dy dx}.$$

È dunque indifferente in qual ordine la differenziazione venga attuata. Dalla funzione p. e. $u = x^m y^n$ si ha

$$\frac{du}{dx} = mx^{m-1} y^n, \quad \frac{du}{dy} = nx^m y^{n-1};$$

e differenziando $\frac{du}{dx}$ rispetto ad y , ovvero $\frac{du}{dy}$ rispetto ad x , ne risulta

$$\frac{d^2 u}{dx dy} = mn x^{m-1} y^{n-1} = \frac{d^2 u}{dy dx}.$$

Or se $\frac{d^2 u}{dx dy}$ che supponiamo funzione di x ed y , sia più volte differenziata rispetto all'una o l'altra di queste variabili indipendenti, cosicchè ne risultino le funzioni

$$\frac{d^2 u}{dx dy}, \quad \frac{d^3 u}{dx dy^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^n}, \quad \dots$$

si potranno riguardare come eseguite in ordine inverso due

successive differenziazioni, l'una rispetto ad x , e l'altra rispetto ad y , ed avremo in conseguenza

$$\frac{d^2u}{dx^r dy} = \frac{d^2u}{dx dy dx} = \frac{d^2u}{dy dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dx dy^2} = \frac{d^2u}{dy dx dy} = \frac{d^2u}{dy^2 dx},$$

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n} = \frac{d^{m+n}u}{dy^n dx^m} = \frac{d^{m+n}u}{dx^{m-r} dy^{n-s} dx^r dy^s} = \dots$$

Si troverà facilmente che la stessa osservazione vale ancora per le funzioni di più variabili, e che in conseguenza

$$\frac{d^{m+n+r}u}{dx^m dy^n dz^r} dx^m dy^n dz^r, \quad \frac{d^{m+n+r}u}{dx^m dz^r dy^n} dx^m dz^r dy^n,$$

$$\frac{d^{n+r+m}u}{dy^n dz^r dx^m} dy^n dz^r dx^m,$$

$$\text{ovvero } d_x^m d_y^n d_z^r u, \quad d_x^m d_z^r d_y^n u, \quad d_y^n d_z^r d_x^m u,$$

sono identici modi di espressione.

Esempii. La funzione $\text{sen } \frac{x}{y} = u$ ne dà

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{y^2} \text{sen } \frac{x}{y},$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}, \quad \frac{d^2u}{dy dx} = -\frac{1}{y^2} \cos \frac{x}{y} + \frac{x}{y^3} \text{sen } \frac{x}{y},$$

$$\frac{d^3u}{dx^2 dy} = \frac{2}{y^3} \text{sen } \frac{x}{y} + \frac{x}{y^4} \cos \frac{x}{y} = \frac{d^3u}{dx dy dx}$$

Dalla funzione $u = \text{sen } x \cos y$ si ottiene

$$\frac{d^4u}{dx^2 dy^2} = \text{sen } x \cos y = \frac{d^4u}{dy^2 dx^2} = \frac{d^4u}{dx dy dx dy};$$

egualmente dalla funzione $u = \text{sen}(hx + ky)$

$$\frac{d^m u}{dx^m} = h^m \operatorname{sen} \left\{ hx + ky + \frac{m\pi}{2} \right\},$$

$$\frac{d^n u}{dy^n} = k^n \operatorname{sen} \left\{ hx + ky + \frac{n\pi}{2} \right\},$$

c

$$\frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^n} = h^m k^n \operatorname{sen} \left\{ hx + ky + [m+n] \frac{\pi}{2} \right\} = \frac{d^{n+m} u}{dy^n dx^m}.$$

Finalmente si avrà dalla funzione $u = \frac{x^2 y}{a^2 - z^2}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2xy}{a^2 - z^2}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{x^2}{a^2 - z^2}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{2x^2 y z}{(a^2 - z^2)^2},$$

$$\frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{2x}{a^2 - z^2}, \quad \frac{d^2 u}{dx dz} = \frac{4xyz}{(a^2 - z^2)^2}, \quad \frac{d^2 u}{dy dz} = \frac{2x^2 z}{(a^2 - z^2)^2}$$

$$\frac{d^3 u}{dx dy dz} = \frac{4xz}{(a^2 - z^2)^3} = \frac{d^3 u}{dx dz dy} = \frac{d^3 u}{dz dx dy}.$$

39.

Differenziali totali.

Dietro questi schiarimenti su i differenziali e le derivate parziali degli ordini superiori, sarà cosa agevole il trovare il differenziale totale per ciascuno di essi ordini. Imperocchè nell'equazione

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy,$$

risultante dalla primitiva relazione $u = F(x, y)$, $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ dinotano funzioni delle variabili indipendenti x ed y ; potrà dunque ciascuna di queste parziali derivate esser nuovamente differenziata rispetto alle due variabili. Or

$$\frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2u}{dxdy} dx dy, \text{ e } \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2u}{dydx} dy dx$$

sono differenziali completi, il primo di $\frac{du}{dx} dx$, il secondo di $\frac{du}{dy} dy$, poichè dx e dy sono costanti, come quelli che si riferiscono a variabili indipendenti. La somma in conseguenza di questi differenziali completi esprimerà il differenziale totale di du , ossia d^2u ; e poichè dal n° precedente risulta

$$\frac{d^2u}{dxdy} dx dy = \frac{d^2u}{dydx} dy dx,$$

sarà

$$1. \quad d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} dx dy + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2.$$

Ragionando allo stesso modo si ha il differenziale totale del 3° ordine

$$2. \quad d^3u = \frac{d^3u}{dx^3} dx^3 + 3 \frac{d^3u}{dx^2dy} dx^2 dy + 3 \frac{d^3u}{dxdy^2} dx dy^2 + \frac{d^3u}{dy^3} dy^3.$$

E continuando nello stesso modo di deduzione si perverrà all' equazione generale

$$3. \quad d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + n \frac{d^n u}{dx^{n-1} dy} dx^{n-1} dy + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^n u}{dx^{n-2} dy^2} dx^{n-2} dy^2 + \dots + n \frac{d^n u}{dx dy^{n-1}} dx dy^{n-1} + \frac{d^n u}{dy^n} dy^n,$$

ovvero, con espressione simbolica,

$$4. \quad d^n u = \left\{ \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right\}^n,$$

scambiando nello svolgimento del binomio la n^{ima} potenza di du con lo n^{imo} differenziale.

Estendendo la stessa illazione ad una funzione di tre variabili $u = F(x, y, z)$, si avrà

$$5. \quad d^n u = \left\{ \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz \right\}^n.$$

purchè si ponga mente a sostituire i differenziali alle potenze nello svolgimento del trinomio.

Or se per brevità si ponga

$$\frac{du}{dx} = P, \quad \frac{du}{dy} = Q, \quad \frac{du}{dz} = R,$$

si avrà l'equazione

$$6. \quad du = Pdx + Qdy + Rdz,$$

P, Q ed R indicando funzioni delle tre variabili x, y, z .
Ma essendo

$$\frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d^2 u}{dy dx}, \quad \frac{d^2 u}{dx dz} = \frac{d^2 u}{dz dx}, \quad \frac{d^2 u}{dy dz} = \frac{d^2 u}{dz dy},$$

le tre funzioni P, Q, R dovranno render soddisfatte le tre equazioni di condizione

$$7. \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

Esempio 1. Da $u = x^m y^n$ si ottiene

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = m(m-1)(m-2)(m-3) x^{m-4} y^n,$$

$$\frac{d^4 u}{dx^3 dy} = m(m-1)(m-2) x^{m-3} y^{n-1},$$

$$\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} = m(m-1)n(n-1) x^{m-2} y^{n-2},$$

$$\frac{d^4 u}{dx dy^3} = mn(n-1)(n-2) x^{m-1} y^{n-3},$$

$$\frac{d^4 u}{dy^4} = n(n-1)(n-2)(n-3) x^m y^{n-4};$$

quindi

$$\begin{aligned} d^4 u &= m(m-1)(m-2)(m-3) \{ x^{m-4} y^3 dx^4 \\ &+ 4 \frac{n}{m-3} x^{m-4} y^{n-1} dx^3 dy \\ &+ 6 \frac{n(n-1)}{(m-2)(m-3)} x^{m-2} y^{n-2} dx^2 dy^2 \\ &+ 4 \frac{n(n-1)(n-2)}{(m-1)(m-2)(m-3)} x^{m-1} y^{n-3} dx dy^3 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m(m-1)(m-2)(m-3)} x^m y^{n-4} dy^4 \}. \end{aligned}$$

Similmente da $u = \sin mx \sin ny$ si avrà

$$\begin{aligned} d^4 u &= (m^4 dx^4 + 6m^2 n^2 dx^2 dy^2 + n^4 dy^4) \sin mx \sin ny \\ &- 4mn(m^2 dx^2 dy + n^2 dx dy^2) \cos mx \cos ny, \end{aligned}$$

e da $u = x \sin y - y \sin x$:

$$d^4 u = -y \cos x dx^4 - 5 \sin y dx^4 dy + 5 \sin y dx dy^4 + x \cos y dy^4.$$

Esempio 2. La funzione $u = \frac{xy}{ax+bz}$ dà

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= -\frac{2abyz}{(ax+bz)^3}, \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{2b^2xy}{(ax+bz)^3}, \\ \frac{d^2 u}{dx dy} &= \frac{bz}{(ax+bz)^2}, \quad \frac{d^2 u}{dx dz} = \frac{(ax-bz)by}{(ax+bz)^3}, \quad \frac{d^2 u}{dy dz} = -\frac{bx}{(ax+bz)^2}; \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} d^2 u &= \frac{2b}{(ax+bz)^2} [-ayz dx^2 + bvy dz^2 + (ax+bz)z dx dy \\ &+ (ax-by)y dx dz - (ax+bz)x dy dz]. \end{aligned}$$

40.

Funzioni implicite.

Siccome dall'equazione

$$F(x, y, z) = 0.$$

nella quale z rappresenta una funzione implicita delle variabili indipendenti x ed y , si hanno facilmente per le cose dette nel n° 36 le derivate parziali ed il differenziale totale, giacchè differenziandola rispetto ad x ed y ne vengono le due equazioni:

$$1. \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} = 0;$$

dalla prima delle quali si ha la derivata $\frac{dz}{dx}$ e dalla seconda la $\frac{dz}{dy}$; così mercè una ripetuta differenziazione delle stesse equazioni si otterranno le altre derivate parziali. Differenziando la prima di esse rispetto ad x ed y si avranno le due equazioni:

$$2. \quad \frac{d^2F}{dx^2} + 2 \frac{d^2F}{dx dz} \frac{dz}{dx} + \frac{d^2F}{dz^2} \left\{ \frac{dz}{dx} \right\}^2 + \frac{dF}{dz} \frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

$$3. \quad \frac{d^2F}{dx dy} + \frac{d^2F}{dx dz} \frac{dz}{dy} + \frac{d^2F}{dy dz} \frac{dz}{dx} + \frac{d^2F}{dz^2} \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{d^2z}{dx dy} = 0.$$

E se la seconda delle stesse equazioni precedenti sia differenziata ancora rispetto ad x ed y , si avranno le due altre:

$$4. \quad \frac{d^2F}{dx dy} + \frac{d^2F}{dx dz} \frac{dz}{dy} + \frac{d^2F}{dz^2} \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} + \frac{d^2F}{dy dz} \frac{dz}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{d^2z}{dx dy} = 0,$$

$$5. \quad \frac{d^2F}{dy^2} + 2 \frac{d^2F}{dy dz} \frac{dz}{dy} + \frac{d^2F}{dz^2} \left\{ \frac{dz}{dy} \right\}^2 + \frac{dF}{dz} \frac{d^2z}{dy^2} = 0.$$

La derivata parziale $\frac{d^2z}{dx^2}$ si avrà dall'equazione 2, indi le due equazioni identiche 3 e 4 daranno il valore di $\frac{d^2z}{dx dy}$, ed in fine dall'equazione 5 risulterà $\frac{d^2z}{dy^2}$. Introducendo queste derivate parziali in

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2z}{dx dy} dx dy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2,$$

che rappresenta il secondo totale differenziale di z , si avrà il valore di d^2z .

In conseguenza dell'osservazione fatta sull'equazione 3 del n° 36, il differenziale secondo totale di z si potrà ottenere anche immediatamente, differenziando rispetto ad x , y e z l'equazione

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0,$$

la quale risulta dalle equazioni 1. Così si avrà

$$\begin{aligned} 6. \quad & \frac{d^2F}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2F}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2F}{dz^2} dz^2 + 2 \frac{d^2F}{dxdy} dx dy \\ & + 2 \frac{d^2F}{dx dz} dy dz + 2 \frac{d^2F}{dy dz} dy dz + \frac{d^3F}{dz^3} dz^3 = 0, \end{aligned}$$

dove facilmente si otterrà il valore del differenziale totale d^2z .

Nello stesso modo si troveranno i differenziali parziali e totali del terzo e degli altri ordini più elevati.

Sia data p. e. l'equazione

$$F(x, y, z) = xy + xz + yz - a^3 = 0.$$

Sarà

$$\frac{dF}{dx} = y + z, \quad \frac{dF}{dy} = x + z, \quad \frac{dF}{dz} = x + y,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dxdy} = \frac{d^2F}{dxdz} = \frac{d^2F}{dydz} = 1.$$

Introducendo questi valori nelle equazioni, da 1 a 5, risulteranno le relazioni

$$(y + z) + (x + y) \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$(x + z) + (x + y) \frac{dz}{dy} = 0 ,$$

$$2 \frac{dz}{dx} + (x + y) \frac{d^2 z}{dx^2} = 0 ,$$

$$1 + \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} + (x + y) \frac{d^2 z}{dxdy} = 0 ,$$

$$2 \frac{dz}{dy} + (x + y) \frac{d^2 z}{dy^2} = 0 ,$$

donde sarà facile dedurre i valori delle derivate parziali

$$\frac{dz}{dx} , \frac{dz}{dy} , \frac{d^2 z}{dx^2} , \frac{d^2 z}{dxdy} , \frac{d^2 z}{dy^2} .$$

41.

Funzioni omogenee.

Rispetto alla funzione omogenea $F(x, y, z)$ ha luogo per l'equazione 2° del n° 37, la relazione

$$1. \quad x \frac{dF}{dx} + y \frac{dF}{dy} + z \frac{dF}{dz} = n F(x, y, z).$$

Questa relazione indica anch'essa una funzione omogenea e del grado $n^{si. 30}$, dimodochè vi si può applicare la stessa legge che alla proposta funzione omogenea. Or la derivata rispetto ad x del primo membro dell'equazione 1 è:

$$\frac{dF}{dx} + x \frac{d^2 F}{dx^2} + y \frac{d^2 F}{dxdy} + z \frac{d^2 F}{dxdz} ,$$

e similmente le derivate rispetto ad y e z sono:

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dy} + y \frac{d^2 F}{dy^2} + x \frac{d^2 F}{dxdy} + z \frac{d^2 F}{dydz} , \\ & \frac{dF}{dz} + z \frac{d^2 F}{dz^2} + x \frac{d^2 F}{dxdz} + y \frac{d^2 F}{dydz} . \end{aligned}$$

Moltiplicando queste derivate parziali la prima per x , la seconda per y , la terza per z , ed addizionandone i prodotti, avremo, riflettendo all'equazione 1,

$$\begin{aligned} & x \frac{dF}{dx} + y \frac{dF}{dy} + z \frac{dF}{dz} \\ & + x^2 \frac{d^2F}{dx^2} + y^2 \frac{d^2F}{dy^2} + z^2 \frac{d^2F}{dz^2} \\ & + 2xy \frac{d^2F}{dx dy} + 2xz \frac{d^2F}{dx dz} + 2yz \frac{d^2F}{dy dz} = n \cdot n F(x, y, z), \end{aligned}$$

ovvero riducendo per mezzo della stessa equazione 1,

$$\begin{aligned} 2. \quad & x^2 \frac{d^2F}{dx^2} + y^2 \frac{d^2F}{dy^2} + z^2 \frac{d^2F}{dz^2} \\ & + 2xy \frac{d^2F}{dx dy} + 2xz \frac{d^2F}{dx dz} + 2yz \frac{d^2F}{dy dz} = n(n-1)F(x, y, z). \end{aligned}$$

E poichè questa funzione è ancora omogenea rispetto ad x , y , z , così si potrà applicarvi di nuovo la legge espressa dalla equazione 1. Or la derivata rispetto ad x del primo membro è:

$$\begin{aligned} & x^2 \frac{d^3F}{dx^3} + y^2 \frac{d^3F}{dx dy^2} + z^2 \frac{d^3F}{dx dz^2} + 2xy \frac{d^3F}{dx^2 dy} + 2xz \frac{d^3F}{dx^2 dz} \\ & + 2yz \frac{d^3F}{dx dy dz} + 2x \frac{d^3F}{dx^2} + 2y \frac{d^3F}{dx dy} + 2z \frac{d^3F}{dx dz}, \end{aligned}$$

e nello stesso modo si otterranno le derivate rispetto ad y e z . Si moltiplichino queste tre derivate ordinatamente per x , y , e z , se ne addizionino i prodotti, si riduca la somma all'espressione più semplice e si avrà

$$\begin{aligned} 3. \quad & x^3 \frac{d^3F}{dx^3} + y^3 \frac{d^3F}{dy^3} + z^3 \frac{d^3F}{dz^3} \\ & + 3x^2y \frac{d^3F}{dx^2 dy} + 3x^2z \frac{d^3F}{dx^2 dz} + 3y^2z \frac{d^3F}{dy^2 dz} \end{aligned}$$

$$+ 3xy^2 \frac{d^2 F}{dx dy^2} + 3xz^2 \frac{d^2 F}{dx dz^2} + 3yz^2 \frac{d^2 F}{dy dz^2} \\ + 6xyz \frac{d^2 F}{dx dy dz} = n(n-1)(n-2)F(x,y,z).$$

Nello stesso modo si potrà continuare ad operare su quest'ultima equazione, e così per un valore intero ed assoluto $m = a + b + c$ si avrà la relazione

$$4. \quad x^m \frac{d^m F}{dx^m} + y^m \frac{d^m F}{dy^m} + z^m \frac{d^m F}{dz^m} \\ + 1.2.3\dots m \Sigma \frac{x^a y^b z^c}{1.2\dots a.1.2\dots b.1.2\dots c} \cdot \frac{d^m F}{dx^a dy^b dz^c},$$

il simbolo Σ indicando la somma di tutti i termini contenenti le derivate prese rispetto a due soltanto, ovvero a tutte tre le variabili.

Dall'equazione 2 del n° 37 risulta che le leggi espresse nell'equazioni 2, 3 e 4 di questo n° valeranno qualunque sia il numero delle variabili.

42.

Cangiamento della variabile indipendente.

Poniamo che le variabili indipendenti x ed y dell'equazione:

$$u = F(x, y)$$

dipendano da altre due variabili r e t mercè le relazioni

$$x = \varphi(r, t), \quad y = \psi(r, t).$$

In questo caso le derivate parziali $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$ si avranno per mezzo delle derivate $\frac{du}{dr}$ e $\frac{du}{dt}$, imperocchè dalle equazioni

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dr},$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

eliminando $\frac{du}{dy}$ si ha

$$1. \quad \frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dr} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{dr}}{\frac{dx}{dr} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dx}{dt}}$$

ed eliminando invece $\frac{du}{dx}$, si ottiene

$$2. \quad \frac{du}{dy} = - \frac{\frac{du}{dr} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{du}{dt} \cdot \frac{dx}{dr}}{\frac{dx}{dr} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dx}{dt}}$$

Questo caso generale suppone che le nuove variabili r e t siano date come funzioni implicite di x ed y nelle equazioni

$$x = \varphi(r, t), \quad y = \psi(r, t).$$

Ma se r e t indicassero funzioni esplicite di x ed y , si avrebbe immediatamente

$$3. \quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} + \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dy} + \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dy}.$$

Nello stesso modo si procederà per ottenere le derivate parziali di ordini superiori, ovvero quelle che si riferissero a più di due variabili.

Esempio 1. Sia da trasformarsi l'espressione

$$x \frac{du}{dy} - y \frac{du}{dx}$$

in un'altra che corrisponda alla condizione di essere

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$

Dalle equazioni 1 e 2 si ha

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \cos t - \frac{du}{dt} \cdot \frac{\sin t}{r},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr} \sin t + \frac{du}{dt} \cdot \frac{\cos t}{r};$$

quindi

$$x \frac{du}{dy} - y \frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}.$$

Nello stesso modo si troverà

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} = r \frac{du}{dr}.$$

Esempio 2. Dall'equazione

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

ponendovi la condizione

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

si ottiene immediatamente mercè le equazioni 3

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dr^2} \cdot \frac{dr}{dx} \cdot \frac{x}{r} + \frac{du}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} \cdot \frac{x}{r^2};$$

ed essendo

$$x dx = r dr, \text{ ossia } \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r},$$

sarà

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dr^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right\},$$

similmente

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dr^2} \cdot \frac{y^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right\};$$

quindi

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dr^2} = \frac{d^2u}{dr^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left\{ \frac{2}{r} - \frac{x^2 + y^2}{r^3} \right\},$$

ed in conseguenza

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{r dr} = 0.$$

Per l'equazione

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

colla condizione

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

si troverà

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2du}{r dr} = 0.$$

Esempio 3. Poniamo che la stessa equazione precedente

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

sia da trasformarsi colla condizione di essere

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$

Si avrà

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= \frac{du}{dr} \sin t + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dt} \cos t, \\ \frac{d^2u}{dy^2} &= \frac{d^2u}{dr^2} \sin^2 t + \frac{1}{r^2} \frac{d^2u}{dt^2} \cos^2 t + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \cos^2 t \\ &\quad + 2 \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2u}{dr dt} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{du}{dt} \right\} \sin t \cos t. \end{aligned}$$

Scambiando t in $\frac{\pi}{2} - t$ si dedurrà il valore di $\frac{d^2u}{dx^2}$ da

quello di $\frac{d^2u}{dy^2}$, cioè

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d^2u}{dr^2} \cos^2 t + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} \sin^2 t + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} \sin^2 t \\ &\quad - 2 \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2u}{dr dt} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{du}{dt} \right\} \sin t \cos t; \end{aligned}$$

ed addizionando le due equazioni si ottiene

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} = 0,$$

Se all'opposto si dovesse trasformare l'equazione

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

in una funzione di r, t, φ , per le quali variabili si avesse

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \sin \varphi, \quad z = r \sin t \cos \varphi;$$

allora ponendo $\rho = r \sin t$, si avranno le quattro equazioni di condizione

$$y = \rho \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi$$

$$\rho = r \sin t, \quad x = r \cos t.$$

Dall'esempio precedente rileviamo rispetto alle variabili y e z .

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{du}{d\rho}.$$

E poichè le equazioni di condizione hanno la stessa forma sia per y e z che per ρ ed x ; così rispetto a queste due ultime variabili si avrà

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr}.$$

Addizionando queste due equazioni si ottiene

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{du}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2}.$$

Per eliminare poi da questa equazione $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{du}{d\rho}$ abbiamo dall'equazione 2

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{du}{dr} \sin t + \frac{du}{dt} \cdot \frac{\cos t}{r},$$

quindi

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{du}{d\rho} = \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{du}{dt} \cdot \frac{\cos t}{r^2},$$

in conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2} \\ &+ \frac{2}{r} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{\cos t}{r} + \frac{\cos^2 t}{r^2} \cdot \frac{du}{dt} = 0, \end{aligned}$$

ovvero, ponendo invece di ρ^2 il suo valore e facendo le debite contrazioni,

$$r \frac{d^2(ru)}{dr^2} + \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{d \left\{ \sin^2 t \frac{du}{d \cos t} \right\}}{d \cos t} = 0.$$

43.

Eliminazione delle costanti.

Se l'equazione

$$1. \quad F(x, y) = a,$$

in cui a rappresenta una costante, venga differenziata, si vedrà sparire la costante a , avendosi l'equazione

$$2. \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

la quale contiene una relazione tra $x, y, \frac{dy}{dx}$ che rimane inalterata, qualunque sia il valore attribuito ad a nell'equazione 1.

Ma se all'opposto la costante a fosse implicitamente unita alle variabili x ed y , come indica l'equazione

$$3. \quad F(x, y, a) = 0,$$

allora essa resterebbe nel differenziale

$$4. \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0;$$

ma potrebbe esserne eliminata mercè la comparazione delle equazioni 3 e 4, dimodochè si avrebbe di nuovo un'equazione della forma

$$4. \quad f\left\{x, y, \frac{dy}{dx}\right\} = 0,$$

la quale non contenendo a , esprime una relazione tra $x, y, \frac{dy}{dx}$. Un'equazione di questa specie, attesa l'indicata relazione ch'esprime, prende il nome di equazione differenziale.

Togliendo ad esempio l'equazione

$$y = x^n + a e^{mx},$$

abbiamo per mezzo della differenziazione

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + ma e^{mx};$$

donde poi eliminando a risulta

$$\frac{dy}{dx} - my = (n - mx)x^{n-1}.$$

Contenga l'equazione

$$F(x, y, a, b) = 0$$

le due costanti a e b . Due successive differenziazioni ci daranno le due equazioni differenziali

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2 \frac{d^2F}{dx dy} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{dF}{dy} \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

che in generale conterranno le due costanti. Or eliminando a e b dalle tre equazioni precedenti, ne risulterà una quarta della forma

$$6. \quad f(x, y, y', y'') = 0,$$

la quale non contenendo più le costanti a e b esprimerà una relazione tra x , y , $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$. E per ciò l'equazione 6 ha ricevuto il nome di equazione differenziale del 2° ordine.

Ponendo a modo di esempio che dall'equazione

$$y = m \cos(rx + \alpha)$$

si volessero eliminare le due costanti m ed α , avremmo per due successive differenziazioni

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -mr^2 \cos(rx + \alpha);$$

e moltiplicando la prima equazione per r^2 , e poi addizionandola alla seconda, si avrebbe

$$\frac{d^2y}{dx^2} + r^2 y = 0.$$

Dalla composizione delle equazioni 5 e 6 si rileva che bisognerà una triplice differenziazione per eliminare tre costanti dalle equazioni che ne derivano; ed in generale sarà d'uopo delle prime m equazioni differenziali di un'equazio-

ne data, perchè da questa si potessero eliminare altrettante costanti: l'equazione finale conterrà le prime m derivate.

Del resto egli è indifferente che si compongano prima le m equazioni differenziali, indi si venga all'eliminazione delle m costanti, ovvero che si cominci dall'eliminare una costante tra l'equazione data e la sua prima derivata, indi si differenzii la nuova equazione ottenuta, e collo stesso metodo si vada innanzi nel processo dell'eliminazione.

Così dall'equazione

$$(1) \quad x'' - ax - by = 0$$

si ha per mezzo di due successive differenziazioni

$$(2) \quad \begin{aligned} 2x - a - b \frac{dy}{dx} &= 0, \\ 2 - b \frac{d^2y}{dx^2} &= 0, \end{aligned}$$

ed eliminandone le costanti a e b , ne risulta

$$(3) \quad x'' \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Eliminando in vece la costante a dalle equazioni (1) e (2), si avrà

$$(4) \quad x'' + by - bx \frac{dy}{dx} = 0 :$$

da questa equazione differenziata si ottiene

$$(5) \quad x \left\{ 2 - b \frac{d^2y}{dx^2} \right\} = 0;$$

ed eliminando in fine la costante b dalle equazioni (4) e (5), si avrà la stessa equazione (3) di sopra ottenuta.

Esempio 1. Differenziando l'equazione

$$y'' = m(a'' - x''),$$

si avrà

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{mx}{y};$$

e da queste eliminando m , risulta

$$y = \frac{dy}{dx} \left\{ x - \frac{a^2}{x} \right\};$$

differenziando quest' ultima, si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \left\{ x - \frac{a^2}{x} \right\} + \frac{dy}{dx} \left\{ 1 + \frac{a^2}{x^2} \right\};$$

ed eliminando infine la costante a dalle due ultime equazioni, si ha l'equazione differenziale

$$xy \frac{d^2y}{dx^2} + x \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 - y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Esempio 2. Per eliminare α e β dall'equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

si ha da una prima differenziazione

$$(x - \alpha) + (y - \beta)y' = 0;$$

una seconda differenziazione ci darà

$$1 + y'' + (y - \beta)y'' = 0;$$

e dalle due avremo

$$y - \beta = -\frac{1 + y''}{y''}, \quad x - \alpha = \frac{1 + y''}{y''} y',$$

valori che trasformano l'equazione data in

$$\frac{(1 + y'')^2}{y''^2} = r^2.$$

Eliminazione delle funzioni arbitrarie.

Siano date due equazioni della forma

$$\begin{aligned} 1. & \quad f(x, y, z) = \alpha \\ 2. & \quad F(x, y, z, \varphi\alpha) = 0. \end{aligned}$$

La seconda rappresenterà una funzione delle sole variabili x, y, z , quando merchè la prima ne sia eliminata α . Si potrà quindi considerar z come funzione delle variabili indipendenti x ed y , e differenziare rispetto a queste variabili la seconda delle equazioni date. Le equazioni che ne risultano

$$3. \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dF}{d\varphi} \left\{ \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \right\} \varphi'\alpha = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{dF}{d\varphi} \left\{ \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \right\} \varphi'\alpha = 0,$$

insieme all'equazione 2, rendono possibile l'eliminazione delle funzioni $\varphi\alpha$ e $\varphi'\alpha$. Si avrà così un'equazione della forma

$$\psi \left\{ x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy} \right\} = 0,$$

la quale, liberata dalla funzione φ , contiene una relazione tra x, y, z e le derivate parziali di z . Perciò prende il nome di equazione differenziale parziale, e propriamente del primo ordine, poichè di quest'ordine soltanto sono le derivate in essa contenute.

L'eliminazione di $\varphi\alpha$ è d'importante utilità sol quando $\varphi\alpha$ indica una funzione arbitraria.

Esempio 1. Dalle equazioni

$$ax + by = \alpha, \quad z - \varphi\alpha = 0,$$

o più semplicemente dall'equazione

$$z = \varphi(ax + by),$$

in cui φ rappresenta una funzione arbitraria di x ed y , si hanno le derivate parziali

$$\frac{dz}{dx} - a\varphi' = 0, \quad \frac{dz}{dy} - b\varphi' = 0,$$

dimodochè l'eliminazione di φ e φ' darà

$$b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0.$$

Esempio 2. Differenziando l'equazione

$$y - nz = \varphi(x - mz)$$

rispetto ad x ed y , ne risulta

$$-n\frac{dz}{dx} = \left\{1 - m\frac{dz}{dx}\right\}\varphi'(x - mz),$$

$$1 - n\frac{dz}{dy} = -m\frac{dz}{dy}\varphi'(x - mz);$$

donde, eliminando la funzione $\varphi'(x - mz)$, si ha

$$m\frac{dz}{dx} + n\frac{dz}{dy} = 1.$$

Similmente da

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left\{\frac{x - a}{z - c}\right\}$$

si avrà l'equazione differenziale parziale

$$(x - a)\frac{dz}{dx} + (y - b)\frac{dz}{dy} = z - c.$$

Esempio 3. L'equazione

$$z = x^n \varphi\left\{\frac{y}{x}\right\} + y^n \psi\left\{\frac{y}{x}\right\}$$

esprime una funzione omogenea rispetto ad x ed y . Diffe-

renziandola rispetto ad x si ha

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} \varphi\left\{\frac{y}{x}\right\} - yx^{n-2} \varphi'\left\{\frac{y}{x}\right\} - \frac{y^{n+1}}{x^2} \psi'\left\{\frac{y}{x}\right\},$$

e facendo lo stesso per y ,

$$\frac{dz}{dy} = x^{n-1} \varphi'\left\{\frac{y}{x}\right\} + ny^{n-1} \psi\left\{\frac{y}{x}\right\} + \frac{y^n}{x} \psi'\left\{\frac{y}{x}\right\}.$$

Or moltiplicando la prima di queste due equazioni per x , la seconda per y ; addizionandole insieme e comparandone la somma all'equazione proposta, ne risulta

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = nz,$$

che rappresenta l'equazione della funzione omogenea di x ed y , che ha un grado di omogeneità indicato da n . Le due funzioni arbitrarie φ e ψ in realtà non ne rappresentano che una sola, poichè l'equazione proposta può scriversi sotto la forma

$$z = x^n \left[\varphi\left\{\frac{y}{x}\right\} + \left\{\frac{y}{x}\right\}^n \psi\left\{\frac{y}{x}\right\} \right] = x^n f\left\{\frac{y}{x}\right\}.$$

Se l'ottenuta equazione differenziale fosse di nuovo differenziata, si avrebbero rispetto alle due variabili indipendenti x ed y le equazioni trovate nel n° 41 per le tre variabili x, y, z .

Esempio 4. L'equazione

$$z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay)$$

dà le equazioni differenziali

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(x + ay) + \psi'(x - ay)$$

$$\frac{dz}{dy} = a \varphi'(x + ay) - a \psi'(x - ay)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \varphi''(x + ay) + \psi''(x - ay)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dx dy} &= a\varphi''(x+ay) - a\psi''(x-ay) \\ \frac{d^2 z}{dy^2} &= a^2\varphi''(x+ay) + a^2\psi''(x-ay);\end{aligned}$$

dalle quali si dedurrà facilmente l'equazione differenziale parziale del 2° ordine

$$a^2 \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{d^2 z}{dy^2} = 0.$$

Esempio 5. Dall'equazione

$$xf\alpha + y\varphi\alpha + z\psi\alpha = 1,$$

in cui α dinota una funzione di x ed y , si vogliono eliminare le funzioni f, φ, ψ , colla condizione che z sia tratta dall'equazione

$$xf\alpha + y\varphi'\alpha + z\psi'\alpha = 0,$$

f, φ, ψ indicando le derivate delle funzioni f, φ, ψ .

Differenziando l'equazione data rispetto ad x , si avrà

$$(xf\alpha + y\varphi'\alpha + z\psi'\alpha)\frac{d\alpha}{dx} + f\alpha + \psi\alpha\frac{dz}{dx} = 0,$$

ed avendo riguardo all'equazione di condizione, sarà

$$f\alpha + \psi\alpha\frac{dz}{dx} = 0.$$

Nello stesso modo si avrà, differenziando rispetto ad y ,

$$\varphi\alpha + \psi\alpha\frac{dz}{dy} = 0.$$

Queste due equazioni dimostrano che $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ sono funzioni di α ; si potrà dunque riguardar l'una delle derivate come funzione dell'altra, ossia stabilir l'equazione

$$\frac{dz}{dx} = F\left\{\frac{dz}{dy}\right\}.$$

Or eliminando la funzione F per mezzo delle derivate par-

ziali, si otterrà l'equazione differenziale del second'ordine

$$\left\{ \frac{d^2 z}{dx^2} \right\} \left\{ \frac{d^2 z}{dy^2} \right\} - \left\{ \frac{d^2 z}{dx dy} \right\}^2 = 0.$$

43.

Continuità delle derivate parziali.

Sia $u = F(x, y)$ una funzione delle variabili indipendenti x ed y , continua tra i limiti

$$x = x_0 \text{ ed } x = x_1, \quad y = y_0 \text{ ed } y = y_1.$$

Da questo concetto deriva che per qualsiasi valore y_n di y , tale che sia $y_n > y_0$ ed $y_n < y_1$, $F(x, y_n)$ debba esser una funzione continua di x del pari che la derivata parziale $\frac{dF(x, y_n)}{dx}$, se ad x sia dato un valore compreso tra i limiti x_0 ed x_1 ; imperocchè nel n° 16 si è dimostrato che la derivata di una funzione continua, dev'esser continua tra gli stessi limiti della funzione primitiva. Per la stessa ragione la derivata parziale $\frac{dF(x_n, y)}{dy}$ rappresenterà una funzione continua di y , finchè y si troverà tra y_0 ed y_1 , ed x_n tra x_0 ed x_1 . E poichè si ha

$$du = \frac{dF(x, y)}{dx} dx + \frac{dF(x, y)}{dy} dy,$$

segue dall'ammessa condizione che du sia un infinitamente piccolo.

Dalla continuità delle funzioni $\frac{dF(x, y)}{dx}$ e $\frac{dF(x, y)}{dy}$ segue immediatamente che se della prima si prenda la derivata rispetto ad x e della seconda rispetto ad y , sarà $\frac{d^2 F(x, y)}{dx^2}$ una funzione continua rispetto ad x , e $\frac{d^2 F(x, y)}{dy^2}$ una funzione continua rispetto ad y .

Ma $\frac{dF(x, y)}{dx}$ è funzione continua non solamente di x , ma di y ancora; imperocchè essa è funzione continua di x non semplicemente per un solo valore di y , ma piuttosto per ogni valore di questa variabile, che sia compreso tra y_0 ed y_1 ; ed in conseguenza essa conserverà il carattere di continuità, quando variando rispetto ad y tra gl' indicati limiti, x prenda uno qualunque dei valori compresi tra x_0 ed x_1 .

Similmente si dimostra che $\frac{dF(x, y)}{dy}$ è funzione continua di y egualmente che di x . Dovrà dunque $\frac{d^2F(x, y)}{dxdy}$ esser funzione continua tanto rispetto ad x , che rispetto ad y ; perciò sarà

$$d^2u = \frac{d^2F(x, y)}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2F(x, y)}{dxdy} dxdy + \frac{d^2F(x, y)}{dy^2} dy^2$$

un'infinitesimo del 2° ordine, se x ed y rimangono tra i limiti dati.

Estendendo questa conclusione alle derivate parziali di ordine superiore, si perviene al risultamento che ogni derivata parziale di ordine superiore di una funzione di due variabili indipendenti rimane continua tra gli stessi limiti, pei quali è continua la funzione data.

Questo teorema vale ancora per le funzioni di oltre a due variabili, come è facile ad esserne convinto. Oltrecchè egli segue quasi immediatamente dalla proposizione del n.° 16, considerando le variabili indipendenti x ed y come funzioni di una nuova variabile t , imperocchè dai n.° 35 e 39 si rileva che il differenziale della funzione $F(x, y)$, in cui x ed y si considerano come indipendenti, ha la stessa forma del differenziale di essa funzione, preso rispetto a t .

C. Valori rimarchevoli delle funzioni.

46.

Valori indeterminati delle funzioni.

Rappresenti u una funzione di due variabili indipendenti x ed y , nella quale facendo $x = x$, ed $y = y$, supponiamo che ne risulti il valore $\frac{0}{0}$, ciò che importa che la funzione abbia la forma :

$$1. \quad u = \frac{f(x, y)}{F(x, y)};$$

e poniamo ancora che le funzioni f ed F , per valori prossimi ai già dati, restino continue tanto rispetto ad x che rispetto ad y . A fin di trovare il vero valore dell'espressione indeterminata $\frac{0}{0}$, noi cominciamo dal considerare $f(x, y)$ come funzione della sola x ; ed in questo caso pel n° 15 abbiamo

$$f(x_1 + \alpha, y) = f(x_1, y) + \alpha \frac{df(x_1, y)}{dx}.$$

E considerando $f(x, y)$ come funzione della sola y , avremo similmente

$$f(x, y_1 + \beta) = f(x, y_1) + \beta \frac{df(x, y_1)}{dy}$$

α e β disegnando grandezze infinitesime; e se in conseguenza della continuità delle funzioni scambieremo

$$\frac{df(x_1, y)}{dx} \text{ con } \frac{df(x_1 + \Delta\alpha, y)}{dx},$$

$$\frac{df(x, y_1)}{dy} \text{ con } \frac{df(x, y_1 + \Delta\beta)}{dy},$$

Δ e Δ' disegneranno frazioni vere. Quindi se consideriamo $f(x, y)$ come funzione di x ed y nel tempo stesso, avremo pei valori speciali x_1 ed y_1 :

$$2. f(x_1 + \alpha, y_1 + \beta) = f(x_1, y_1) + \alpha \frac{df(x_1, y_1)}{dx} + \beta \frac{df(x_1, y_1)}{dy}$$

Similmente si avrà

$$3. F(x_1 + \alpha, y_1 + \beta) = F(x_1, y_1) + \alpha \frac{dF(x_1, y_1)}{dx} + \beta \frac{dF(x_1, y_1)}{dy}.$$

E poichè conformemente all'ipotesi fatta è $f(x_1, y_1) = 0$ e $F(x_1, y_1) = 0$, l'equazione 1 ci darà pei valori $x_1 + \alpha, y_1 + \beta$, che immediatamente seguono x_1 ed y_1 ,

$$4. \quad u = \frac{\alpha \frac{df(x_1, y_1)}{dx} + \beta \frac{df(x_1, y_1)}{dy}}{\alpha \frac{dF(x_1, y_1)}{dx} + \beta \frac{dF(x_1, y_1)}{dy}},$$

In generale questa espressione non ci fa conoscere il valore di $\frac{0}{0}$, giacchè manca una relazione tra α e β ; e queste spariranno nel solo caso che $\frac{df(x_1, y_1)}{dx}$ e $\frac{dF(x_1, y_1)}{dx}$, ovvero $\frac{df(x_1, y_1)}{dy}$ e $\frac{dF(x_1, y_1)}{dy}$ divengano nulle ad un tempo. Laonde se per mezzo dell'equazione 4 dovrà determinarsi il valore di $\frac{0}{0}$, è d'uopo che una relazione sia stabilita tra α e β , vale a dire tra l'alterazione di x e quella di y ; e con ciò tra x ed y . Se questa relazione è data, sarà determinata $\frac{dy}{dx}$ ossia y' ; ma questa derivata rimarrebbe tuttavia incognita, se l'indicata relazione fosse in generale espressa senza la definizione della sua natura. In questo caso dall'equazione 4, si avrà

$$u = \frac{\frac{df(x_1, y_1)}{dx} dx + \frac{df(x_1, y_1)}{dy} dy}{\frac{dF(x_1, y_1)}{dx} dx + \frac{dF(x_1, y_1)}{dy} dy},$$

ovvero, dividendo per dx e ponendo df e dF in vece di $df(x_1, y_1)$ e $dF(x_1, y_1)$,

$$5. \quad u = \frac{\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y'}{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y'}$$

Se numeratore e denominatore di questa equazione divengono nel tempo stesso nulli, si tornerà a differenziarli rispetto ad x , e così si avrà

$$6. \quad u = \frac{\frac{d^2f}{dx^2} + 2 \frac{d^2f}{dx dy} y' + \frac{d^2f}{dy^2} y'^2}{\frac{d^2F}{dx^2} + 2 \frac{d^2F}{dx dy} y' + \frac{d^2F}{dy^2} y'^2}$$

Così ancora, se nel tempo stesso fossero

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dx dy} = 0, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = 0 \\ \frac{d^2F}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dx dy} = 0, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = 0, \end{aligned}$$

si ricorrerebbe ai differenziali terzi delle funzioni f ed F , prendendo y come funzione di x , e così in seguito.

Esempio 1. Nell'ipotesi di $x = 1$, $y = 1$, sarà

$$u = \frac{1y + 1x}{x + 2y - 3} = \frac{0}{0}.$$

Qui abbiamo pei detti valori di x ed y

$$\frac{df}{dx} = 1, \quad \frac{df}{dy} = 1, \quad \frac{dF}{dx} = 1, \quad \frac{dF}{dy} = 2;$$

quindi l'equazione 5 ci darà

$$u = \frac{1 + y'}{1 + 2y'}$$

valore che rimane indeterminato, poichè y' potrà prendere tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$, finchè non sarà data la natura della funzione y di x .

Esempio 2. La funzione

$$u = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} - 1}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - y + 1}$$

prende la forma di $\frac{0}{0}$ nell'ipotesi di $x = 1$ ed $y = 1$. Ma per questo esempio si ha

$$\frac{df}{dx} = 0, \frac{df}{dy} = \frac{3}{2}, \frac{dF}{dx} = 0, \frac{dF}{dy} = -1;$$

sarà dunque

$$u = \frac{\frac{3}{2} y'}{-y'} = -\frac{3}{2};$$

e con ciò rimane determinato il valore di $\frac{0}{0}$.

Esempio 3. Nell'ipotesi di $x = 0$ ed $y = 0$, si ha

$$u = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}.$$

Ma essendo

$$\frac{df}{dx} = \frac{dF}{dx} = 0, \frac{df}{dy} = \frac{dF}{dy} = 0,$$

si ricorrerà all'equazione 6, nella quale ponendo

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2, \frac{d^2f}{dx dy} = 2, \frac{d^2f}{dy^2} = 2, \frac{d^2F}{dx^2} = 2, \frac{d^2F}{dx dy} = 0, \frac{d^2F}{dy^2} = 2,$$

si ottiene

$$u = \frac{(1+y)^2}{1+y^2}.$$

Questo valore di u sarà compreso tra 0 e 2, come si troverà cercando il massimo o il minimo valore di y' nell'ipotesi di $x = 0$ ed $y = 0$.

47.

Massimi e minimi delle funzioni.

Dicesi massimo (n° 19) quel valore di una funzione, nel quale essa finisce di aumentare e comincia a diminuire. Dietro questa definizione la funzione

$$u = F(x, y, z, \dots)$$

delle variabili indipendenti $x, y, z, \dots$ avrà per valori $x_1, y_1, z_1, \dots$ un massimo in

$$u_1 = F(x_1, y_1, z_1, \dots),$$

se ogni valore di u compreso tra

$$F(x_1 - dx, y_1 - dy, z_1 - dz, \dots) \text{ e } F(x_1 + dx, y_1 + dy, z_1 + dz, \dots)$$

risulterà minore di u_1 . E poichè le variabili $x, y, z, \dots$ si pongono tra esse indipendenti, così anche i valori

$$F(x_1 \mp dx, y_1 \mp dy, z_1 \mp dz, \dots), F(x_1 \mp dx, y_1 \mp dy, z_1 \mp dz, \dots), \dots$$

dovranno in vicinanza di $x_1, y_1, z_1, \dots$ risultare minori di u_1 . Laonde se u_1 è un massimo, dovrà $F(x, y, z, \dots)$ in vicinanza di questo valore essere ancora un massimo per ciascuna delle variabili indipendenti.

Nello stesso modo si dimostra che rispetto al valore minimo

$$u_1 = F(x_1, y_1, z_1, \dots) \text{ della funzione } u = F(x, y, z, \dots),$$

ossia rispetto al valore in cui la funzione cessa di diminuire per cominciare a crescere, essa sarà un minimo per ciascuna delle variabili indipendenti, quando si scambierà x con x_1 , o y con y_1 , o z un z_1 , ecc.

Or sia

$$u = F(x, y)$$

una funzione di due variabili indipendenti, e poniamo, a fin di scoprire le condizioni del massimo, che sia data una relazione arbitraria tra y ed x , dimodochè u valga come funzione della sola x . Differenziando u rispetto ad x si avrà

$$\begin{aligned} 1. \quad du &= \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} dx, \\ 2. \quad d^2u &= \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} \cdot \frac{dy}{dx} dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 dx^2 + \\ &\quad \frac{du}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} dx^2. \end{aligned}$$

Se u ed y vengono riguardate come funzioni di x , le condizioni del massimo saranno (n° 19)

$$du = 0, \quad d^2u < 0,$$

e quelle del minimo

$$du = 0, \quad d^2u > 0.$$

E queste condizioni dovendo esser soddisfatte qualunque relazione abbia luogo tra y ed x , segue dall'equazione 1 che si pel massimo, come pel minimo debba essere

$$3. \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0,$$

e che in conseguenza l'equazione 2 si compendierà nella seguente ineguaglianza

$$3. \quad \frac{d^2u}{dx^2} + 2 \frac{d^2u}{dxdy} \cdot y' + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot y'^2 \geq 0,$$

appartenendo al minimo il segno superiore ed al massimo l'inferiore. Or mentre questa ineguaglianza ha luogo, il primo membro dell'equazione non muta segno nè pel massimo nè pel minimo; dunque le radici dell'equazione

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2 \frac{d^2u}{dxdy} \cdot y' + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot y'^2 = 0,$$

risolta rispetto ad y' , dovranno riuscire immaginarie, ed in conseguenza dovrà essere

$$\left\{ \frac{d^2u}{dxdy} \right\}^2 - \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} < 0.$$

Ciò è possibile nel solo caso che $\frac{d^2u}{dx^2}$ e $\frac{d^2u}{dy^2}$ risultino con uno stesso segno dopo avervi sostituito i valori di x ed y , dedotti dalle equazioni 3.

Poniamo che realmente per $x = x_1$ ed $y = y_1$ abbia luogo un massimo; vi sarà ancora un massimo per la sola $x = x_1$ e per la sola $y = y_1$. Sarà dunque

$$\frac{d^2u}{dx^2} < 0 \text{ e } \frac{d^2u}{dy^2} < 0.$$

Similmente si avrà pel minimo

$$\frac{d^2u}{dx^2} > 0 \text{ e } \frac{d^2u}{dy^2} > 0.$$

Dietro ciò le condizioni del massimo saranno

$$3. \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0,$$

$$6. \quad \frac{d^2u}{dx^2} < 0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} < 0, \quad \left\{ \frac{d^2u}{dxdy} \right\}^2 - \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} < 0.$$

e pel minimo

$$3. \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0$$

$$7. \quad \frac{d^2u}{dx^2} > 0, \frac{d^2u}{dy^2} > 0, \left\{ \frac{d^2u}{dxdy} \right\}^2 - \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} > 0.$$

Laonde per definire se una funzione $u = F(x, y)$ di due variabili indipendenti ammetta un valore massimo o minimo, bisognerà dedurre i valori di x ed y dalle equazioni 3, indi sostituirli nelle derivate parziali del second'ordine. Se questi valori renderanno soddisfatte le ineguaglianze 6, la funzione darà un massimo, e se in vece avran luogo le ineguaglianze 7, la funzione darà un minimo.

Se poi fossero contemporaneamente

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 0,$$

e quindi $d^2u = 0$, bisognerà che sia ancora

$$d^3u = 0,$$

e che il polinomio rappresentante d^4u non possa variare di segno, cosicchè l'equazione $d^4u = 0$, risolta rispetto ad y' , non possa dare se non radici immaginarie.

Analoghe condizioni, ma più complesse nella forma si troverebbero pel massimo e minimo di una funzione $u = F(x, y, z)$ di tre variabili indipendenti.

Esempio 1. Cercando il massimo o il minimo della funzione

$$u = \frac{a + bx + cy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

si ha

$$\frac{du}{dx} = \frac{(b - ax) + (by - cx)y}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{(c - ay) + (cx - by)x}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

e per ciò

$$b - ax + (by - cx)y = 0, \quad c - ay + (cx - by)x = 0.$$

Eliminando y da queste due equazioni si avrà

$$(b - ax)(a^2 + c^2 + 2abx + (b^2 + c^2)x^2) = 0.$$

Ed il secondo fattore di quest'ultima equazione è tale che se fosse pareggiato a zero, darebbe valori immaginari per x . Non avendo riguardo ad esso, si otterrà

$$b - ax = 0, \quad by - cx = 0, \quad c - ay = 0,$$

poichè y non può esser nullo. Abbiamo inoltre

$$\frac{d^2u}{dx^2} = - \frac{(a + cy)(1 + x^2 + y^2) + 3x[b - ax + (by - cx)y]}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = - \frac{(a + bx)(1 + x^2 + y^2) + 3y[c - ay + (cx - by)x]}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = - \frac{(2by - cx)(1 + x^2 + y^2) - 3y[b - ax + (by - cx)y]}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

ovvero, dopo avervi introdotto i valori di x ed y ,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = - \frac{a^2(a^2 + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = - \frac{a^2(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = - \frac{a^2bc}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$6 \quad \left\{ \frac{d^2u}{dxdy} \right\}^2 - \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} = - \frac{a^6}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Le condizioni 6 son dunque soddisfatte, ed in conseguenza ha luogo un massimo, cioè

$$u_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Esempio 2. Fra tutti i triangoli di egual perimetro, si cerca quello di minima superficie.

Indicando con $2a$ il perimetro costante, e con x ed y due lati del triangolo, sarà $2a - y - x$ il terzo lato, e

$$[a(a-x)(a-y)(x+y-a)]^{\frac{1}{2}} = v$$

n'esprimerà la superficie. Se v dev'essere un massimo, coi medesimi valori di x ed y dovrà esserlo ancora il numero v^2 , e viceversa. Ponendo in conseguenza

$$u = a(a-x)(a-y)(x+y-a),$$

ne risulta

$$\frac{du}{dx} = a(a-y)(2a-2x-y),$$

$$\frac{du}{dy} = a(a-x)(2a-2y-x).$$

Or le due equazioni di condizione

$$a(a-x)(2a-2x-y) = 0, \quad a(a-x)(2a-2y-x) = 0,$$

non potendo ammettere le soluzioni $a-y=0$ ed $a-x=0$, si ridurranno a

$$2a-2x-y=0, \quad 2a-2y-x=0;$$

donde

$$x = y = \frac{2}{3} a.$$

Si ha in ultimo

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -2a(a-y), \quad \frac{d^2u}{dy^2} = -2a(a-x), \quad \frac{d^2u}{dx dy} = -a(3a-2x-2y),$$

ossia

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2}{3} a^2, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{2}{3} a^2, \quad \frac{d^2u}{dx dy} = -\frac{1}{3} a^2;$$

quindi

$$\left\{ \frac{d^2u}{dx dy} \right\}^2 - \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{1}{3} a^4.$$

Il triangolo, che sotto un dato perimetro contiene la massima superficie, è dunque l'equilatero, come è noto per la Geometria piana.

Esempio 3. Nel triangolo ACB si cerca un punto M, tale che la somma $AM + BM + CM$ sia un minimo.

Disegnino a e b i lati BC ed AC, C l'angolo ACB, y la CM, ed x l'angolo ACM; avremo

$$AM = \sqrt{b^2 + y^2 - 2by \cos x}$$

$$BM = \sqrt{a^2 + y^2 - 2ay \cos(C - x)}.$$

La somma quindi delle tre rette AM, BM, CM, sarà espressa da

$$u = y + \sqrt{b^2 + y^2 - 2by \cos x} + \sqrt{a^2 + y^2 - 2ay \cos(C - x)},$$

le cui derivate parziali danno

$$\frac{du}{dx} = \frac{by \sin x}{AM} - \frac{ay \sin(C - x)}{BM} = 0,$$

$$\frac{du}{dy} = 1 + \frac{y - b \cos x}{AM} + \frac{y - a \cos(C - x)}{BM} = 0.$$

Dalla prima di queste equazioni risulta

$$\frac{b \sin x}{AM} = \frac{a \sin(C - x)}{BM};$$

e se dai punti A e B sul prolungamento di CM si abbassino le perpendicolari AH e BK, avremo

$$\frac{AH}{AM} = \frac{BK}{BM}, \text{ ossia } \sin AMH = \sin BMK,$$

in conseguenza sarà l'angolo AMH eguale all'angolo BMK.

La seconda equazione, ossia

$$\frac{b \cos x - y}{AM} + \frac{a \cos(C - x) - y}{BM} = 1,$$

dimostra che

$$\frac{MH}{AM} + \frac{MK}{BM} = 1,$$

ossia $\cos AMH + \cos BMK = 1$, quindi $\cos AMH = \frac{1}{2}$; donde

$AMH = BMK = 60$ gradi, ed $AMB = 120$ gradi. Da ciò si rileva chiaramente che ciascuno degli angoli AMC e BMC contiene ancora 120 gradi.

Questi valori non potranno giammai corrispondere ad un massimo, poichè la somma $AM + BM + CM$ aumenterà indefinitamente col continuo allontanarsi del punto M dai lati del triangolo; essi dunque corrisponderanno ad un minimo.

La posizione del punto M si avrà mercè una semplicissima costruzione: su due dei lati del triangolo dato si costruiscano due triangoli equilateri; le circonferenze dei cerchi circoscritti a questi triangoli s'intersecheranno nel punto M .

Se la somma dei quadrati delle linee AM , BM , CM debba essere un minimo, il punto M sarà centro di gravità del triangolo ABC ; e si avrà

$$AM = \frac{1}{3} \sqrt{(2b^2 + 2c^2 - a^2)}$$

$$BM = \frac{1}{3} \sqrt{(2a^2 + 2c^2 - b^2)}$$

$$CM = \frac{1}{3} \sqrt{(2a^2 + 2b^2 - c^2)},$$

$$\text{ed il minimo sarà} = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Esempio 4. Si cerca il parallelepipedo rettangolare che sotto il volume a^3 contenga la minima superficie.

Rappresentando x , y , z i tre spigoli convergenti del parallelepipedo, ne avremo la superficie

$$u = 2xy + 2xz + 2yz.$$

Ma essendo $xyz = a^3$, ed in conseguenza $z = \frac{a^3}{xy}$, sarà

$$u = 2xy + \frac{2a^3}{y} + \frac{2a^3}{x};$$

$$\text{quindi } \frac{du}{dx} = 2y - \frac{2a^3}{x^2}, \frac{du}{dy} = 2x - \frac{2a^3}{y^2};$$

dove $x = y$, ed $x = y = z = a$.

Il cubo ha dunque la superficie minima o massima ; ma poichè

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{4a^2}{x^3} = 4, \quad \frac{d^2u}{dx dy} = 2, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = 4,$$

quindi
$$\left\{ \frac{d^2u}{dx dy} \right\}^2 - \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} = -12,$$

così la superficie è un minimo.

48.

Continuazione.

Rappresenti

1.
$$u = F(x, y, z, \dots)$$

una funzione di n variabili, congiunte mercè le m equazioni di condizione

2.
$$f(x, y, z, \dots) = 0, \quad \varphi(x, y, z, \dots) = 0, \dots$$

dimodochè non vi saranno che $n - m$ variabili realmente indipendenti. Per ottenere il massimo o il minimo della funzione u , si potranno primieramente eliminare m variabili dalle equazioni date, ovvero attenersi al seguente metodo. Avremo in primo luogo $du = 0$, ossia

3.
$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz + \dots = 0.$$

Nel tempo stesso le equazioni 2 ci danno

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz + \dots = 0,$$

4.
$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz + \dots = 0,$$

.

Potendosi mercè le equazioni 3 e 4 eliminare m differenziali $dx, dy, dz, \dots$, si avranno $n - m$ equazioni le quali

$$ax + by + cz - h = f(x, y, z) = 0.$$

Essendo

$$\frac{du}{dx} = mx^{m-1} \cdot y^n z^r = \frac{m}{x} u, \quad \frac{du}{dy} = \frac{n}{y} u, \quad \frac{du}{dz} = \frac{r}{z} u,$$

$$\frac{df}{dx} = a, \quad \frac{df}{dy} = b, \quad \frac{df}{dz} = c;$$

l'equazioni 6 ci daranno

$$\frac{m}{ax} = \frac{n}{by} = \frac{r}{cz} = \frac{m+n+r}{h},$$

donde

$$x = \frac{m}{a} \cdot \frac{h}{m+n+r}, \quad y = \frac{n}{b} \cdot \frac{h}{m+n+r}, \quad z = \frac{r}{c} \cdot \frac{h}{m+n+r}.$$

Abbiamo ancora

$$\frac{du}{u} = \frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y} + \frac{rdz}{z};$$

e poichè nella derivata seconda

$$\frac{d^2u}{u} - \left\{ \frac{du}{u} \right\}^2 = -m \left\{ \frac{dx}{x} \right\}^2 - n \left\{ \frac{dy}{y} \right\}^2 - r \left\{ \frac{dz}{z} \right\}^2$$

si ha sempre $du = 0$ rispetto agli ottenuti valori di x, y, z , sarà

$$d^2u = -u \left[m \left\{ \frac{dx}{x} \right\}^2 + n \left\{ \frac{dy}{y} \right\}^2 + r \left\{ \frac{dz}{z} \right\}^2 \right].$$

Essendo così d^2u sempre negativa, la funzione u risulterà un massimo per gli anzidetti valori.

Esempio 2. Poniamo che si voglia determinare il massimo o il minimo della funzione

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

nell'ipotesi che le variabili x, y, z debbano soddisfare alle

due equazioni

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = u^4$$

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Dopo aver differenziato queste tre equazioni, si moltiplichino le derivate parziali della seconda per $-h$ e quella della terza per k ; avremo per le equazioni 5 :

$$x + kA = a^2hx$$

$$y + kB = b^2hy$$

$$z + kC = c^2hz.$$

Addizionando queste tre equazioni, dopo aver moltiplicato la prima per x , la seconda per y e la terza per z , e riducendone la somma per mezzo delle equazioni precedenti, avremo

$$u^2 = hu^4, \text{ ossia } h = \frac{1}{u^2};$$

la quale relazione, introdotta nelle ultime equazioni, ci dà

$$\left\{ \frac{a^2}{u^2} - 1 \right\} x = kA$$

$$\left\{ \frac{b^2}{u^2} - 1 \right\} y = kB$$

$$\left\{ \frac{c^2}{u^2} - 1 \right\} z = kC,$$

ossia

$$x = \frac{kAu^2}{a^2 - u^2}, \quad y = \frac{kBu^2}{b^2 - u^2}, \quad z = \frac{kCu^2}{c^2 - u^2}.$$

In fine moltiplicando la prima di queste ultime equazioni per A , la seconda per B e la terza per C ; indi facendone l'addizione si perviene all'equazione quadratica rispetto ad u^2 ,

$$\frac{A^2}{a^2 - u^2} + \frac{B^2}{b^2 - u^2} + \frac{C^2}{c^2 - u^2} = 0,$$

la quale darà il valore di u ed in conseguenza quelli di x, y, z , corrispondenti al massimo e minimo.

D. Le funzioni in serie.

49.

Serie di Taylor e di Stirling.

Sia

$$u = f(x, y)$$

una funzione di due variabili indipendenti x ed y , la quale resti continua tra i limiti

$$x = x_0 \text{ ed } y = y_0, \quad x = x_1 \text{ ed } y = y_1.$$

Si vuol sapere qual sarà il valore di u , quando x diverrà $x + h$ ed y diverrà $y + k$, nell'ipotesi purtuttavia che siano soddisfatte le ineguaglianze

$$x_1 > x + h > x_0, \quad y_1 > y + k > y_0.$$

Poniamo che gl'incrementi h e k siano funzioni di una nuova variabile α , la quale renda soddisfatte le relazioni

$$h = \alpha h_1, \quad k = \alpha k_1;$$

poniamo inoltre che le variabili x ed y , prescindendo dalla loro indipendenza, siano ancora funzioni di α ; ed in fine introducendo per ragione di brevità la relazione

$$F(x + h, y + k) = F(x + \alpha h_1, y + \alpha k_1) = f\alpha,$$

la serie di Stirling (n° 26) ci darà

$$\begin{aligned} 1. f\alpha = f0 + \frac{\alpha}{1} f'0 + \frac{\alpha^2}{1.2} f''0 + \frac{\alpha^3}{1.2.3} f'''0 + \dots + \frac{\alpha^n}{1.2.3\dots n} f^{(n)}0 \\ + \frac{\alpha^{n+1}}{1.2.3\dots n} f^{(n+1)}(\Delta\alpha), \end{aligned}$$

purchè la relazione arbitrariamente stabilita tra x, y ed α non alteri la continuità della funzione tra i limiti dati.

Or la forma del differenziale rimarrà sempre la stessa (n° 35 e 39), sia che le variabili x ed y si riguardino tra loro indipendenti, sia che si riguardino dipendenti; dimodochè la loro indipendenza si potrà ristabilire, se 'ciò faccia all'uopo per eliminare la introdotta variabile α . Servirà per questo la funzione

$$F(x + ah_1, y + ak_1),$$

la quale mediatamente dipende da α ; imperocchè avremo

$$f'\alpha = \frac{dF(x + ah_1, y + ak_1)}{d\alpha} h_1 + \frac{dF(x + ah_1, y + ak_1)}{dy} k_1,$$

ovvero più semplicemente

$$f'\alpha = \frac{df_x}{d\alpha} h_1 + \frac{df_y}{dy} k_1;$$

similmente avremo

$$\begin{aligned} f''\alpha &= \frac{d^2 f_x}{d\alpha^2} h_1^2 + 2 \frac{d^2 f_{xy}}{d\alpha^2} h_1 k_1 + \frac{d^2 f_y}{dy^2} k_1^2; \\ f''' \alpha &= \frac{d^3 f_x}{d\alpha^3} h_1^3 + 3 \frac{d^3 f_{xy}}{d\alpha^3} h_1^2 k_1 + 3 \frac{d^3 f_{xy^2}}{d\alpha^3} h_1 k_1^2 + \frac{d^3 f_y}{dy^3} k_1^3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Or se in queste espressioni si ponga $\alpha = 0$, $f0$ si trasformerà in $F(x, y)$, ed avremo

$$\begin{aligned} f0 &= \frac{dF}{dx} h_1 + \frac{dF}{dy} k_1, \\ f'0 &= \frac{d^2 F}{dx^2} h_1^2 + 2 \frac{d^2 F}{dxdy} h_1 k_1 + \frac{d^2 F}{dy^2} k_1^2, \\ f''0 &= \frac{d^3 F}{dx^3} h_1^3 + 3 \frac{d^3 F}{dx^2 dy} h_1^2 k_1 + 3 \frac{d^3 F}{dxdy^2} h_1 k_1^2 + \frac{d^3 F}{dy^3} k_1^3. \end{aligned}$$

Se questi valori sono introdotti nell'equazione 1, α sparirà appena h_1 e k_1 saranno di nuovo mutati in h e k ; dimodochè si avrà

$$\begin{aligned}
 2. \quad F(x+h, y+k) = & F(x, y) + \frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k \\
 & + \frac{d^2F}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2F}{dxdy} \frac{hk}{1.2} + \frac{d^2F}{dy^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} \\
 & + \frac{d^3F}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + 3 \frac{d^3F}{dxdy^2} \cdot \frac{h^2k}{1.2.3} \\
 & + 3 \frac{d^3F}{dxdy^2} \cdot \frac{hk^2}{1.2.3} + \frac{d^3F}{dy^3} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} \\
 & + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\dots n} f^{(n+1)}(\Delta\alpha).
 \end{aligned}$$

Per ciò che riguarda il termine residuo di questa serie, potremo porre immediatamente

$$f^{(n+1)}(\Delta\alpha) = F^{(n+1)}(x + \Delta\alpha h, y + \Delta\alpha k),$$

e poichè α è quantità arbitraria, la potremo supporre = 1 nello sviluppo della derivata dell'ordine $n+1$, e così otterremo

$$f^{(n+1)}(\Delta\alpha) = F^{(n+1)}(x + \Delta h, y + \Delta k):$$

in questo modo α sparirà interamente nell'espressione del termine residuo.

Or questo termine potrà esser trascurato, giacchè la funzione $F(x, y)$ essendo continua tra x_0 ed x_1 , y_0 ed y_1 , tali saranno ancora le sue parziali derivate. Quindi supponendo che nello sviluppo del binomio

$$\left\{ \frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k \right\}^m \text{ per } m = 2, 3, \dots$$

la forma $\left\{ \frac{dF}{dx} \right\}^m$ si scambi con $\frac{d^m F}{dx^m}$ ecc., l'equazione 2 potrà ricevere l'espressione simbolica,

$$\begin{aligned}
 3. \quad F(x+h, y+k) = & F(x, y) + \left\{ \frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k \right\} \\
 & + \frac{1}{1.2} \left\{ \frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k \right\}^2 \\
 & + \frac{1}{1.2.3} \left\{ \frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k \right\}^3 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

*

Sia infine $u = F(x, y, z)$ una funzione di tre variabili indipendenti, x, y, z , la quale poniamo continua tra i limiti

$$x_0 \text{ ed } x_1, \quad y_0 \text{ ed } y_1, \quad z_0 \text{ ed } z_1;$$

e si abbiano inoltre rispetto agli incrementi rispettivi delle variabili x, y, z le relazioni

$$x_1 > x + h > x_0, \quad y_1 > y + k > y_0, \quad z_1 > z + i > z_0.$$

Si facciano x, y, z dipendenti da una nuova variabile α , e si ponga

$$h = \alpha h_1, \quad k = \alpha k_1, \quad i = \alpha i_1;$$

così avremo, applicando a $F(x + h, y + k, z + i)$ il metodo seguito rispetto all'equazione 1,

$$\begin{aligned} 4. \quad F(x + h, y + k, z + i) = & F(x, y, z) + \left\{ \frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k + \frac{dF}{dz} i \right\} \\ & + \frac{1}{1.2} \left\{ \frac{d^2 F}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2 F}{dx dy} h k + \frac{d^2 F}{dy^2} k^2 + \right. \\ & + \frac{1}{1.2.3} \left\{ \frac{d^3 F}{dx^3} h^3 + 3 \frac{d^3 F}{dx^2 dy} h^2 k + 3 \frac{d^3 F}{dx dy^2} h k^2 + \right. \\ & + \frac{d^3 F}{dz^3} i^3 + \dots \end{aligned}$$

avvertendo però che nello sviluppo delle diverse potenze del trinomio la forma $(dF)^m$ dovrà essere scambiata con $d^m F$.

Le serie 3 e 4 rappresentano quelle di Taylor pel caso di due e tre variabili indipendenti, e mostrano in pari tempo qual dovrà essere la forma dell'espressione di $F(x + h, y + k, z + i, \dots)$ pel caso di un maggior numero di variabili.

Se la funzione $F(x, y)$ rimane continua nell'ipotesi di $x = 0$ ed $y = 0$, e per questi valori la rappresentiamo con F_0 , avremo (n° 27) che l'equazione 3 si trasformerà in

$$\begin{aligned} 5. \quad F(x, y) = & F_0 + \left\{ \frac{dF_0}{dx} x + \frac{dF_0}{dy} y \right\} + \frac{1}{1.2} \left\{ \frac{d^2 F_0}{dx^2} x^2 + 2 \frac{d^2 F_0}{dx dy} x y + \right. \\ & + \frac{1}{1.2.3} \left\{ \frac{d^3 F_0}{dx^3} x^3 + 3 \frac{d^3 F_0}{dx^2 dy} x^2 y + \dots \right\} + \dots; \end{aligned}$$

e sarà questa l'espressione della serie di Stirling pel caso di due variabili indipendenti, x ed y .

Esempio 1. Rispetto alla funzione

$$F(x, y) = x^m \cdot y^n$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= mx^{m-1} y^n, & \frac{dF}{dy} &= nx^m y^{n-1}, \\ \frac{d^2F}{dx^2} &= m(m-1)x^{m-2} y^n, & \frac{d^2F}{dx dy} &= mn x^{m-1} y^{n-1}, \\ & & \frac{d^2F}{dy^2} &= n(n-1)x^m y^{n-2}, \\ \frac{d^3F}{dx^3} &= m(m-1)(m-2)x^{m-3} y^n, & \frac{d^3F}{dx^2 dy} &= mn(m-1)x^{m-2} y^{n-1}, \\ \frac{d^3F}{dx dy^2} &= mn(n-1)x^{m-1} y^{n-2}, & \frac{d^3F}{dy^3} &= n(n-1)(n-2)x^m y^{n-3}, \\ & & & \text{ecc. ecc.} \end{aligned}$$

Or se nella funzione data si trasmuti x in $x+h$ ed y in $y+k$, si avrà

$$\begin{aligned} (x+h)^m (y+k)^n &= \left\{ x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} h^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} h^3 + \dots \right\} y^n \\ &+ \left\{ nx^m k + \frac{mn}{1 \cdot 1} x^{m-1} hk + \frac{mn(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 1} x^{m-2} h^2 k + \dots \right\} y^{n-1} \\ &+ \left\{ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^m k^2 + \frac{mn(n-1)}{1 \cdot 1 \cdot 2} x^{m-1} h k^2 + \dots \right\} y^{n-2} \\ &+ \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^m k^3 + \dots \right\} y^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Esempio 2. Se le alterazioni h e k dei dati valori di x ed y divengono assai piccole, si potranno trascurare nell'equazione 2 le potenze di h e k superiori alla prima senza che ne venga considerevole errore, e così l'alterazione della funzione sarà ridotta ad una semplice differenziazione.

Supponiamo p. e. che in un triangolo, di cui indichiamo i lati con a, b, c e con A, B, C gli angoli ad essi opposti, siano costanti i lati b e c ; si avrà

1) rispetto agli angoli opposti B e C :

per la nota relazione

$$b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B,$$

l'equazione logaritmica

$$\log b + \log \operatorname{sen} C = \log c + \log \operatorname{sen} B,$$

la quale differenziata ne dà

$$\frac{\cos C \cdot dC}{\operatorname{sen} C} = \frac{\cos B \cdot dB}{\operatorname{sen} B},$$

ossia

$$\frac{dB}{dC} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}.$$

2) Rispetto all'angolo compreso A ed all'angolo B :

dalla relazione

$$A = 2R - (B + C)$$

risulta

$$dA = -dB - dC,$$

e mercè l'introduzione del già trovato valore di dC :

$$dA = -\frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B} dB = -\frac{\operatorname{sen}(B+C)}{\operatorname{sen} B \cos C} dB,$$

ovvero, essendo $\operatorname{sen}(B+C) = \operatorname{sen} A$,

$$\frac{dA}{dB} = -\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B \cos C} = -\frac{a}{b \cos C}.$$

3) Rispetto all'angolo compreso A ed al lato opposto a :

Da

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$-\operatorname{sen} A \cdot dA = -\frac{a \, da}{bc},$$

quindi

$$\frac{da}{dA} = \frac{bc \operatorname{sen} A}{a} = c \operatorname{sen} B,$$

Siano p. e. i lati $b = 75$, $c = 58$ esattamente misurati o calcolati, e per mezzo dell'angolo $A = 108^\circ 24'$ siasi trovato il lato $a = 108,32$; ma se nella misura dell'angolo A vi sia stato un errore di $5'$ ossia $300''$, allora sostituendo a $300''$ la lunghezza dell'arco $300 \cdot \operatorname{arc} 1''$ ($n^\circ 26$), dall'equazione precedente

$$da = \frac{bc}{a} \operatorname{sen} A \cdot dA$$

avremo il valore

$$da = 0,05842.$$

Questo valore di da rappresenta di quanto dovrà accrescersi quello di a , se l'errore commessa nella misura dell'angolo A è stato per difetto, e se viceversa l'errore sia stato per eccesso, il valore di a dovrà diminuirsi di quello di da .

Nella stessa guisa e mercè semplice differenziazione si troverà il rapporto dell'alterazione di due elementi del triangolo, se B e c , o A e b , o A ed a vengono riguardati come costanti, od anche se tre elementi, p. e. a , B , C si suppongono inesattamente misurati.

50.

Serie di Lagrangia.

Nell'ipotesi che z sia una funzione implicita di x ed y , rappresentata dall'equazione

$$1. \quad z = x + y \cdot f_z,$$

si supponga l'equazione

$$2. \quad z = F(x, y),$$

la quale contenga z in forma esplicita, dimodochè col teorema di Stirling si potrà svolgere z in una serie ordinata secondo le potenze crescenti di y , cioè

$$3. \quad z = F(x, 0) + y.F'(x, 0) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} F''(x, 0) + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''(x, 0) + \dots,$$

nella quale $F'(x, 0)$, $F''(x, 0)$,... rappresentano le derivate prese rispetto ad y , e la serie sarà considerata come valida per quei soli valori di x , pei quali $F(x, y)$ e $F(x, 0)$ non cesseranno di esser continue.

Or poniamo che si avessero a determinare rispetto ad y le derivate di $F(x, y)$, vale a dire di z . L'equazione 1 ne somministrerà il mezzo. Le derivate parziali di quest'equazione sono

$$\frac{dz}{dx} = 1 + y.fz. \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = fz + y.fz. \frac{dz}{dy},$$

dalle quali eliminando yfz , avremo la prima derivata rispetto ad y

$$4. \quad \frac{dz}{dy} = fz. \frac{dz}{dx}.$$

E col mezzo di quest'equazione si potranno ottenere le altre derivate di z rispetto ad y . Imperocchè ponendo che ψz sia tra certi limiti una funzione continua di z , e $z = F(x, y)$, si avrà

$$5. \quad \frac{d\left\{\psi z. \frac{dz}{dx}\right\}}{dy} = \psi z. \frac{d^2 z}{dx dy} + \psi' z. \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}.$$

Da questa equazione si potranno eliminare $\frac{dz}{dy}$ e $\frac{d^2 z}{dx dy}$

per mezzo dell'equazione 4, la quale differenziata rispetto ad y ci dà

$$\frac{d^2z}{dx dy} = fz \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + f'z \left\{ \frac{dz}{dx} \right\}^2;$$

e così l'equazione 5 passerà in

$$\frac{d \left\{ \psi z \cdot \frac{dz}{dx} \right\}}{dy} = \psi z \cdot fz \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + (\psi z \cdot f'z + \psi'z \cdot fz) \left\{ \frac{dz}{dx} \right\}^2;$$

e poichè questo secondo membro rappresenta la derivata parziale di $\psi z \cdot fz \cdot \frac{dz}{dx}$ rispetto ad x , si avrà

$$6. \quad \frac{d \left\{ \psi z \cdot \frac{dz}{dx} \right\}}{dy} = \frac{d \left\{ \psi z \cdot fz \cdot \frac{dz}{dx} \right\}}{dx}.$$

Or per ottenere dall'equazione 4 il valore di $\frac{d^2z}{dy^2}$, basterà sostituire nell'equazione 6 fz a ψz , e così avremo

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d \left\{ fz \cdot \frac{dz}{dx} \right\}}{dy} = \frac{d \left[(fz)^2 \cdot \frac{dz}{dx} \right]}{dx}.$$

E se nell'equazione 6 poniamo $\psi z = (fz)^2$, avremo

$$\frac{d^2 \left[(fz)^2 \cdot \frac{dz}{dx} \right]}{dx dy} = \frac{d^2 \left[(fz)^2 \cdot \frac{dz}{dx} \right]}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2};$$

e poichè questa sostituzione a ψz potrà esser ripetuta, così si avrà in generale

$$7. \quad \frac{d^n z}{dy^n} = \frac{d^{n-1} \left\{ (fz)^n \cdot \frac{dz}{dx} \right\}}{dx^{n-1}}.$$

Da questa generale relazione si dedurranno ad uso del

l'equazione 3 i valori che prenderà $\frac{d^n z}{dy^n}$ nell'ipotesi di $y=0$.
Or essendo in questa ipotesi

$$z=x \text{ e } dz=dx, \text{ in conseguenza } \frac{d^n(Fx, 0)}{dy^n} = \frac{d^{n-1}(fx)^n}{dx^{n-1}},$$

l'equazione 3 ci darà

$$8. \quad z = x + y.fx + \frac{y^2}{1.2} \cdot \frac{d(fx)^2}{dx} + \frac{y^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2(fx)^2}{dx^2} + \dots$$

L'equazione 8 può ricevere una più generale espressione. Ed in vero se φz rappresenta una funzione continua di x ed in conseguenza di x ed y , e che essa non perda la sua continuità nell'ipotesi di $y=0$, potremo, egualmente che per l'equazione 3, porre

$$\varphi z = F(x, y),$$

e

$$\varphi z = F(x, 0) + y.F'(x, 0) + \frac{y^2}{1.2} \cdot F''(x, 0) + \frac{y^3}{1.2.3} F'''(x, 0) + \dots$$

Or rimanendo valida la relazione

$$z = x + y.fz,$$

abbiamo dall'equazione 4

$$\frac{d\varphi z}{dy} = \varphi'z \cdot \frac{dz}{dy} = \varphi'z.fz \cdot \frac{dz}{dx}.$$

E se in ultimo si ponga $\varphi'z.fz$ in vece di φz nell'equazione 6, si avrà

$$\frac{d^2\varphi z}{dy^2} = \frac{d\left\{\varphi'z.fz \cdot \frac{dz}{dx}\right\}}{dy} = \frac{d\left\{\varphi'z.(fz)^2 \cdot \frac{dz}{dx}\right\}}{dx};$$

e nella stessa equazione 6 si scambii successivamente φz con $\varphi z.(fz)^2$, $\varphi'z.(fz)^3$, ..., si avrà in generale

$$\frac{d^n \varphi x}{dy^n} = \frac{d^{n-1} \left\{ \varphi' x \cdot (fx)^n \cdot \frac{dz}{dx} \right\}}{dx^{n-1}};$$

quindi l'ipotesi di $y = 0$ si darà $z = x$,

$$\frac{d^n F(x, 0)}{dy^n} = \frac{d^{n-1} [\varphi' x \cdot (fx)]}{dx^{n-1}},$$

e

$$\begin{aligned} 9. \quad \varphi z = \varphi x + \frac{y}{1} \varphi' x \cdot fx + \frac{y^2}{1.2} \cdot \frac{d[\varphi' x \cdot (fx)^2]}{dx} \\ + \frac{y^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2[\varphi' x \cdot (fx)^3]}{dx^2} + \dots \end{aligned}$$

Questa serie dal nome del suo inventore è detta serie di Lagrangia.

L'applicabilità delle serie 8 e 9 dipende (n° 27 e 28) chiaramente dall'essere la funzione $F(x, y)$ continua rispetto ad y , e che resti ancora continua per $y = 0$, imperocchè sotto questa condizione saranno eziandio continue le derivate $F(x, 0)$, $F'(x, 0)$,... La continuità poi della derivata generale

$$\frac{d^n F(x, 0)}{dy^n} = \frac{d^{n-1} [\varphi' x \cdot (fx)^n]}{dx^{n-1}}$$

suppone non solamente che siano continue le funzioni $\varphi' x$ e $(fx)^n$, ma che lo sia ancora la funzione composta $\varphi' x (fx)^n$, anche nel caso che n superi ogni numero finito.

Le equazioni 8 e 9 sono applicabili alla risoluzione delle equazioni sì algebriche che trascendenti, purchè le funzioni restino continue tra i limiti già indicati, e che in conseguenza le serie siano convergenti per x e φx .

Esempio 1. Dall'equazione quadratica

$$z = x + kz^2$$

si avrà facilmente per mezzo dell'equazione 9

$$z^m = x^m + mx^{m+1}k + \frac{m(m+3)}{1 \cdot 2} x^{m+2}k^2 + \frac{m(m+4)(m+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m+3}k^3 + \frac{m(m+5)(m+6)(m+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{m+4}k^4 + \dots$$

ovvero

$$z^m = x^m \left\{ 1 + mkx + \frac{m(m+3)}{1 \cdot 2} (kx)^2 + \frac{m(m+4)(m+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (kx)^3 + \frac{m(m+5)(m+6)(m+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (kx)^4 + \dots \right\}$$

E questa serie sarà convergente per $+1 > kx > -1$.

Tra gli stessi limiti si otterrà del pari dall'equazione data

$$lz = lx + kx + \frac{3}{2} (kx)^2 + \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3} (kx)^3 + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} (kx)^4 + \dots$$

Esempio 2. L'equazione

$$z = x + a \operatorname{sen} z$$

ci dà per z , mediante l'equazione 8, il valore

$$z = x + a \operatorname{sen} x + \frac{a^2}{2 \cdot 2^2} \cdot 2 \operatorname{sen} 2x + \frac{a^3}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} (3^2 \cdot \operatorname{sen} 3x - 3 \operatorname{sen} x) + \frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (4^3 \cdot \operatorname{sen} 4x - 4 \cdot 2^2 \operatorname{sen} 2x) + \dots$$

quando le potenze di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ siano scambiate (n° 32) coi seni e coseni degli archi multipli di x .

Note del traduttore.

I.

(alla pagina 10)

La discontinuità, che nell'ipotesi di n numero intero l'autore riconosce nelle funzioni della forma $\sqrt[n]{x}$, quando x si approssima indefinitamente a zero, ha bisogno di un qualche schiarimento.

Se la discontinuità in quistione dovesse ammettersi nel senso primitivo della parola, egli è chiaro che essa sarebbe insussistente, poichè equivalerebbe a dire che la curva parabolica rappresentata dall'equazione $y = \sqrt[n]{x}$, fosse interrotta nell'origine; ciò ch'è assolutamente inamissibile. Ma nella teorica delle funzioni la cosa vuol esser considerata diversamente, imperocchè l'idea di continuità vi si trova generalizzata nel concetto che gl'incrementi della funzione debbano essere del medesimo ordine di grandezza, che quelli della variabile da cui la funzione dipende; concetto non essenziale all'idea di continuità nel senso geometrico.

Or se nell'equazione

$$F(x + dx) - Fx = F'x \cdot dx$$

si avesse $F'x = \infty$ nell'ipotesi di $x = x_1$, l'incremento $F(x_1 + dx) - Fx_1$ non sarebbe più dello stesso ordine di grandezza di dx ; e quindi Fx dovrebbe riguardarsi come discontinua pei valori di x prossimi ad x_1 . È in questo senso che l'autore stabilisce la discontinuità di $\sqrt[n]{x}$ pei valori di x che sono infinitamente vicini a zero, essendochè nell'ipotesi di $x = 0$ risulta $D.\sqrt[n]{x} = \infty$.

(alla pagina 14).

Partendo dal principio adottato da Nepero per la costruzione del suo canone logaritmico, principio formulato nell'equazione

$$l(1+\alpha) = \alpha,$$

nell'ipotesi che α rappresenti una frazione piccolissima, avremo chiamando e la base del sistema,

$$e^{\alpha} = 1 + \alpha,$$

dondo

$$e = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

E ponendo $\alpha = \frac{1}{m}$, e quindi m grandissimo, l'ultima equazione diverrà

$$e = \left\{ 1 + \frac{1}{m} \right\}^m.$$

Or l'autore, facendosi a cercare il limite di $\left\{ 1 + \frac{1}{m} \right\}^m$ mercè la formola del binomio, deve supporre $m = \infty$, per averne

$$\text{Lim.} \left\{ 1 + \frac{1}{m} \right\}^m = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots$$

Ma in questo caso il 1° termine dello sviluppo prenderà la forma indeterminata 1°. A noi sembra preferibile il metodo che segue.

Consideriamo la progressione geometrica ;

$$\therefore 1 : (1+b) : (1+b)^2 : (1+b)^3 : (1+b)^4 : \dots (1+b)^{n-1},$$

dei cui primi n termini sarà la somma

$$S_n = \frac{(1+b)^n - 1}{b}.$$

Ponendo che b rappresenti una quantità positiva, sarà $(1+b)^{n-1}$ il più grande fra i primi n termini, e perciò dovrà esser soddisfatta la disegualianza:

$$n(1+b)^{n-1} > \frac{(1+b)^n - 1}{b} > n,$$

ossia

$$nb(1+b)^{n-1} > (1+b)^n - 1 > nb;$$

donde

$$1 + nb(1+b)^{n-1} > (1+b)^n > 1 + nb.$$

E tanto più lo dovrà esser l'altra:

$$1 + nb(1+b)^n > (1+b)^{n+1},$$

dalla quale si ha

$$1 > (1+b)^n (1-nb).$$

Ma ponendo che sia $1 > nb$, quest'ultima disegualianza insieme alla terza delle precedenti, ci darà

$$\frac{1}{1-nb} > (1+b)^n > 1 + nb,$$

e mutandovi b in $\frac{1}{n\alpha}$, ne avremo

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}} > \left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)^n > 1 + \frac{1}{\alpha},$$

i cui termini elevati alla potenza α , ci danno

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha} > \left(1 + \frac{1}{n\alpha}\right)^{n\alpha} > \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha.$$

E se in questa poniamo $n\alpha = m$, avremo in fine

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha.$$

Or facendo crescere n fino all'infinito, anche m sarà infinitamente grande; ma α resterà una quantità finita arbitraria, ed anche positiva per soddisfare all'equazione $b = \frac{1}{n\alpha}$. Dunque nell'ipotesi ancora di $m = \infty$ il valore di $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ starà tra quelli di $\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha}$ e $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$. E questi limiti si troveranno più ravvicinati, come α si sceglierà più grande: così per $\alpha = 10000$ troveremo per mezzo di logaritmi che $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ sta tra 2,7184 e 2,7181; e per $\alpha = 1000000$ si troveranno i due limiti 2,718283 e 2,718287.

CALCOLO INTEGRALE

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

INTRODUZIONE.

51.

Definizione dell'integrale.

Sia Fx una funzione continua tra i limiti :

$$x = x_0 \text{ ed } x = x_n = x_0 + n\alpha,$$

α indicando un numero infinitamente piccolo ed n un numero intero assoluto. Per questi limiti in conseguenza della definizione del differenziale si hanno le equazioni :

$$\begin{aligned} F(x_0 + n\alpha) - F(x_0 + [n-1]\alpha) &= \alpha F'(x_0 + [n-1]\alpha) \\ F(x_0 + [n-1]\alpha) - F(x_0 + [n-2]\alpha) &= \alpha F'(x_0 + [n-2]\alpha) \\ F(x_0 + [n-2]\alpha) - F(x_0 + [n-3]\alpha) &= \alpha F'(x_0 + [n-3]\alpha) \\ &\dots \dots \dots \\ F(x_0 + 3\alpha) - F(x_0 + 2\alpha) &= \alpha F'(x_0 + 2\alpha) \\ F(x_0 + 2\alpha) - F(x_0 + \alpha) &= \alpha F'(x_0 + \alpha) \\ F(x_0 + \alpha) - Fx_0 &= \alpha F'x_0. \end{aligned}$$

Addizionando queste equazioni, si ha che nella somma dei primi membri si annullano il secondo termine di ognuna di esse ed il 1° termine di quella che segue immediatamente; dimodochè non rimarranno che il 1° termine della 1° equazione ed il 2° dell'ultima. La somma poi dei secondi membri ci presenta n termini della forma $\alpha F'x$ nei quali x vien

*

preso da x_0 fino ad $x_n + [n-1]\alpha$, ossia fino ad $x_n - \alpha$. Indicando questa somma col simbolo Σ , ed a cagione dei

suddetti limiti col simbolo $\sum_{x_0}^{x_n - \alpha}$, otterremo dalle equazioni

precedenti :

$$F(x_0 + n\alpha) - Fx_0 = \sum_{x_0}^{x_n - \alpha} \alpha F'x.$$

Il secondo membro di questa nuova equazione è una somma di quantità infinitesime, imperocchè avendo supposto Fx esser continua tra gl'indicati limiti, dovrà esserlo ancora $F'x$ pel n° 16. Questa somma d'infinitesimi accrescimenti di Fx dinotasi col nome integrale e col segno $\int$. Essa

differisce dalla somma $\sum_{x_0}^{x_n}$ per la quantità infinitamente

piccola $\alpha F'(x_0 + n\alpha)$ ovvero $\alpha F'x_n$, supponendo che Fx_n e $F(x_n + \alpha)$ restino continue. E da ciò è derivato che i limiti x_0 ed x_n siano da ritenersi per l'integrale, dimodochè scambiando α con dx dall'ultima equazione risulterà :

$$1. \quad Fx_n - Fx_0 = \int_{x_0}^{x_n} F'x. dx,$$

nella quale i simboli x_n ed x_0 apposti agli estremi del segno $\int$ dinotano i limiti tra quali dovrà prendersi la somma o l'integrale. Ed è per cagione di questi limiti che l'integrale dell'equazione 1 dicesi integrale definito, o integrale tra limiti.

La funzione $F'x$, denominata funzione differenziale, è risultata mercè differenziazione dalla funzione Fx ; or volendo indicare soltanto questa relazione tra Fx e $F'x$ per

mezzo dell'integrale, ovvero ristabilire mercè $F'x$ la funzione Fx , denominata funzione integrale, si scriverà:

$$2. \quad Fx = \int F'x dx.$$

Questo integrale è indefinito, e può esser preso tra quei limiti soltanto, pei quali Fx e $F'x$ restano continue.

Che l'integrale dell'equazione 2 sia indefinito segue anche da ciò che:

$$F'x dx = d(Fx + C),$$

indicando con C una quantità indipendente da x , ossia una costante; la quale può daltronde rappresentare un'infinità di valori. E quantunque questa costante d'integrazione C non possa definire nei due limiti l'integrale indefinito o generale, purtuttavia è sempre da sottintendersi in questo integrale, ancorchè non vi fosse scritta. In questo ultimo caso si ha la forma:

$$3. \quad Fx + C = \int F'x dx.$$

La costante arbitraria C si può determinare, introducendo nell'equazione 1 il limite inferiore x_0 , come uno dei valori di x pei quali Fx rimane costante, e lasciando indeterminato il limite superiore: così facendo si avrà:

$$4. \quad Fx - Fx_0 = \int_{x_0}^x F'x dx,$$

e sarà in conseguenza $C = -Fx_0$.

Scambiando nell'equazione 2 $F'x dx$ con dFx , si ottiene:

$$5. \quad Fx = \int dFx;$$

vale a dire che una funzione Fx rimarrà inalterata se venga prima differenziata rispetto alla variabile x e poi integrata, supponendo però che l'integrazione non avvenga tra limiti dati.

Or differenziando l'equazione 2 si ha :

$$dF_x = d \int F_x dx ,$$

ovvero

6. $F_x dx = d \int F_x dx ;$

vale a dire che una funzione $F_x dx$ rimane inalterata, se rispetto alla variabile x sia prima integrata in generale, e poi differenziata.

Da quest'ultima osservazione si rileva che l'operazione d'integrare annulla quella del differenziare e viceversa, e che in conseguenza l'integrare indica un'operazione opposta a quella di differenziare.

Or le leggi ed i metodi, pei quali da una funzione differenziale o equazione differenziale si può scoprire la funzione integrale, costituiscono il Calcolo integrale; essendo indifferente che la richiesta funzione integrale dipenda da una o più variabili.

I. FUNZIONI DIFFERENZIALI.

CAPO PRIMO.

Funzioni differenziali di una variabile.

A. Forme fondamentali degl' integrali.

52.

Gl' integrali indefiniti.

Pel Calcolo differenziale è noto esser

$$d \frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx.$$

Mercè opposta operazione avremo in conseguenza

$$1. \quad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c.$$

E poichè l'addotto differenziale regge per qualsiasi valore di m , intero, fratto, relativo od immaginario; così nelle stesse ipotesi valerà ancora l'integrale. L'unica eccezione è quella di $m = -1$, stantechè l'espressione

$$\frac{x^{-1+1}}{-1+1}$$

non contiene più la variabile. Ed essa prendendo la forma $\frac{1}{0}$, ch'è quella di un numero costante, dimostra non poter essere risultata da un differenziale. L'origine di questa contraddizione è riposta nel significato della costante, come sarà dimostrato nel n° seguente.

In egual guisa dai differenziali

$$d \frac{a^x}{\ln a} = a^x dx \quad \text{e} \quad d e^x = e^x dx$$

derivano rispettivamente gl' integrali

$$2. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \text{e} \quad \int e^x dx = e^x + c.$$

Le equazioni

$$dLx = \frac{dx}{x} L e, \quad dx = \frac{dx}{x}$$

somministrano gl' integrali

$$3. \quad \int \frac{dx}{x} L e = L(cx), \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{x} = l(cx),$$

nei quali $L e$ e $l e$ stanno in vece della costante C .

Dai differenziali

$$d \frac{\sin mx}{m} = \cos mx dx, \quad d \frac{-\cos mx}{m} = \sin mx dx$$

derivano le forme integrali

$$4. \quad \int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m} + C, \quad \int \sin mx dx = -\frac{\cos mx}{m} + C.$$

Il differenziale

$$d \arcsen x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(-\arccos x)$$

conduce al doppio integrale

$$5. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + c = -\arccos x + c'.$$

Del pari dal differenziale

$$d \arctg x = \frac{dx}{x^2+1} = d(-\operatorname{arccot} x),$$

che deriva immediatamente dall' esempio 2 del n° 4, si ha la doppia forma integrale

$$6. \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccot} x + c'.$$

Finalmente dall' esempio 2 del n° 4 si ha

$$7. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x;$$

e perchè $d \cdot \cot x = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x},$

ossia $d(-\cot x) = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x},$

$$6. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x.$$

53.

GL' integrali definiti.

Or cerchiamo tra quali limiti le funzioni differenziali del n° precedente restino continue.

Se nell' equazione 1 di detto n°, cioè

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c,$$

m rappresenti un numero positivo, è chiaro che la proposta funzione differenziale conserverà la sua continuità per ogni valore finito di x , positivo o negativo che sia; e che in conseguenza l' integrale resterà continuo tra gli stessi limiti — Se poi m rappresentasse una frazione positiva, i limiti dovrebbero avere lo stesso segno — Se in fine fosse m un numero negativo, intero o fratto, sarebbe necessario che i limiti avessero un medesimo segno, e che niuno di essi si approssimasse indefinitamente a zero, imperocchè nel caso opposto la funzione $\frac{1}{x^u}$ nel passaggio dall' uno all' altro li-

mite diverrebbe infinita o prossima all' infinito , e perderebbe in conseguenza la sua continuità.

Premesso ciò , sia $x=a$ il limite inferiore dell' integrale, ed $x=b$ ne sia il superiore , avremo in conseguenza dell' equazione 1 del n° prec:

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

e se lasceremo tuttavia indeterminato il limite superiore b ,

sarà :

$$\int_a^x x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Quindi in quest' ultima equazione , per la equazione 4 del n° 51 , l' espressione $-\frac{a^{m+1}}{m+1}$ fa le veci della costante c ; dimodochè potremo scrivere in generale :

2.

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

E questa forma della funzione integrale ci conduce alla determinazione del suo valore nell' ipotesi di $m = -1$. Imperocchè si ha in questo caso:

$$\frac{x^0 - a^0}{1-1} = \frac{0}{0},$$

valore indeterminato che facilmente potrà definirsi pel n° 17, stantechè risultando da uno speciale valore di m , sarà questa quantità da considerarsi come variabile. Or essendo :

$D_m(x^{m+1} - a^{m+1}) = x^{m+1} \cdot 1x - a^{m+1} \cdot 1a$, e $D_m(m+1) = 1$, avremo per $m = -1$:

$$x^{m+1} \cdot 1x - a^{m+1} \cdot 1a = 1x - 1a;$$

ed in conseguenza l' equazione 1 diviene :

$$\int \frac{dx}{x} = lx - la = l \frac{x}{a},$$

che coinciderà esattamente colla seconda delle equazione 3, quando si scambi $-la$ con lc , ossia $\frac{1}{a}$ con c .

Le equazioni 3 del n° precedente,

$$4. \quad \int \frac{dx}{x} Le = L(cx), \quad \int \frac{dx}{x} = l(cx),$$

suppongono che i limiti degl'integrali siano affetti da uno stesso segno; imperocchè se questi limiti fossero indicati da $x = -a$ ed $x = +b$, la funzione $\frac{1}{x}$ diverrebbe infinita nel passare di x dai valori positivi ai negativi. E ciò vien meglio dichiarato dall'introduzione di detti limiti nell'equazione 4, la quale divenendo:

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = lb - l(-a),$$

ci presenta nel 1° membro una somma di quantità reali e quindi reale anch'essa, e nel 2° membro una quantità complessa (n° 34); ciò ch'è assurdo — Per la stessa ragione, e come già emerge dalle osservazioni generali fatte sull'equazione 1, nessuno dei limiti a e b può assumersi infinitamente piccolo.

Nelle equazioni 2 del n° precedente:

$$5. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{la} + c, \quad \int e^x dx = e^x + c,$$

per ogni valore finito positivo, del pari che per ogni valore negativo finito o infinitamente grande di x la funzione differenziale a^x ovvero e^x rimarrà continua. Quindi i limiti dell'integrale potranno scegliersi a piacere tra qualsiasi valore finito positivo e l'infinito negativo. Ponendo, per c-

sempio, i limiti $x=0$ ed $x=-\infty$, il secondo degli integrali precedenti ci darà:

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = e^0 - e^{-\infty} = 1,$$

giacchè $e^{-\infty}$ come quantità infinitesima sparisce rispetto all'unità.

Per ciò che poi riguarda le equazione 4 del n° 2,

$$6. \int \sin mx dx = -\frac{\cos mx}{m} + c, \quad \int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m} + c,$$

le funzioni $\sin mx$ e $\cos mx$, come quelle che variano tra -1 e $+1$, rimarranno continue per ogni valore positivo o negativo di x . Così nell'ipotesi di $m=1$ e tra i limiti $x=0$ ed $x=\frac{\pi}{2}$, esse ci danno:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = +1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = +1;$$

pei limiti poi $x=\frac{\pi}{2}$ ed $x=-\frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}\right] = 0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} = +2.$$

Nelle equazioni 5 e 6 del n° 52 x significa un quoziente, di cui è denominatore il raggio del cerchio, ovvero essa esprime una variabile pel raggio 1. Quindi nella prima di quelle equazioni, cioè:

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c,$$

può il valore di x variare tra -1 e $+1$; ed in conseguenza per $x=0$ ed $x=1$ si avrà :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen 1 - \arcsen 0 = \frac{\pi}{2},$$

quando , come si usa , si prenda il minimo degli archi che abbiano per seno l'unità o zero.

Ponendo $x=1$ la funzione differenziale $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ diviene discontinua ; perciò farà d'uopo prendere l'integrale fin prossimamente al limite , e non già fino al limite. Prendendo a limite superiore $x=1-\alpha$, indicando con α un infinitesimo , avremo :

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2\alpha - \alpha^2}.$$

Or la radice della quantità infinitesima $2\alpha - \alpha^2$; o dell'infinitesimo di 1° ordine 2α , non è infinitamente piccola , poichè altrimenti $2\alpha - \alpha^2$ dovrebb'essere un infinitesimo di 2° ordine. Dunque $\sqrt{2\alpha - \alpha^2}$ ossia $\sqrt{2\alpha}$ è più grande di una quantità infinitesima , e minore di una quantità finita ; quindi $\frac{1}{\sqrt{2\alpha - \alpha^2}}$ non può esser infinitamente grande.

Finalmente nell'equazione :

$$8. \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x ,$$

la funzione differenziale $\frac{1}{1+x^2}$ rimane continua per tutti i valori da $x=-\infty$ fino ad $x=+\infty$, poichè tra questi limiti e per ogni numero intero n , $\arctg x$ si estende da $2n\pi - \frac{\pi}{2}$ fino $2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Quindi per gli archi minimi cui appartengono questi limiti , si ha :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\} = \pi,$$

e pei limiti $x=0$, $x=\infty$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

dimodochè:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

I risultamenti ottenuti in questo numero e nel precedente, dimostrano che quando si abbia riguardo ai limiti di continuità si passerà facilmente dagl' integrali generali delle forme fondamentali agl' integrali definiti delle stesse. Or volendo da queste forme fondamentali dedurre nuove forme d'integrazione, farà d'uopo partire dagl' integrali indefiniti del n° 52, a fin di ottenere risultamenti della maggior generalità possibile.

Noi quindi ci faremo a ricercare nuove forme d'integrali indefiniti. Di due specie in generale sono i metodi che vi ci possono condurre: gli uni, i metodi sintetici, riconducono un dato integrale incognito a qualcuna delle forme fondamentali del n° 52, o ad altra forma conosciuta; gli altri, i metodi analitici, ci conducono dalle forme conosciute ad altre forme ignote d'integrazione.

B. Integrali indefiniti.

a. Metodi sintetici d'integrazione.

54.

Integrazione per decomposizione.

Quando la funzione differenziale è decomponibile in una somma o in un prodotto di più funzioni, i cui integrali

sono noti, si avrà l'integrale della funzione proposta nel modo che segue.

1) Essendo la funzione della forma $Fx + fx + \varphi x + \dots$, si avrà in conseguenza della definizione dell'integrale:

$$Fx + fx + \varphi x + \dots = \int F'x dx + \int f'x dx + \int \varphi'x dx + \dots$$

Abbiamo nel tempo stesso:

$$d(Fx + fx + \varphi x + \dots) = F'x dx + f'x dx + \varphi'x dx + \dots$$

ed integrando i due membri di quest'ultima equazione, si avrà:

$$Fx + fx + \varphi x + \dots = \int (F'x dx + f'x dx + \varphi'x dx + \dots);$$

quindi dalla comparazione dei due valori della somma $Fx + fx + \varphi x + \dots$ risulterà:

$$1. \int (F'x dx + f'x dx + \varphi'x dx + \dots) = \int F'x dx + \int f'x dx + \int \varphi'x dx + \dots$$

2) I fattori u e v del prodotto uv disegnino funzioni di una stessa variabile x . Sarà il differenziale:

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Integrando i due membri di questa equazione rispetto ad x ed avendo riguardo all'equazione 1, si avrà:

$$uv = \int u dv + \int v du,$$

donde:

$$2. \int u dv = uv - \int v du.$$

Quindi se l'integrale di $v du$ è noto, lo sarà ancora quello di $u dv$; e così l'integrale incognito di $u dv$ è ricondotto all'integrale noto $\int v du$. Questo modo di decomposizione ha ricevuto il nome di metodo d'integrazione per parti.

Supponendo che nell'equazione 2 u disegni una costante, sarà:

$$du = 0 \text{ e } \int v du = 0;$$

laonde ponendo a in vece di u e Fx in vece di v , si avrà:

$$\int a F' x dx = a F x ;$$

ma
dunque

$$F x = \int d F x = \int F' x dx ,$$

$$3. \quad \int a F' x dx = a \int F' x dx .$$

Può dunque un fattore costante estrarsi dal segno d'integrazione, ed esservi posto innanzi.

Esempio 1. Sia da integrarsi la funzione $ax + bxdx + cx^2dx \dots + px^ndx$. Mercè l'equazione 3 del n° 54 e l'equazione 1 del n° 52, si avrà :

$$\int ax = ax , \quad \int bxdx = \frac{1}{2} bx^2 ,$$

$$\int cx^2dx = \frac{1}{3} cx^3 , \quad \int px^ndx = \frac{p}{n+1} x^{n+1} ;$$

quindi l'equ. 1 darà

$$3. \quad \int (a + bx + cx^2 + \dots + px^n) dx \\ = C + ax + \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} cx^3 + \dots + \frac{p}{n+1} x^{n+1}$$

C disegnando la costante dell'integrazione.

Esempio 2. Rispetto a $\int lx . dx$ ponendo

$$lx = u , \quad dx = dv ,$$

$$\text{quindi} \quad du = \frac{dx}{x} \text{ ed } x = v ,$$

si avrà dall'equazione 2 :

$$4. \quad \int lx dx = x lx - \int x \frac{dx}{x} = x lx - x .$$

Similmente rispetto agli integrali $\int x^n lx dx$ e $\int x e^x dx$ si otterrà :

$$5. \quad \int x^n lx dx = \left\{ lx - \frac{1}{n+1} \right\} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} ,$$

$$6. \quad \int x e^x dx = (x-1)e^x .$$

Esempio 3. Se per ottenere l'integrale di $dx \sqrt{1-x^2}$, poniamo nell'equ. 2 :

$dx=du$, quindi $x=v$; $\sqrt{1-x^2}=u$, quindi $-\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}=du$,

otterremo $\int dx\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Or sostituendo nel numeratore dell'integrale del 2° membro $1-(1-x^2)$ ad x^2 , si troverà decomposto in

$$\int\left\{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\right\}$$

ossia in $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\sqrt{1-x^2}dx$,

ed in conseguenza l'ultima equazione diverrà

$$\int dx\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int dx\sqrt{1-x^2},$$

ovvero, semplificando,

$$7. \quad \int dx\sqrt{1-x^2}=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsen x.$$

55.

Integrazione per riduzione.

Con questo metodo l'integrale proposto è ricondotto ad una delle forme fondamentali del n° 52 o ad altra forma conosciuta, sostituendo ad una funzione di x una nuova variabile ed integrando rispetto a questa variabile. Così supponendo che siasi trovato

$$\int F'xdx = Fx,$$

e che si cerchi l'integrale di $F'udu$; egli è chiaro che dovrà aver luogo l'equazione:

$$\int F'udu = Fu,$$

e che si potrà passare da questo integrale a quello.

Alcuni esempi basteranno a porre in chiaro l'essenza di questo metodo.

Esempio 1. La forma dell'integrale $\int \frac{dx}{1+x}$ è simile all'altra, $\int \frac{dx}{x}$, nell'equazione 3 del n° 52, imperocchè ponendo

$$1+x=u, \text{ quindi } dx=du,$$

si avrà
$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{du}{u} = l u,$$

purchè non si scriva la costante lc . Restituendo ora ad u il suo valore $1+x$, l'ultima equazione diviene:

$$1. \quad \int \frac{dx}{1+x} = l(1+x).$$

Questa equazione può servire a farci trovare l'integrale $\int \frac{dx}{a+bx}$; imperocchè dividendo numeratore e denominatore per a , si ottiene mercè l'equazione 3 del n° 54

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{1+\frac{bx}{a}},$$

ovvero, scambiando $\frac{bx}{a}$ con u , quindi $\frac{b dx}{a}$ con du , o pure dx con $\frac{adu}{b}$, ed avendo riguardo all'equazione 1,

$$\int \frac{a}{b} \cdot \frac{du}{1+u} = \frac{a}{b} l(1+u),$$

ovvero
$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} l(1+u);$$

e finalmente ripristinando il valore di u ,

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} l \frac{a+bx}{a}.$$

L'ultima funzione prende forma più semplice, trasfondendo nella costante il valore $-\frac{1}{b} l a$; in tal modo si ottiene

$$2. \quad \int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} l(a+bx).$$

Da questa espressione, scambiandovi b con $-b$, risulta:

$$3. \quad \int \frac{dx}{a-bx} = -\frac{1}{b} l(a-bx);$$

ed addizionando queste due ultime equazioni, si avrà:

$$4. \quad \int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab} l \frac{a+bx}{a-bx}.$$

ovvero, sottraendo l'equazione 3 dall'equazione 2,

$$5. \quad \int \frac{x dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2b^2} l(a^2-b^2x^2).$$

La quale ultima espressione potevasi ottenere immediatamente dall'equazione 1, sostituendovi $-\frac{b^2x^2}{a^2}$ ad x ; imperocchè ne sarebbe risultata la forma:

$$\int \frac{x dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2b^2} l \frac{a^2-b^2x^2}{a^2},$$

la quale differisce dalla funzione integrale dell'equazione 5 soltanto per la costante $-\frac{1}{2b^2} l(a^2)$; e questa differenza trova la sua ragione in ciò, che la costante $\pm \frac{1}{b} l a$ è stata omessa nelle equazioni 2 e 3, da cui è derivata l'equazione 5.

Esempio 2. L'integrale $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ ha la stessa forma dell'equazione 6 del n° 52. La divisione del numeratore e denominatore per a^2 ne dà :

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{a^2}}.$$

Ponendo nel 2° membro :

$$\frac{x^2}{a^2} = u^2, \text{ quindi } \frac{x}{a} = u \text{ e } dx = a du,$$

si avrà :

$$\int \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = a \int \frac{du}{1 + u^2},$$

quindi :

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} u,$$

ovvero , riponendo il valore di u ,

$$6. \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Alla forma dell'equazione 6 è facile ricondurre ancora l'integrale $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$; imperocchè ponendo $bx = u$, quindi $dx = \frac{du}{b}$, si avrà :

$$\frac{1}{b} \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{u}{a},$$

ovvero restituendo ad u il suo valore ,

$$7. \quad \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a}.$$

Per la stessa via si perverrà all'integrale :

$$8. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsen \frac{bx}{a}.$$

Finalmente le equazioni 4 e 7 mercè addizione e sottrazione ci danno :

$$\int \frac{dx}{a^4 - b^4 x^4} = \frac{1}{4a^2 b} \left\{ 1 \frac{a+bx}{a-bx} + 2 \arctg \frac{bx}{a} \right\}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a^4 - b^4 x^4} = \frac{1}{4ab^3} \left\{ 1 \frac{a+bx}{a-bx} - 2 \arctg \frac{bx}{a} \right\}$$

Esempio 3. Sia da cercarsi $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$. Mercè una facile considerazione si conoscerà la somiglianza di questa forma con quella dell'equazione 7. Or per ridurre il trinomio $a+bx+cx^2$ alla forma binomia $a^2+b^2x^2$ dell'equazione 7, scambiamo x con $k+u$, e ciò ad oggetto di annullare il fattore di u mercè l'indeterminata k : così avremo

$$a+bx+cx^2 = a+bk+ck^2 + (b+2ck)u + cu^2;$$

in cui ponendo

$$b+2ck=0, \text{ ossia } k=-\frac{b}{2c},$$

ne risulterà

$$a+bx+cx^2 = \frac{4ac-b^2}{4c} + cu^2 = m+cu^2,$$

ponendo per brevità $\frac{4ac-b^2}{4c} = m$; e poichè si ha

$$x = u - \frac{b}{2c}, \text{ quindi } dx = du,$$

così avremo

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{du}{m+cu^2}.$$

Ma per l'equazione 7 abbiamo :

$$\int \frac{du}{m+cu^2} = \frac{1}{\sqrt{mc}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c}{m}} u;$$

quindi non rimane che sostituire in quest'ultima espressione i valori di m ed u ; ed in tal modo si otterrà:

$$9. \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

La forma integrale di quest'equazione può usarsi nel solo caso di $4ac-b^2 > 0$; imperocchè essa darebbe un immaginario nell'ipotesi di $4ac-b^2 < 0$, ed un valore infinito se fosse $4ac-b^2 = 0$.

Per ottenere l'integrale nell'ipotesi di $4ac-b^2 < 0$, giova ricondurre all'equazione 4 la forma precedente

$$\int \frac{du}{m+cu^2}, \text{ ovvero } \int \frac{du}{m-(-c)u^2}.$$

Così si avrà:

$$\int \frac{du}{m-(-c)u^2} = \frac{1}{2\sqrt{-cm}} \ln \frac{\sqrt{m} + \sqrt{-c} \cdot u}{\sqrt{m} - \sqrt{-c} \cdot u}.$$

E gl'immaginarii, da cui sembra essere affetta questa espressione integrale, spariranno tosto che vi saranno sostituiti i valori di m ed u . Ed in vero si ha:

$$2\sqrt{-cm} = \sqrt{b^2-4ac},$$

$$e \quad \frac{\sqrt{m} + \sqrt{-c} \cdot u}{\sqrt{m} - \sqrt{-c} \cdot u} = \frac{\sqrt{4ac-b^2} + (b+2cx)i}{\sqrt{4ac-b^2} - (b+2cx)i},$$

ovvero, moltiplicando numeratore e denominatore del 2° membro per i ,

$$\frac{\sqrt{m} + \sqrt{-c} \cdot u}{\sqrt{m} - \sqrt{-c} \cdot u} = \frac{\sqrt{b^2-4ac} - (b+2cx)}{\sqrt{b^2-4ac} + (b+2cx)}.$$

Quindi risulta :

$$10. \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2-4ac} - (b+2cx)}{\sqrt{b^2-4ac} + (b+2cx)}.$$

Supponendo in fine $4ac - b^2 = 0$, il trinomio diverrà un quadrato esatto, e si avrà :

$$a + bx + cx^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{c} \cdot x)^2;$$

dimodochè sarà da determinarsi :

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{a} + \sqrt{c} \cdot x)^2}.$$

A tal uopo poniamo :

$$\sqrt{a} + \sqrt{c} \cdot x = u, \text{ quindi } dx = \frac{du}{\sqrt{c}};$$

così avremo

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int u^{-2} du = -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{u},$$

e sostituendo i rispettivi valori di u e du , risulterà :

$$11. \int \frac{dx}{(\sqrt{a} + \sqrt{c} \cdot x)^2} = -\frac{1}{\sqrt{ac} + cx}.$$

Esempio 4. Sia da risolversi l'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

Tra le forme fondamentali l'equazione 5 del n° 52 vi ha una qualche simiglianza. E dalle osservazioni sull'esempio 5 del n° 9 risulta che :

$$\arcsen x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{quindi sarà } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

non avendo riguardo alla costante dell'integrazione. Laonde

se in vece di x pongasi xi , si avrà :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{i} \operatorname{arctg} \frac{xi}{\sqrt{1+x^2}}.$$

E poichè nel n° 34 si è dimostrato che l'equazione

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+zi}{1-zi}$$

regge per ogni valore tanto reale che immaginario di z , così per

$$z = \frac{xi}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{sarà} \quad \operatorname{arctg} \frac{xi}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2i} \log \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x};$$

quindi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2} \log \frac{-x+\sqrt{1+x^2}}{+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \log \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{-x+\sqrt{1+x^2}},$$

ovvero, moltiplicando i due termini dell' ultima frazione pel suo numeratore,

$$12. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Mercè questa equazione si avrà

$$13. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log(x + \sqrt{a^2+x^2}),$$

$$14. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{b} \log(bx + \sqrt{a^2+b^2x^2}),$$

trattando gl' integrali proposti

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$$

come si è mostrato nell' esempio 2 del n° 55.

Seguendo la stessa via, che nell'esempio 3 si è tenuta, si potranno ridurre gl'integrali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} \text{ e } \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

alle equazioni 8 e 14; dimodochè si avrà:

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsen \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log (2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}).$$

56.

Integrazione per serie.

Quando la funzione differenziale possa svolgersi in una serie convergente, talchè ogni termine della serie sia integrabile, allora si avrà l'integrale anche in forma di serie, che sarà completata da una costante. Per ciò che poi riguarda la validità della serie, avremo che quella esprimente l'integrale sarà convergente per quei valori della variabile pei quali rimane convergente la serie della funzione differenziale. Ed in vero se $f'x$, termine generale della serie differenziale, è continua tra i limiti a e b , tra gli stessi limiti sarà pel n° 16 continua la funzione

$$fx = \int f'x dx;$$

e dalla continuità del termine generale $f'x$ della serie differenziale, e dall'altro, fx , della serie integrale, dipende la loro convergenza.

Se la funzione differenziale φx sia sviluppabile mercè la serie di Stirling, vale a dire che sia

$$\varphi x = \varphi 0 + \frac{x}{1} \varphi'0 + \frac{x^2}{1.2} \varphi''0 + \frac{x^3}{1.2.3} \varphi'''0 + \dots,$$

e questa serie rimanga convergente tra i limiti $x=a$ ed $x=b$, dimodochè possa trascurarsi il termine residuo; moltiplicando questa equazione per dx ed integrando, sarà ancora la serie :

$$1. \int \varphi x dx = C + x \varphi 0 + \frac{x^2}{1.2} \varphi' 0 + \frac{x^3}{1.2.3} \varphi'' 0 + \frac{x^4}{1.2.3.4} \varphi''' 0 + \dots$$

convergente tra gli stessi limiti, dimodochè l'integrale potrà prendersi da a e b .

Esempio 1. Sia da rappresentarsi con una serie $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Poichè

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \dots,$$

così per integrazione si avrà la serie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots,$$

la quale potrà esser presa soltanto tra i limiti $x=-1$ ed $x=+1$, poichè tra questi limiti solamente rimane continua la funzione $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Lo stesso integrale rappresenta

ancora $\arcsen x$, vale a dire che ha doppio significato. Ma quest'ambiguità sparisce, quando la costante è determinata in modo che per $x=0$ si abbia $\arcsen x=0$. Quindi per gli archi compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, sarà valevole la serie :

$$2. \arcsen x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

Esempio 2. Per l'integrale $\int \frac{e^{ax} dx}{x}$ si ha immediatamente

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \dots;$$

quindi

$$3. \quad \frac{e^{ax}}{x} = \frac{1}{x} + a + \frac{a^2x}{1.2} + \frac{a^3x^2}{1.2.3} + \dots;$$

in conseguenza integrando si avrà :

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x} = C + lx + ax + \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \dots$$

E poichè la serie 3 è convergente per ogni valore finito di x , così reggerà ancora l'integrale tra due qualunque limiti finiti, $x=a$ ed $x=b$. Ma questi limiti dovranno avere uno stesso segno, imperocchè la funzione $\frac{e^{ax}}{x}$ diverrebbe infinita pel valore intermedio $x=0$. Se i limiti dell'integrale sono negativi, $l(-a)$ e $l(-b)$ rappresenteranno valori immaginari, cioè (equazione 3 n° 34)

$$l(-a) = la \mp (2n+1)\pi i,$$

$$l(-b) = lb \mp (2n+1)\pi i;$$

ma le due parti immaginarie eguali spariranno per la sottrazione dei valori di $l(-a)$ e $l(-b)$ nel prendere l'integrale tra i limiti a e b .

Esempio 3. Per ottenere l'integrale $\int e^{-x^2}dx$, si ha cubito la serie :

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \dots$$

she vale per ogni valori di x . Quindi risulta che l'integrale

$$5. \quad \int e^{-x^2}dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2.3} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

dovrà valere per ogni valore di x .

Eseguido per parti l'integrazione proposta, ed a norma

dell'equazione 2 del n° 54 ponendo

$$e^{-x^2} = u, \quad dx = dv, \quad \text{quindi} \quad -2e^{-x^2} x dx = du, \quad x = v,$$

si avrà $\int e^{-x^2} dx = xe^{-x^2} + 2 \int e^{-x^2} x^2 dx.$

Scomponendo similmente l'integrale del 2° membro, e facendo dinuovo $u = e^{-x^2}$, ne risulterà

$$\int e^{-x^2} x^2 dx = \frac{x^3}{3} e^{-x^2} + \frac{2}{3} \int e^{-x^2} x^4 dx.$$

Continuando nello stesso metodo di decomposizione si avrà per l'integrale proposto la nuova serie

$$6. \int e^{-x^2} dx = e^{-x^2} x \left\{ 1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{(2x^2)^2}{3 \cdot 5} + \frac{(2x^2)^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right\},$$

la quale sarà convergente per ogni valore finito di x .

57.

Serie di Bernoulli.

L'integrale $\int f x dx$ potrà svolgersi immediatamente in una serie, quante volte s'integri per parti, come nell'esempio 3 del n° precedente. Imperocchè per $u = f x$ e $dv = dx$, si avrà per l'equazione 2 del n° 54

$$\int f x dx = x f x - \int f x . x dx ;$$

e similmente per $u = f' x$ e $dv = x dx$, sarà

$$\int f' x . x dx = \frac{1}{2} x^2 f' x - \frac{1}{2} \int f'' x . x^2 dx,$$

e nello stesso modo

$$\int f'' x . x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 f'' x - \frac{1}{3} \int f''' x . x^3 dx,$$

ecc. ecc.

Quindi si avrà la serie ;

$$1. \int f x dx = C + \frac{x}{1} f x - \frac{x^2}{1.2} f' x + \frac{x^3}{1.2.3} f'' x - \frac{x^4}{1.2.3.4} f''' x + \dots$$

che ha preso il nome da quello del suo inventore, Gio: Bernoulli; e che si può dedurre con egual facilità dalla serie di Taylor per $F(x+h)$, scambiandovi h con $-x$, e ponendovi $F'x = fx$, quindi $Fx = \int fx dx$.

Questa serie, come chiaramente si rileva, è convergente per quei valori di x , pei quali fx rimane continua.

Ponendo, per esempio, nell'equazione 1

$$fx = \frac{1}{1+x},$$

quindi

$$fx = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'x = +\frac{1.2}{(1+x)^3}, \quad f^{(n)}x = (-1)^n \frac{1.2.3\dots n}{(1+x)^{n+2}},$$

si avrà

$$\int \frac{dx}{1+x} = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2(1+x)^2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} + \dots$$

Il 2° membro di quest'ultima equazione rappresenta $l(1+x)$, come si rileverà immediatamente quando si scambii x con

$\frac{x}{1+x}$ nella nota serie:

$$l(1-x) = -\left\{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right\}$$

b. Metodi analitici d'integrazione.

58.

Integrazione per sostituzione.

Il metodo di trovare un integrale incognito per mezzo di sostituzione consiste in porre in una delle forme fondamentali, o in altra forma conosciuta, in vece della variabile una funzione di essa, e così dedurne un integrale incognito.

Ed in vero, se è noto

$$\int F'x \cdot dx = Fx,$$

dovrà per una data funzione u di x aver luogo l'equazione

$$\int F'udu = Fu;$$

e quindi da quello integrale si potrà passare a questo.

Esempio 1. Mercè le equazioni 1 e 3 del n° 52 sono noti gl' integrali

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

Or se in quest' integrali x si trasformi in $1+z^2$, quindi dx in $2zdz$, ne avremo

$$\int \frac{zdz}{1+z^2} = \frac{1}{2} \ln(1+z^2), \quad \int \frac{zdz}{\sqrt{1+z^2}} = \sqrt{1+z^2}.$$

E se z si scambii con $\frac{bx}{a}$, ed in conseguenza dz con $\frac{b dx}{a}$, si perverrà alle equazioni

$$1. \quad \int \frac{x dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{2b^2} \ln(a^2 + b^2 x^2),$$

$$2. \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{1}{b^2} \sqrt{a^2 + b^2 x^2},$$

purchè nella prima di queste equazioni s'intenda compresa nella costante la quantità $-\frac{1}{2b^2} \ln a$

Ma il binomio del denominatore potrà esser mutato in un trinomio, scambiando x in $x+k$.

Quindi passerà

$$a^2 + b^2 x^2 \text{ in } a^2 + b^2 k^2 + 2b^2 kx + b^2 x^2,$$

ovvero in

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

ponendo

$$a^2 + b^2 k^2 = \alpha, \quad 2b^2 k = \beta, \quad b^2 = \gamma;$$

dimodochè per determinare a , b e k , si avranno le equazioni

$$a = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{\gamma}, \quad b = \sqrt{\gamma}, \quad k = \frac{\beta^2}{2\gamma}.$$

Con ciò gl'integrali 1 e 2 si trasformano in

$$\int \frac{(k+x) dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{1}{2\gamma} l(\alpha + \beta x + \gamma x^2),$$

$$\int \frac{(k+x) dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2},$$

donde, scomponendo gl'integrali nelle loro parti e sostituendo a k il suo valore, si avrà

$$3. \int \frac{x dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = \frac{1}{2\gamma} l(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - \frac{\beta}{2\gamma} \int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2},$$

$$4. \int \frac{x dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} - \frac{\beta}{2\gamma} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}}.$$

Ma l'integrale del 2° membro dell'equazione 3 è noto per le equazioni 9 e 10, e quello dell'equazione 4 per le equazioni 15 e 16 del n° 55.

Esempio 2. Nell'equazione 7 del n° 54 è dato l'integrale

$$\int \sqrt{1-x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Sostituendovi l'immaginario xi ad x , questo integrale si trasforma in

$$\int \sqrt{1+x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

donde , avendo riguardo all'equazione 12 del n° 55 si deduce :

$$5. \int \sqrt{1+x^2} . dx = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} l(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Scambiando dinuovo x con $\frac{b}{a}$, si avrà dall'equazione 5 mercè una semplice trasformazione :

$$6. \int \sqrt{a^2+b^2x^2} . dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+b^2x^2} + \frac{a^2}{2b} l(bx + \sqrt{a^2+b^2x^2}),$$

comprendendo $-\frac{a^2}{2b} la$ nella costante arbitraria.

In fine facendo che x divenga $x+k$ ed introducendo la notazione dell'esempio precedente , si ottiene

$$7. \int \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} . dx = \frac{2\gamma x + \beta}{4\gamma} \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{8\gamma\sqrt{\gamma}} l(2\gamma x + \beta + 2\sqrt{\gamma} \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}),$$

supponendo che il valore $-\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}} l(2\sqrt{\gamma})$ sia compreso nella costante.

Esempio 5. Profittando delle equazioni 15 e 16 del n° 55 , per mutare x in $\frac{1}{x}$ quindi dx in $-\frac{dx}{x^2}$, e scrivendo inoltre a in vece di c , e c in luogo di a , avremo

$$8. \int \frac{dx}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsen \frac{bx-2a}{x\sqrt{b^2+4ac}}$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} l \frac{bx+2a-2\sqrt{a}\sqrt{a+bx+cx^2}}{x};$$

e poichè $\arcsen z = \arctg \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, così dall'equazione 8 si ha :

$$10. \int \frac{dx}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{bx-2a}{2\sqrt{a}\sqrt{-a+bx+cx^2}}.$$

E se in questa equazione poniamo $\alpha + \beta x$ in vece di x ; facciamo

$$-a + bx + cx^2 = A, \quad b\beta + 2c\alpha\beta = B, \quad c\beta^2 = C,$$

dimodochè risulteranno per a, b, c , i valori

$$c = \frac{C}{\beta^2}, \quad b = \frac{B\beta - 2C\alpha}{\beta^2}, \quad a = \frac{-A\beta^2 + B\alpha\beta - C\alpha^2}{\beta^2};$$

e per ragione di brevità poniamo

$$2A\beta - B\alpha = M, \quad 2C\alpha - B\beta = N, \quad -A\beta^2 + B\alpha\beta - C\alpha^2 = k,$$

avremo mercè una facile trasformazione

$$11. \int \frac{dx}{(\alpha + \beta x)\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{M - Nx}{2\sqrt{k}\sqrt{A+Bx+Cx^2}}.$$

Nello stesso modo dall'equazione 9 si avrà:

$$12. \int \frac{dx}{(\alpha + \beta x)\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-k}} \ln \frac{M - Nx - 2\sqrt{-k}\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\alpha + \beta x};$$

dimodochè potrà usarsi dell'equazione 11 per k positiva, e dell'equazione 12 per k negativa.

Nelle equazioni 11 e 12 potrà esser nulla A ovvero B , ma non C , imperocchè da $C=0$ risulta anche $c=0$, e così gl'integrali delle equazioni 15 e 16 del n° 55, donde siamo partiti, riduconsi a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}},$$

il quale integrale non rappresenta nè una funzione logaritmica, nè una funzione circolare, essendochè chiaramente,

te si ha :

$$13. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx}.$$

Nell' ipotesi di $B=0$, e quindi $k=-A\beta^2-C\alpha^2$ le equazioni 11 e 12 divengono :

$$14. \quad \int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{A+Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \arctg \frac{A\beta-C\alpha x}{\sqrt{k}\sqrt{A+Cx^2}},$$

$$15. \quad \int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{A+Cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-k}} \ln \frac{A\beta-C\alpha x-\sqrt{-k}\sqrt{A+Cx^2}}{\alpha+\beta x},$$

purchè $\frac{1}{\sqrt{-k}}$ 12 s' intenda riportato alla costante.

Mutando inoltre nell' equazione 14 la quantità β in $-\beta$, si avrà l' equazione :

$$\int \frac{dx}{(\alpha-\beta x)\sqrt{A+Cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{k}} \arctg \frac{A\beta+C\alpha x}{\sqrt{k}\sqrt{A+Cx^2}},$$

che addizionata coll' equazione 14 ei dà

$$\int \frac{dx}{(\alpha^2-\beta^2 x^2)\sqrt{A+Cx^2}} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{k}} \left\{ \arctg \frac{A\beta-C\alpha x}{\sqrt{k}\sqrt{A+Cx^2}} - \arctg \frac{A\beta+C\alpha x}{\sqrt{k}\sqrt{A+Cx^2}} \right\}.$$

Ma si ha $\operatorname{tg}(u-v) = \frac{\operatorname{tg}u - \operatorname{tg}v}{1 + \operatorname{tg}u \cdot \operatorname{tg}v},$

quindi $u-v = \arctg \frac{\operatorname{tg}u - \operatorname{tg}v}{1 + \operatorname{tg}u \cdot \operatorname{tg}v};$

in conseguenza avendo riguardo a questa relazione si otterrà mercè una semplice trasformazione

$$\int \frac{dx}{(\alpha^2 - \beta^2 x^2) \sqrt{A + Cx^2}} = \frac{1}{2\alpha \sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha x \sqrt{k} \sqrt{A + Cx^2}}{\alpha^2 (A + Cx^2) - kx^2}$$

$$= \frac{1}{2\alpha \sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{2\sqrt{k}x}{\alpha \sqrt{A + Cx^2}}}{1 - \frac{kx^2}{\alpha^2 (A + Cx^2)}}.$$

Considerando in fine che

$$2 \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} \frac{2z}{1-z^2},$$

si ottiene

$$16. \quad \int \frac{dx}{(\alpha^2 - \beta^2 x^2) \sqrt{A + Cx^2}} = \frac{1}{\alpha \sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{k}}{\alpha \sqrt{A + Cx^2}},$$

e se pongasi βi in luogo di β e k' in vece di $A\beta^2 - C\alpha^2$, si avrà

$$17. \quad \int \frac{dx}{(\alpha^2 + \beta^2 x^2) \sqrt{A + Cx^2}} = \frac{1}{\alpha \sqrt{k'}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{k'}}{\alpha \sqrt{A + Cx^2}}.$$

Esempio 4. Nell'equazione fondamentale 2 del n° 52

$$\int e^x dx = e^x$$

ponendo ax in vece di x , si avrà

$$18. \quad \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a},$$

equazione che reggerà per ogni valore finito di ax , come per ogni valore immaginario della stessa ax , come si è dimostrato nel n° 28. Quindi se mutiamo a in $a + bi$, ed in conseguenza e^{ax} in

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx),$$

l'equazione 18 si trasformerà in

$$19. \quad \int e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) dx = e^{ax} \cdot \frac{\cos bx + i \sin bx}{a + bi}.$$

*

I due membri di questa equazione esprimono quantità complesse, e per decomporne il 2° membro nelle due parti di una somma, moltiplichiamone numeratore e denominatore per $a - bi$: con ciò si avrà la forma

$$\frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + i \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax},$$

dimodochè la comparazione della parte reale da un lato, e dell'immaginaria dall'altro, dell'equazione 19, ci darà i due integrali:

$$20. \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax},$$

$$21. \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

59.

Differenziazione sotto il segno integrale.

Nell'equazione

$$1. \quad \int \varphi(x, a) dx = F(x, a)$$

rappresenti a una variabile indipendente da x , e $F(x, a)$, in conseguenza anche $\varphi(x, a)$ siano funzioni continue tanto rispetto ad x quanto ad a . Quindi per ogni valore $a + \alpha$, compreso tra i limiti di continuità, sarà

$$2. \quad \int \varphi(x, a + \alpha) dx = F(x, a + \alpha),$$

e nel caso di α infinitesimo avremo per sottrazione dell'equazione 1:

$$3. \quad \frac{d \int \varphi(x, a) dx}{da} = \frac{dF(x, a)}{da}.$$

Nel tempo stesso le funzioni date menano alle equazioni:

$$\varphi(x, a + \alpha) = \varphi(x, a) + \alpha \frac{d\varphi(x, a)}{da},$$

$$e \quad F(x, a + \alpha) = F(x, a) + \alpha \frac{dF(x, a)}{da};$$

dimodochè moltiplicando la prima per dx ed integrandola rispetto ad x , avremo a cagione delle equazioni 1 e 2:

$$4. \quad \int \frac{d\varphi(x, a)}{da} dx = \frac{dF(x, a)}{da},$$

ovvero, avendo riguardo all'equazione 3,

$$5. \quad \int \frac{d\varphi(x, a)}{da} dx = \frac{d \int \varphi(x, a) dx}{da}.$$

Ripetendo n volte la stessa operazione sulle equazioni 4 e 5, ne risulterà:

$$6. \quad \int \frac{d^n \varphi(x, a)}{da^n} dx = \frac{d^n F(x, a)}{da^n}.$$

L'equazione 5 dimostra esser indifferente che una funzione sia prima integrata, indi differenziata rispetto ad una variabile indipendente, o viceversa, purchè l'integrale, egualmente che il differenziale sia preso tra i limiti di continuità. Quindi, se è noto l'integrale rispetto ad x , si potrà mercè le equazioni 4 e 5 eseguire la differenziazione rispetto ad una variabile indipendente da x , e così ottenere un nuovo integrale.

Esempio 1. Pel n° 52 son note le equazioni:

$$\int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m}, \quad \int \sin mx dx = -\frac{\cos mx}{m},$$

le quali valgono per ogni valore di m diverso da zero. Or si differenzino rispetto ad m , e si consideri che per l'equazione 5 si ha:

$$\frac{d \int \cos mx dx}{dm} = \int \frac{d \cos mx}{dm} dx, \quad \frac{d \int \sin mx dx}{dm} = \int \frac{d \sin mx}{dm} dx,$$

si otterranno i nuovi integrali:

$$7. \quad \int x \cos mx \, dx = \frac{x}{m} \sin mx + \frac{1}{m^2} \cos mx.$$

$$8. \quad \int x \sin mx \, dx = -\frac{x}{m} \cos mx + \frac{1}{m^2} \sin mx.$$

Nello stesso modo dalle equazioni

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a},$$

si perverrà rispettivamente agli integrali:

$$9. \quad \int x^m \ln x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

$$10. \quad \int a^x x \, dx = \frac{x a^x}{\ln a} - \frac{a^x}{(\ln a)^2}.$$

L'equazione 9 vale ancora per $m=0$, dimodochè

$$11. \quad \int \ln x \, dx = x \ln x - x,$$

e scambiando successivamente x con $1+ax$ e con $1-ax$, si avrà:

$$12. \quad \int \ln(1+ax) \, dx = \frac{1+ax}{a} \ln(1+ax) - \frac{1+ax}{a},$$

$$13. \quad \int \ln(1-ax) \, dx = -\frac{1-ax}{a} \ln(1-ax) + \frac{1-ax}{a}.$$

Esempio 2. Differenziando rispetto ad a l'integrale del n° precedente:

$$\int e^{ax} \, dx = -\frac{e^{ax}}{a},$$

si ottiene

$$\int x e^{ax} \, dx = e^{ax} \left\{ \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right\} = \frac{x e^{ax}}{a} \left\{ 1 - \frac{1}{ax} \right\}.$$

Or se l'equazione precedente sia differenziata n volte rispetto ad a , e si consideri che:

$$D_a^{(n)} e^{ax} = x^n e^{ax},$$

si avrà

$$14. \quad \int x^n e^{ax} dx = D_a^{(n)} \frac{e^{ax}}{a},$$

nella quale equazione ha luogo pel n° 12 la relazione :

$$D_a^{(n)} \frac{e^{ax}}{a} = \frac{x^n e^{ax}}{a} \left\{ 1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{(ax)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(ax)^3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{(ax)^n} \right\}.$$

60.

Integrazione sotto il segno integrale.

Dall'equazione 1 del n° precedente risulta :

$$\frac{dF(x, a)}{dx} = \varphi(x, a),$$

e da questa equazione, moltiplicata per da e poi integrata rispetto ad a , si ottiene :

$$\int \frac{dF(x, a)}{dx} da = \int \varphi(x, a) da$$

ovvero, a cagione dell'equazione 4,

$$\frac{d}{dx} \int F(x, a) da = \int \varphi(x, a) da,$$

che integrata rispetto ad x , ci dà :

$$1. \quad \int F(x, a) da = \int \int \varphi(x, a) dadx.$$

Il 2° membro di quest'ultima equazione richiede che l'integrazione si faccia primieramente rispetto ad a , indi rispetto ad x . E poichè l'equazione 1 del n° preced. quando è moltiplicata per da e poi integrata rispetto ad a , mena alla relazione :

$$\int F(x, a) da = \int \int \varphi(x, a) dx da,$$

così sarà :

$$2. \quad \int \int \varphi(x, a) da dx = \int \int \varphi(x, a) dx da.$$

Questa equazione dimostra esser indifferente l'ordine in cui una funzione differenziale sia integrata due volte, quando le variabili, rispetto a cui s'integra, sono tra loro indipendenti, e che i limiti degli integrali non oltrepassino quelli della continuità.

Esempio 1. Si ha

$$\int \frac{adx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \arcsen ax,$$

come immediatamente si trova, sostituendo ax ad x nell'equazione 5 del n° 52. Moltiplicando questa equazione per da ed integrando rispetto ad a , si ottiene :

$$\iint \frac{adx da}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \int \arcsen ax. da.$$

Or per l'equazione 2 si ha :

$$\iint \frac{adx da}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \iint \frac{ada dx}{\sqrt{1-a^2x^2}},$$

e per l'equazione 2 del n° 58 si ha ancora :

$$\int \frac{ada}{\sqrt{1-a^2x^2}} = - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{x^2};$$

dimodochè si ottiene :

$$\int \arcsen ax. da = - \int \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{x^2} dx,$$

ovvero mutando x in $\frac{1}{x}$,

$$\int \arcsen \frac{a}{x} da = \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx.$$

Per ottenere quest'ultimo integrale, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2 - a^2}$; così otterremo:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - a^2 \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Il primo integrale del 2° membro è $\sqrt{x^2 - a^2}$; il secondo poi è contenuto nell'equ. 8 del n° 58. Imperocchè ponendovi $c = 1$, $b = 0$, e scambiandovi a con a^2 , quell'equazione si trasforma in

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arcsen \left\{ -\frac{a}{x} \right\} = -\frac{1}{a} \arcsen \frac{a}{x},$$

dimodochè per l'integrale precedente si ottiene

$$\int \arcsen \frac{a}{x} da = \sqrt{x^2 - a^2} + a \arcsen \frac{a}{x},$$

ovvero scambiandovi a con x ,

$$3. \quad \int \arcsen \frac{x}{a} dx = \sqrt{a^2 - x^2} + x \arcsen \frac{x}{a}.$$

E se in questa equazione si muti $\arcsen$ in $\arctg$, si scriva xi in vece di x , e si profitti dell'equazione mentovata nell'esempio 4 del n° 55,

$$\arctg \frac{xi}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2i} \log \frac{-x + \sqrt{1 + x^2}}{+x + \sqrt{1 + x^2}},$$

si perverrà alla nuova equazione

$$4. \quad \int \log (x + \sqrt{a^2 + x^2}) dx = \sqrt{a^2 + x^2} + x \log (x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

Esempio 2. Se l'equazione:

$$\int \frac{2a dx}{1 - a^2 x^2} = \log (1 + ax) - \log (1 - ax),$$

che proviene dall'equazione 4 del n° 55, si moltiplichi

per da e s' integri rispetto ad a , si avrà, stante la relazione:

$$\iint \frac{2a da dx}{1-a^2x^2} = - \int l(1-a^2x^2) \frac{dx}{x^2},$$

l'equazione

$$\int l(1-a^2x^2) \frac{dx}{x^2} = \int l(1-ax) da - \int l(1+ax) da.$$

Ma gl' integrali del 2° membro sono contenuti nelle equazioni 10 ed 11 del n° precedente; dunque:

$$\int l(1-a^2x^2) \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} l(1-a^2x^2) + a l \frac{1-ax}{1+ax};$$

e se a si cambii con ai , si avrà per l'equazione 5 del n° 34,

$$\int l(1+a^2x^2) \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} l(1+a^2x^2) + 2a \operatorname{arctg} ax.$$

I metodi esposti dal n° 54 al n° 60 per isvolgere un dato integrale, o rinvenirne un nuovo, possono essere applicati nei n° seguenti a talune specie di funzioni differenziali, cioè alle funzioni frazionarie razionali ed irrazionali, ed a talune forme trascendenti.

c. Funzioni frazionarie razionali.

61.

Osservazioni generali.

Rappresentino Fx e fx due polinomii che contengano la variabile x con esponenti soltanto interi, e che siano primi tra loro, dimodochè il quoziente $\frac{Fx}{fx}$ rappresenti una funzione frazionaria razionale, la quale non potrà ulteriormente semplificarsi per soppressione di un fattor co-

mune al numeratore e denominatore. Il massimo esponente di x potrà nel numeratore esser più grande, eguale o minore che nel denominatore; e si nel primo che nel secondo caso si potrà separare l'intero per mezzo di semplice divisione. Quindi non osta alla generalità della teorica il supporre che il massimo esponente di x sia nel numeratore minore che nel denominatore.

Con queste condizioni ci facciamo a cercare

$$\int \frac{Fx}{fx} dx, \text{ ossia } \int \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + lx + m}{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \dots + \mu x + \nu} dx,$$

supponendo che $a, b, \dots, l, m, \alpha, \beta, \dots, \mu, \nu$ rappresentino quantità costanti. Nessuna però delle equazioni fondamentali date nel n° 52 nè alcuna delle forme ottenute nei n° seguenti presenta una qualche somiglianza colla proposta funzione differenziale, eccetto soltanto le forme delle equazioni 4, 5 e 10 del n° 55. Ma queste equazioni non valgono a dare la risoluzione dell'integrale generale, poichè esse si limitano al caso speciale, in cui l'esponente più elevato di x nel denominatore si è $n=2$. Si è cercato in vece di scomporre $\frac{Fx}{fx}$ nelle sue frazioni parziali, a fin di ottenere mercè l'equazione 1 del n° 54 l'integrale di ciascuna frazione parziale.

1. Fattori binomii.

62.

Possibilità della decomposizione.

Dietro la presupposizione del n° precedente che $\frac{Fx}{fx}$ rappresenti una frazione vera razionale rispetto ad x , sia

$$fx = (x - a)^m f_1 x,$$

dimodochè il polinomio $f_1 x$ non sia divisibile senza resto per $x - a$. Or per qualsivoglia numero A sarà soddisfatta l'equazione identica

$$\frac{Fx}{(x - a)^m f_1 x} = \frac{A}{(x - a)^m} + \frac{Fx - Af_1 x}{(x - a)^m f_1 x}$$

Or se il denominatore del 2° termine nel 2° membro debba contenere il fattore $x - a$ soltanto alla $(m - 1)^{\text{esimo}}$ potenza, sarà necessario e sufficiente che il numeratore $Fx - Af_1 x$ sia divisibile per $x - a$, ossia che si annulli nell'ipotesi di $x = a$, vale a dire che dovrà essere

$$Fa - Af_1 a = 0, \text{ ovvero } A = \frac{Fa}{f_1 a}.$$

È dunque A un numero costante finito, essendochè non può essere $f_1 a$ eguale a zero. Si può in conseguenza porre:

$$Fx - Af_1 x = (x - a) F_1 x,$$

indicando con $F_1 x$ una funzione razionale di x ; dimodochè per la frazione razionale $\frac{Fx}{f_1 x}$ si ottiene l'equazione:

$$1. \quad \frac{Fx}{f_1 x} = \frac{A}{(x - a)^m} + \frac{F_1 x}{(x - a)^{m-1} f_1 x}.$$

Laonde se l'equazione $fx = 0$ ha la radice $x = a$ ripetuta m volte, ossia che

$$fx = (x - a)^m f_1 x,$$

la frazione razionale $\frac{Fx}{f_1 x}$ si potrà decomporre in due parti indicate dall'equazione 1, in cui A rappresenta il numero costante $\frac{Fa}{f_1 a}$ e $F_1 x$ una funzione intera razionale di x .

Questo teorema può applicarsi egualmente alla frazione razionale $\frac{F_1 x}{(x-a)^{m-1} f_1 x}$, stantechè essa può prendere la forma:

$$\frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{F_2 x}{(x-a)^{m-2} f_1 x},$$

in cui $F_2 x$ disegnerà di nuovo una funzione intera razionale di x , ed A_1 sarà eguale a $\frac{F_1 a}{f_1 a}$. Ed estendendo la stessa applicazione alla frazione razionale $\frac{F_2 x}{(x-a)^{m-2} f_1 x}$ e così di seguito, è chiaro che la frazione proposta si decomporrà nel seguente modo:

$$2. \quad \frac{F x}{f x} = \frac{F x}{(x-a)^m f_1 x} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{F_m x}{f_1 x},$$

nella quale espressione $A, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ disegnano quantità costanti, e $F_m x$ è una funzione intera razionale.

Nel caso che $f_1 x$ rappresenti un numero costante, $F_m x$ sarà una funzione intera razionale di x ; ed in conseguenza $\frac{F x}{f x}$ sarà divisibile in una espressione intera ed in un certo numero di frazioni, e ciò avverrà quando l'esponente più elevato di x è in $F x$ maggiore del suo corrispondente in $f x$. Nel caso opposto sarà $F_m x = 0$.

Or sia b una nuova radice, contenuta n volte nell'equazione $f_1 x = 0$, dinodochè si abbia:

$$f_1 x = (x-b)^n f_2 x,$$

e $f_2 x$ non sia affatto divisibile per $x-b$. Quindi la frazione $\frac{F_m x}{f_1 x}$ prenderà la forma:

$$\frac{F_m x}{f_1 x} = \frac{F_m x}{(x-b)^n f_2 x} = \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{B_1}{(x-b)^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}}{x-b} + \frac{F_n x}{f_2 x};$$

ed in conseguenza si avrà :

$$\frac{F x}{f x} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{B_1}{(x-b)^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}}{x-b} + \frac{F_n x}{f_2 x};$$

nella quale espressione $B, B_1, \dots, B_{n-1}$ hanno significato analogo a quello delle costanti $A, A_1, \dots, A_{m-1}$, e $F_n x$ esprime una funzione intera di x .

In generale, se :

$$f x = (x-a)^m (x-b)^n \dots (x-c)^p,$$

la frazione razionale $\frac{F x}{f x}$ prenderà la forma :

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{F x}{f x} = & \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} \\ & + \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{B_1}{(x-b)^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}}{x-b} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{C}{(x-c)^p} + \frac{C_1}{(x-c)^{p-1}} + \dots + \frac{C_{p-1}}{x-c}, \end{aligned}$$

nella quale $A, A_1, \dots, A_{m-1}, B, B_1, \dots, B_{n-1}, \dots, C, C_1, \dots, C_{p-1}$ disegnano quantità costanti.

63.

Metodi di scomposizione.

Nel n° prec. si contengono i mezzi per determinare i numeratori delle frazioni parziali in cui è decomponibile una data funzione frazionaria razionale; imperocchè si è trovato:

$$A = \frac{F_a}{f_{1a}}, A_1 = \frac{F_{1a}}{f_{1a}}, A_2 = \frac{F_{2a}}{f_{1a}}, \dots$$

Intanto la determinazione di $F_1x, F_2x, \dots$ e quindi delle costanti $F_1a, F_2a, \dots$ richiederebbe un calcolo penoso. Perciò noi ci facciamo a ricercare la via più spedita per giungere a determinare le costanti $A, A_1, \dots$ e cominciamo dall'esaminare il caso, in cui tutte le radici dell'equazione, $fx = 0$ son diverse, e quindi diseguali i fattori di fx . Per la qual cosa poniamo

$$\begin{aligned} fx &= (x-a)(x-a_1)(x-a_2)\dots, \\ \varphi x &= (x-a_1)(x-a_2)\dots; \end{aligned}$$

e con ciò l'equazione 1 del n° prec. avendovi sostituito φx a f_1x , diverrà:

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{A}{x-a} + \frac{Fx - A\varphi x}{(x-a)\varphi x},$$

e sarà:

$$1. \quad Fa - A\varphi a = 0, \text{ donde } A = \frac{Fa}{\varphi a}.$$

Questo valore di φa coincide con quello di $f'a$; imperocchè differenziando l'equazione:

$$fx = (x-a)\varphi x,$$

$$\text{si ha} \quad f'x = \varphi x + (x-a)\varphi'x,$$

donde nell'ipotesi di $x = a$ si ottiene:

$$2. \quad f'a = \varphi a, \text{ quindi } A = \frac{Fa}{f'a}.$$

In conseguenza, essendo:

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots$$

si avranno i numeratori delle frazioni parziali, sostituendo nel quoziente $\frac{Fx}{fx}$ quella radice dell'e-

quazione $fx=0$, che si trova nel corrispondente denominatore.

Esempio 1. Rispetto alla funzione $\frac{1}{x^2-1}$ si ha

$$Fx=1, fx=x^2-1=(x-1)(x+1), fx=2x;$$

quindi $F(+1)=1, f(+1)=2$, e $\frac{F(+1)}{f(+1)}=\frac{1}{2}$,

$$F(-1)=1, f(-1)=-2, e \frac{F(-1)}{f(-1)}=-\frac{1}{2};$$

in conseguenza:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}.$$

Esempio 2. Nella funzione:

$$\frac{3x^2-2x+1}{x^4-4x^3-43x^2+58x+240}$$

l'equazione

$$fx=x^4-4x^3-43x^2+58x+240=0$$

ha le radici $-2, +3, -5, +8$; quindi

$$\frac{3x^2-2x+1}{x^4-4x^3-43x^2+58x+240}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+5}+\frac{D}{x-8};$$

ed essendo $fx=4x^3-12x^2-86x+58$,

si ha

$$A=\frac{F(-2)}{f(-2)}=\frac{17}{150}, B=\frac{F(+3)}{f(+3)}=-\frac{11}{100}$$

$$C=\frac{F(-5)}{f(-5)}=-\frac{43}{156}, D=\frac{F(+8)}{f(+8)}=\frac{177}{650}.$$

Esempio 3. Rispetto alla frazione:

$$\frac{x^m}{x^n-1} \text{ nell'ipotesi di } m < n,$$

l'equazione $fx = x^n - 1 = 0$.

ha la radice $x = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$,

k disegnando ogni numero intero che sia eguale o minore di $\frac{1}{2}n$. Donde si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{fx}{f'x} &= \frac{x^m}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{m-n+1} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \cos \frac{2k(m+1)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k(m+1)\pi}{n} \right\} \end{aligned}$$

Quindi per n impari, si avrà

$$\begin{aligned} \frac{x^m}{x^n-1} &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{x-1} + \frac{\cos \frac{2(m+1)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2(m+1)\pi}{n}}{x - \cos \frac{2\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}} \right. \\ &\quad + \frac{\cos \frac{2(m+1)\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{2(m+1)\pi}{n}}{x - \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{\cos \frac{(n-1)(m+1)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{(n-1)(m+1)\pi}{n}}{x - \cos \frac{(n-1)\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n}} \\ &\quad \left. + \frac{\cos \frac{(n-1)(m+1)\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{(n-1)(m+1)\pi}{n}}{x - \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n}} \right\} \end{aligned}$$

ovvero riunendo le frazioni delle radici conjugate,

$$\frac{x^m}{x^n-1} = \frac{2}{n} \left\{ \frac{1}{2(x-1)} + \frac{x \cos \frac{2(m+1)\pi}{n} - \cos \frac{2m\pi}{n}}{x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{n} + 1} + \dots \right.$$

$$+ \frac{x \cos \frac{(n-1)(m+1)\pi}{n} - i \cos \frac{(n-1)m\pi}{n}}{x^2 - 2x \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + 1},$$

supponendo che i fattori di $\frac{(m+1)\pi}{n}$, $\frac{m\pi}{n}$ nel numeratore e $\frac{\pi}{n}$ nel denominatore disegnino i numeri pari 2, 4, ... n-1.

Al contrario per n pari si avrà :

$$\begin{aligned} \frac{x^m}{x^n - 1} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{x-1} + \frac{x \cos \frac{2(m+1)\pi}{n} - \cos \frac{2m\pi}{n}}{x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{n} + 1} + \dots \right. \\ \left. + \frac{x \cos \frac{(n-2)(m+1)\pi}{n} - \cos \frac{(n-2)m\pi}{n}}{x^2 - 2x \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + 1} + \frac{(-1)^m}{x+1} \right\}, \end{aligned}$$

i fattori di $\frac{(m+1)\pi}{n}$, $\frac{m\pi}{n}$ e $\frac{\pi}{n}$ disegnando i numeri pari da 2 ad n-2.

Nello stesso modo per n impari si troverà :

$$\begin{aligned} \frac{x^m}{x^n + 1} = -\frac{2}{n} \left\{ \frac{x \cos \frac{(m+1)\pi}{n} - \cos \frac{m\pi}{n}}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{n} + 1} + \dots \right. \\ \left. + \frac{x \cos \frac{(n-2)(m+1)\pi}{n} - \cos \frac{(n-2)m\pi}{n}}{x^2 - 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + 1} + \frac{(-1)^m}{2(x-1)} \right\}, \end{aligned}$$

gl' impari 1, 3, ... n-2 essendo fattori di $\frac{m+1}{n} \pi$, $\frac{m}{n} \pi$ e $\frac{\pi}{n}$; e per n pari sarà :

$$\frac{x^n}{x^n+1} = -\frac{2}{n} \left\{ \frac{x \cos \frac{(m+1)\pi}{n} - \cos \frac{m\pi}{n}}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{n} + 1} + \dots \right. \\ \left. + \frac{x \cos \frac{(n-1)(m+1)\pi}{n} - \cos \frac{(n-1)m\pi}{n}}{x^2 - 2x \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + 1} \right\},$$

gl' impari $1, 3, \dots (n-1)$ essendo fattori di $\frac{m+1}{n} \pi$,
 $\frac{m}{n} \pi$ e $\frac{\pi}{n}$.

Così prendendo ad esempio le frazioni $\frac{1}{x^2-1}$ ed $\frac{1}{x^2+1}$,
 si avrà :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{x-1} + \frac{x\sqrt{2}-2}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{2}{x^2+1} \right. \\ \left. - \frac{x\sqrt{2}+2}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{x+1} \right\},$$

$$\frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{4} \left\{ \frac{1-x \cos \frac{\pi}{8}}{x^2-2x \cos \frac{\pi}{8}+1} + \frac{1-x \cos \frac{3\pi}{8}}{x^2-2x \cos \frac{3\pi}{8}+1} \right. \\ \left. + \frac{1+\cos \frac{3\pi}{8}}{x^2+2x \cos \frac{3\pi}{8}+1} + \frac{1+x \cos \frac{\pi}{8}}{x^2+2x \cos \frac{\pi}{8}+1} \right\}.$$

64.

Continuazione.

Poniamo ora il caso che l'equazione $fx=0$ contenga radici eguali e diseguali. Sia a una delle radici eguali, e
 $fx = (x-a)^m \varphi x$; dimodochè φx non conterrà il fattore

*

$x = a$. Per l'equ. 2 del n° 62 sarà dunque:

$$1. \quad \frac{Fx}{fx} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{L(x)}{\varphi x},$$

$L(x)$ disegnando una funzione intera razionale di x . Moltiplicando i due membri dell'ultima equazione per fx , ne risulterà:

$$2. \quad Fx = A\varphi x + A_1(x-a)\varphi x + A_2(x-a)^2\varphi x + \dots + A_{m-1}(x-a)^{m-1}\varphi x + (x-a)^m L(x).$$

Ponendovi $x = a$, pel quale valore Fa si suppone continua, si ha la relazione:

$$Fa = A\varphi a,$$

per la quale sarà nota la costante A . Indi si differenzii l'equazione 2, e vi si ponga $x = a$; se ne avrà:

$$F'a = A\varphi'a + A_1\varphi a,$$

e quindi verrà determinata la costante A_1 . Continuando a differenziare la stessa equazione e per ogni differenziazione ponendo $x = a$, si avrà una serie di equazioni per mezzo delle quali si determineranno le costanti $A_2, A_3, \dots, A_{m-1}$; dimodochè le prime $m - 1$ derivate renderanno noti i numeratori $A, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ delle frazioni parziali. Ed in vero, l'esempio 5 del n° 12 dimostra che ogni derivata di $(x-a)^m L(x)$ fino a quella dell'ordine $m-1$ inclusivamente, somministra dei termini ognuno dei quali, contenendo il fattore $x-a$ a potenza intera, dovrà sparire nell'ipotesi di $x = a$.

Questa deduzione dei numeri $A, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ si può ricondurre ad una legge generale. Imperocchè pel citato esempio si ha nell'ipotesi di $n > r$

$$D^{(n)}[(x-a)^r \varphi x]_a = n(n-1) \dots (n-r+1) \varphi^{(n-r)} a;$$

quindi

$$D^{(n)}[(x-a)^0 \varphi x]_a = \varphi^{(n)} a ,$$

$$D^{(n)}[(x-a)^1 \varphi x]_a = n \varphi^{(n-1)} a ,$$

$$D^{(n)}[(x-a)^2 \varphi x]_a = n(n-1) \varphi^{(n-2)} a , \text{ ecc. ;}$$

nell' ipotesi poi di $n = r$, sarà

$$D^{(n)}[(x-a)^n \varphi x]_a = n(n-1) \dots 3. 2. 1 \varphi a ;$$

ed in fine si avrà per $n < r$,

$$D^{(n)}[(x-a)^r \varphi a]_a = 0.$$

Dietro queste osservazioni l'equazione 2 ci darà per la n^{ima} derivata di Fx

$$\begin{aligned} 3. F^{(n)} a = & A \varphi^{(n)} a + n A_1 \varphi^{(n-1)} a + n(n-1) A_2 \varphi^{(n-2)} a + \dots \\ & + \dots + n(n-1) \dots 3. 2. 1 A_n \varphi a. \end{aligned}$$

In questa equazione si ha la legge di determinazione delle m costanti $A, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$, quando ad n si sostituiscano i numeri da 0 ad $m-1$. Quindi si ha

$$Fa = A \varphi a ,$$

$$F'a = A \varphi' a + A_1 \varphi a ,$$

$$F''a = A \varphi'' a + 2 A_1 \varphi' a + 2. 1 A_2 \varphi a ,$$

$$F'''a = A \varphi''' a + 3 A_1 \varphi'' a + 3. 2 A_2 \varphi' a + 3. 2. 1 A_3 \varphi a ,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned} F^{(m-1)} a = & A \varphi^{(m-1)} a + (m-1) A_1 \varphi^{(m-2)} a \\ & + (m-1)(m-2) A_2 \varphi^{(m-3)} a + \dots \\ & + (m-1)(m-2) \dots 3. 2. 1 A_{m-1} \varphi a. \end{aligned}$$

Se l'equazione $fx = 0$ contiene il fattore $(x-b)^p$, dimodochè si abbia $fx = (x-b)^p \psi x$, la funzione ψx non contenendo il fattore $x-b$, si avrà per l'equazione 2

del n° 62

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{B}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \dots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{M(x)}{\psi x},$$

$M(x)$ designando una funzione intera e razionale di x . Basterà dunque sostituire ψb a φa nell'equazione 3, per ottenere la derivata generale di Fx , nell'ipotesi di $x = b$, e quindi i valori di $B, B_1, B_2, \dots, B_{p-1}$.

Esempio 1. Rispetto alla frazione $\frac{3x^2 - 7x + 6}{(x-1)^2}$ si ha l'equazione :

$$\frac{3x^2 - 7x + 6}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{(x-1)^1} + \frac{A_2}{x-1};$$

dimodochè

$$Fx = 3x^2 - 7x + 6, F'x = 6x - 7, F''x = 6,$$

$$F(+1) = 2, F'(+1) = -1, F''(+1) = 6,$$

$$\text{e} \quad \varphi(x) = 1, \varphi'(x) = 0, \varphi''(x) = 0;$$

ed in conseguenza

$$\frac{3x^2 - 7x + 6}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^1} + \frac{3}{(x-1)^1}.$$

Ovvero, moltiplicando l'equazione data per $(x-1)^2$ e poi differenziandola due volte, si avranno le tre equazioni

$$3x^2 - 7x + 6 = A + A_1(x-1) + A_2(x-1)^2,$$

$$6x - 7 = A_1 + 2A_2(x-1)$$

$$+ 6 = 2A_2,$$

le quali in conseguenza dell'equazione 3 servono alla determinazione dei valori di A, A_1, A_2 , quando si ponga $x = 1$. Quindi si avrà :

$$\text{dalla prima : } 2 = A,$$

$$\text{dalla seconda : } -1 = A_1,$$

$$\text{e dalla terza : } 3 = A_2, \text{ come precedentemente.}$$

Volendo scomporre la frazione $\frac{x^3}{(x+1)^4}$, dovremo porre l'equazione

$$\frac{x^3}{(x+1)^4} = \frac{A}{(x+1)^4} + \frac{A_1}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x+1},$$

indi moltiplicarla per $(x+1)^4$ e differenziarla tre volte. Le equazioni che ne risulteranno, sono:

$$\begin{aligned} x^3 &= A + A_1(x+1) + A_2(x+1)^2 + A_3(x+1)^3, \\ 3x^2 &= A_1 + 2A_2(x+1) + 3A_3(x+1)^2, \\ 6x &= 2A_2 + 6A_3(x+1), \\ 6 &= 6A_3; \end{aligned}$$

nelle quali facendo $x = -1$, si avranno pei numeratori delle frazioni parziali i valori

$$A = -1, A_1 = +3, A_2 = -3, A_3 = +1;$$

dimodochè alla frazione proposta si potrà sostituire

$$-\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{3}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}.$$

Esempio 2. L'espressione frazionaria

$$\frac{5 - 3x + 6x^2 + 5x^3 - x^4}{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}$$

ha pel denominatore

$$x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$$

la radice $+1$ ripetuta tre volte e la radice -1 due volte; quindi dovrà rappresentarsi colla somma

$$\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1}.$$

Quindi pel numeratore della frazione si avrà l'equazione

$$a. \quad 5 - 3x + 6x^2 + 5x^3 - x^4 = A(x+1)^2 + A_1(x+1)^2(x-1) \\ + A_2(x+1)^2(x-1)^2 + B(x-1)^2 + B_1(x-1)^2(x+1).$$

A fin di determinare i valori di A , A_1 , A_2 poniamo per ragione di brevità

$$B(x-1)^2 + B_1(x-1)^2(x+1) = L(x),$$

dimodochè l'ipotesi di $x = 1$ farà sparire $L(x)$, $L'(x)$, $L''(x)$. In conseguenza differenziando due volte l'equazione

$$5 - 3x + 6x^2 + 5x^3 - x^4 = A(x+1)^2 + A_1(x+1)^2(x-1) \\ + A_2(x+1)^2(x-1)^2 + L(x),$$

ne risulteranno le equazioni

$$\begin{aligned} -3 + 12x + 15x^2 - 4x^3 &= 2A(x+1) \\ &+ 2A_1(x+1)(x-1) + 2A_2(x+1)(x-1)^2 \\ &+ A_1(x+1)^2 + 2A_2(x+1)^2(x-1) + L'(x), \\ 12 + 30x - 12x^2 &= 2A + 4A_1(x+1) + 2A_2(x-1)^2 \\ &+ 2A_1(x-1) + 8A_2(x+1)(x-1) \\ &+ 2A_2(x+1)^2 + L''(x), \end{aligned}$$

Nell'ipotesi di $x = 1$ la prima delle tre ultime equazioni ci darà immediatamente $A = 3$; e dalla seconda e terza avremo:

$$\begin{aligned} 20 &= 4A + 4A_1, \text{ vale a dire } A_1 = 2, \\ 30 &= 2A + 8A_1 + 8A_2, \text{ ossia } A_2 = 1. \end{aligned}$$

Per ottener poi i valori di B e B_1 porremo l'equazione a . sotto la forma

$$5 - 3x + 6x^2 + 5x^3 - x^4 = B(x-1)^2 \\ + B_1(x-1)^2(x+1) + M(x),$$

dimodochè $M(x)$ ed $M'(x)$ spariranno nell'ipotesi di $x = -1$; e differenziando l'ultima equazione otterremo l'altra:

$$\begin{aligned} -3 + 12x + 15x^2 - 4x^3 &= 3B(x-1)^2 + 3B_1(x-1)^2(x+1) \\ &+ B_1(x-1)^2 + M'(x), \end{aligned}$$

e queste equazioni ci danno nell'ipotesi di $x = -1$

$$B = -1, B_1 = -2.$$

Quindi risulta :

$$\frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1} = \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1}$$

Nello stesso modo si troverà :

$$\frac{x^4-3x^3-2x^2+5x+2}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1} = -\frac{1}{4(x+1)^3} - \frac{5}{4(x+1)^2} + \frac{33}{16(x+1)} + \frac{3}{8(x-1)^2} - \frac{17}{16(x-1)},$$

del pari che

$$\frac{1}{(x-2)^3x} = \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{4(x-2)^4} + \frac{1}{8(x-2)^3} - \frac{1}{16(x-2)^2} + \frac{1}{32(x-2)} - \frac{1}{x}.$$

2. Fattori trinomiali.

65.

Possibilità della decomposizione.

Se nella frazione razionale $\frac{F_x}{f_x}$, la quale è tuttavia sottoposta alla condizione espressa nel n° 61, l'equazione $f_x = 0$ contenesse radici immaginarie, si avrebbero, per numeratori delle frazioni parziali, dei numeri complessi, che diverrebbero reali sol quando si addizionassero quelle frazioni parziali che appartengono a due radici conjugate, come nell'esempio 3 del n° 63 si è visto per radici disuguali, reali

ed immaginarie. Per evitare questa trasformazione, si scomporrà fx per quanto è possibile, in fattori trinomiali, ciascuno dei quali comprenderà due radici conjugate. Il numeratore corrispondente ad ogni denominatore trinomio, si trovi a prima o a più elevata potenza, avrà la forma:

$$Ax + B.$$

Imperocchè, ponendo

$$fx = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m,$$

dimodochè $x = \alpha + i\beta$ ed $x = \alpha - i\beta$ siano le sole, ma m volte ripetute radici dell'equazione

$$fx = 0,$$

e dietro l'ammessa supposizione, cioè

$$1. \quad \frac{Fx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} = \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} + \frac{A_1x+B_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}} \\ + \dots + \frac{A_{m-1}x+B_{m-1}}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^2} + \frac{A_{m-1}x+B_{m-1}}{(x-\alpha)^2 + \beta^2},$$

si avrà per Fx l'equazione

$$2. \quad Fx = (Ax+B) + (A_1x+B_1)u + \dots \\ + (A_{m-1}x+B_{m-1})u^{m-2} + (A_{m-1}x+B_{m-1})u^{m-1},$$

avendo fatto per ragione di brevità $(x-\alpha)^2 + \beta^2 = u$.

Essendo $2m$ il massimo esponente di x in u^m , quello di x in Fx , per la condizione del n° 61 a cui Fx è sottoposta, potrà tutto al più esser $2m-1$. Or l'ultimo prodotto nel 2° membro dell'equazione 2 è quel polinomio che ivi contiene x coll' esponente massimo. Imperocchè, se così non fosse, qualcuna delle somme precedenti, $Ax+B$, A_1x+B_1 ,... dovrebbe contenere x ad una potenza superiore alla prima. Sia, a cagion di esempio, Ax^2+B il numeratore della prima frazione parziale nell'equazione 1: in questo caso si potrà aggiungere e togliere a questo numeratore una quan-

tità della forma $Cx + D$, dimodochè $Ax^2 + Cx + B + D$ sia divisibile per $(x-\alpha)^2 + \beta^2$. Così la prima frazione avrà per denominatore $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}$, e nessun'altra frazione parziale dell'equazione 1 potrà avere il denominatore col l'esponente m ; ciò ch'è impossibile. Alla stessa conseguenza si perverrebbe ancora se l'esponente di x in $A, A_1, A_2, \dots$ fosse maggiore di 2. Ed in fine si comprenderà facilmente che gli esponenti di x dei fattori $A, A_1, A_2, \dots$ non potranno esser negativi.

E poichè il termine

$$(A_{m-1}x + B_{m-1})u^{m-1}$$

è quello che nel 2° membro dell'equazione 2 contiene l'esponente più alto di x , che questo esponente massimo potrà essere tutto al più $2m-1$ in Fx , e dovrà esser $2m-2$ in u^{m-1} , dimodochè in A_{m-1} sarà al più eguale all'unità; egli è chiaro che la supposizione dell'equazione 1 è ben fatta.

Nello stesso modo si troverà che se il denominatore di una frazione razionale ha la forma :

$$[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m \cdot \varphi x,$$

i numeratori delle frazioni parziali, i cui denominatori sono potenze di $(x-\alpha)^2 + \beta^2$, avranno la stessa forma $Ax+B$, siano reali od immaginarie, o dell'una e dell'altra specie, le radici dell'equazione $\varphi x = 0$; e che in conseguenza sarà

$$\begin{aligned} 3. \frac{Fx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m \cdot \varphi x} &= \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m} + \frac{Ax_1+B_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}} + \dots \\ &+ \frac{A_{m-2}x+B_{m-2}}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^2} + \frac{A_{m-1}x+B_{m-1}}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \psi(x), \end{aligned}$$

$\psi(x)$ disegnando una funzione di x la quale non divenga nulla, nè infinita nell'ipotesi di $(x-\alpha)^2 + \beta^2 = 0$.

Metodo della scomposizione.

Risolviamo l'equazione 3, rispetto ad Fx , a fine di determinare le costanti incognite $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$; e per brevità poniamo

$$[(x-a)^r + \beta^r] \cdot \varphi x = \varphi_r x,$$

r indicando in generale i numeri $0, 1, 2, \dots, m$: avremo

$$1. \quad Fx = (Ax + B)\varphi x + (A_1x + B_1)\varphi_1x + \dots \\ + (A_{m-1}x + B_{m-1})\varphi_{m-1}x + (A_{m-1}x + B_{m-1})\varphi_{m-1}x + \psi x \cdot \varphi_m x.$$

Tutti i termini, eccetto il primo, del 2° membro di questa equazione spariranno, quando ad x si sostituisca una delle due radici dell'equazione

$$(x-a)^r + \beta^r = 0;$$

cosicchè, chiamando a una di queste radici, si avrà

$$F(a) = (Aa + B)\varphi(a).$$

Or disegnando a un numero complesso, è d'uopo che i due membri di questa equazione rappresentino numeri anche complessi, ed in conseguenza separando la parte reale dall'immaginaria, si avranno due equazioni per determinare A e B .

In questo, come nel n° 64, si potrà trovare un'equazione generale che contenga la rappresentazione di tutte le costanti $A, A_1, A_2, \dots$; e su ciò nelle seguenti brevi osservazioni non faremo che semplicemente indicar la via. Si differenzii l'equazione 1, prendendo a norma quelle che si trovano nel 3° esempio del n° 12, e si avrà per la n^{sim} derivata

$$\begin{aligned}
 2. \quad F^{(n)}x &= (Ax + B)\varphi^{(n)}x + nA\varphi^{(n-1)}x \\
 &+ (A_1x + B_1)\varphi_1^{(n)}x + nA_1\varphi_1^{(n-1)}x \\
 &+ \dots \dots \dots \\
 &+ (A_{m-1}x + B_{m-1})\varphi_{m-1}^{(n)}x + nA_{m-1}\varphi_{m-1}^{(n-1)}x \\
 &+ (A_{m-1}x + B_{m-1})\varphi_{m-1}^{(n)}x + nA_{m-1}\varphi_{m-1}^{(n-1)}x \\
 &+ (\psi x \cdot \varphi_m x)^{(n)}
 \end{aligned}$$

Nella quale equazione $(\psi x \cdot \varphi_m x)^{(n)}$ rappresenta un numero che si annulla nell' ipotesi di $x = a$, quando sia $m < n$.

Le derivate n^{simo} delle funzioni $\varphi x, \varphi_1 x, \dots, \varphi_m x$ contengono le derivate dell' ordine $1^\circ, 2^\circ, \dots, n^{\text{simo}}$ del fattore $[(x - \alpha)^\alpha + \beta^\alpha]^r$ ovvero di $(x - \alpha + i\beta)^r (x - \alpha - i\beta)^r$. Svolgendo in conseguenza a norma delle mentovate equazioni del n° 12 la derivata n^{simo} di questo prodotto, e ponendo per brevità

$$x - \alpha + i\beta = p, \quad x - \alpha - i\beta = q,$$

$$n = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}, \quad \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}, \text{ ec.}$$

si perverrà alla relazione

$$\begin{aligned}
 &D^{(n)}(x - \alpha + i\beta)^r (x - \alpha - i\beta)^r \\
 &= r(r-1)(r-2) \dots (r-n+1)(p^{r-n} \cdot q^r + p^r q^{r-n}) \\
 &+ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} r^2(r-1)(r-2) \dots (r-n+2)(p^{r-n+1} \cdot q^{r-n} + p^{r-1} \cdot q^{r-n+1}) \\
 &+ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} r^3(r-1)^2(r-2) \dots (r-n+3)(p^{r-n+2} \cdot q^{r-2} + p^{r-2} \cdot q^{r-n+2}) \\
 &+ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} r^3(r-1)^2(r-2)^2 \dots (r-n+4)p^{r-n+3} \cdot q^{r-3} + p^{r-3} \cdot q^{r-n+3} \\
 &+ \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

supponendo che siano addizionati tra loro i termini equidistanti dal medio. Ma se in questa equazione si ponga

$$x - \alpha = k \cos z, \quad \beta = k \sin z,$$

essa prenderà la forma

$$\begin{aligned}
 3. \quad & D^n[(x-\alpha)^r + \beta^r]^r \\
 &= r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)2k^n \cos nz \\
 &+ \binom{n}{1} r^r(r-1)(r-2)\dots(r-n+2)2k^{n-1} \cos(n-2)z \\
 &+ \binom{n}{2} r^r(r-1)^2(r-2)\dots(r-n+3)2k^{n-2} \cos(n-4)z \\
 &+ \binom{n}{3} r^r(r-1)^2(r-2)^2\dots(r-n+4)2k^{n-3} \cos(n-6)z + \dots
 \end{aligned}$$

nella quale sarà

$$+ \frac{n(n-1)\dots\left\{\frac{n}{2}+1\right\}}{1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}} r^r(r-1)^r \dots \left\{r - \frac{n}{2} + 1\right\}^r$$

l'ultimo termine nel caso di n pari, e

$$+ \frac{n(n-1)\dots\left\{\frac{n+1}{2}+1\right\}}{1 \cdot 2 \dots \frac{n-1}{2}} r^r(r-1)^r \dots \left\{r - \frac{n-1}{2} + 1\right\}^r 2k \cos z$$

nel caso di n dispari.

Or applicando l'equazione 3 a determinare per approssimazione le funzioni

$$\varphi_1^{(n)}x, \varphi_2^{(n)}x, \dots, \varphi_{n-1}^{(n-1)}x, \varphi_n^{(n-1)}x, \dots$$

e venga all'uopo introdotta la radice $a = \alpha - i\beta$, si avranno per esse funzioni le relazioni

$$\begin{aligned}
 \varphi_1^{(n)}a &= nq\varphi^{(n-1)}a + n(n-1)\varphi^{(n-2)}a, \\
 \varphi_2^{(n)}a &= n(n-1)q^2\varphi^{(n-2)}a + 2n(n-1)(n-2)q\varphi^{(n-3)}a \\
 &\quad + n\dots(n-3)\varphi^{(n-4)}a, \\
 \varphi_3^{(n)}a &= n(n-1)(n-2)q^3\varphi^{(n-3)}a + 3n\dots(n-3)q^2\varphi^{(n-4)}a \\
 &\quad + 3n\dots(n-4)q\varphi^{(n-5)}a + n\dots(n-5)\varphi^{(n-6)}a,
 \end{aligned}$$

ed in generale

$$8x^4 - 3x^3 + 5 = (Ax + B)x + (A_1x + B_1)x(x^2 + 2x + 3) + (A_2x + B_2)x(x^2 + 2x + 3)^2 + C(x^2 + 2x + 3)^3.$$

Or differenziando due volte questa equazione, essa insieme alle due che ne derivano, ci darà i valori di A , A_1 , A_2 , B , B_1 , B_2 . Ed in vero, scegliendo la prima delle due radici:

$$x = -1 + \sqrt{-2} \text{ ed } x = -1 - \sqrt{-2}$$

dell'equazione quadratica

$$x^2 + 2x + 3 = 0,$$

ed introducendola nelle dette tre equazioni, avremo dalla prima di essa:

$$-66 + 29\sqrt{-2} = (-A + A\sqrt{-2} + B)(-1 + \sqrt{-2}),$$

ovvero, pareggiando da un lato gl'immaginarî e dall'altro le quantità reali,

$$66 = A + B, \quad 29 = B - 2A,$$

donde
$$A = \frac{37}{3}, \quad B = \frac{161}{3};$$

similmente dalla seconda avremo:

$$\frac{76}{3}\sqrt{-2} + 140 = -2(A_1 - B_1)\sqrt{-2} + 8A_1 + 4B_1,$$

dimodochè sarà

$$A_1 = \frac{67}{9}, \quad B_1 = -\frac{181}{9};$$

e dalla terza otterremo

$$-\frac{40}{9} = 8(A_2 + B_2) + 8(2A_2 - B_2)\sqrt{-2},$$

donde
$$A_2 = -\frac{5}{57}, \quad B_2 = -\frac{10}{27},$$

e finalmente, pel n° 63, si avrà $C = \frac{5}{27}$. Sarà dunque

$$\frac{8x^4 - 3x^3 + 5}{(x^2 + 2x + 3)^2 x} = \frac{37x + 161}{3(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{67x - 181}{9(x^2 + 2x + 3)^2} - \frac{5x + 10}{27(x^2 + 2x + 3)} + \frac{5}{27x}$$

Similmente si troverà:

$$\frac{x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 3}{(x^2 - x + 1)^2(x^2 + 1)} = \frac{x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} - \frac{x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

3. Integrale della frazione.

Frazioni parziali con denominatori binomii.

Le ricerche esposte dal n° 64 al 66, dimostrano che l'integrale di una funzione differenziale frazionaria razionale $\frac{Fx}{fx}$, che sia sottoposta alla condizione del n° 63, è riducibile ad una delle quattro forme:

$$\int \frac{A dx}{x-a}, \quad \int \frac{A dx}{(x-a)^n}, \quad \int \frac{(Ax+B) dx}{(x-a)^2 + \beta^2}, \quad \int \frac{(Ax+B) dx}{[(x-a)^2 + \beta^2]^n}$$

Il primo di questi integrali è noto per l'equazione 2 del n° 53, cioè:

$$1. \quad \int \frac{A dx}{x-a} = A \log(x-a).$$

Il secondo poi si riduce all'equazione 2 del n° 52, quando in essa poniamo $x-a$ in vece di x e $-n$ in vece di m : così quell'equazione diviene:

$$2. \quad \int \frac{A dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

Esempio 1. Rispetto all' integrale di

$$\frac{(2x^2 + 3ax - 7a^2) dx}{x^3 - 11ax^2 + 31a^2x - 21a^3}$$

si ha primieramente che $x-a$, $x-3a$ ed $x-7a$ sono i fattori del denominatore; e che in conseguenza:

$$\frac{2x^2 + 3ax - 7a^2}{(x-a)(x-3a)(x-7a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-3a} + \frac{A_2}{x-7a},$$

donde facendo sparire i denominatori risulterà:

$$2x^2 + 3ax - 7a^2 = A(x-3a)(x-7a) + A_1(x-a)(x-7a) + A_2(x-a)(x-3a)$$

Ma per l'equazione 1 del n° 63 abbiamo che

$$A(x-3a)(x-7a) \text{ per } x=a,$$

$$A_1(x-a)(x-7a) \text{ per } x=3a$$

$$A_2(x-a)(x-3a) \text{ per } x=7a$$

rappresentano il valore del 1° membro dell'ultima equazione, cosicchè se ne deduce

$$A = -\frac{1}{6}, \quad A_1 = -\frac{5}{2}, \quad A_2 = \frac{14}{3},$$

e

$$\frac{2x^2 + 3ax - 7a^2}{x^3 - 11ax^2 + 31a^2x - 21a^3} = -\frac{1}{6(x-a)} - \frac{5}{2(x-3a)} + \frac{14}{3(x-7a)}.$$

E da quest'ultima equazione mercè l'equazione 1 si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x^2 + 3ax - 7a^2) dx}{x^3 - 11ax^2 + 31a^2x - 21a^3} &= -\frac{1}{6} \int \frac{1}{x-a} - \frac{5}{2} \int \frac{1}{x-3a} \\ &\quad + \frac{14}{3} \int \frac{1}{x-7a}. \end{aligned}$$

Nello stesso modo si troverà che:

$$\int \frac{(5x^3 - 7ax + 11a^2)dx}{x^3 - 6ax^2 + 11a^2x - 6a^3} = \frac{9}{2} \log(x-a) - 17 \log(x-2a) + \frac{35}{2} \log(x-3a),$$

$$\int \frac{(9x^3 - 14x + 1)dx}{x^3 - 2x^2 + x + 2} = \log[(x+1)^4(x-2)^2(x-1)^2].$$

Esempio 2. Sia da cercarsi l'integrale

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4-3x^2+3x^2-x},$$

Poichè $x^4 - 3x^2 + 3x^2 - x = (x-1)^2 x$,
sarà

$$\frac{x^2+1}{x^4-3x^2+3x^2-x} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{x},$$

ovvero, facendo sparire i denominatori,

$$x^2+1 = Ax + A_1(x^2-x) + A_2(x^2-2x^2+x) + B(x-1)^2.$$

Or pel n° 64 da questa equazione e dalle due prime derivate di essa, che sono:

$$3x^2 = A + A_1(2x-1) + A_2(3x^2-4x+1) + 3B(x-1)^2,$$

$$6x = 2A_1 + A_2(6x-4) + 6B(x-1),$$

ponendovi $x=1$, si hanno i valori di A , A_1 , A_2 . Così si avrà:

$$A=2, A_1=1, A_2=2.$$

Rispetto poi a B se ne avrà il valore ponendo $x=0$ in

$$x^2+1 = B(x-1)^2;$$

donde risulta $B=-1$.

Quindi si avrà:

$$\frac{x^2+1}{x^4-3x^2+3x^2-x} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x},$$

e per l'equazione 2 di questo numero avremo :

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4-3x^2+3x^2-x} = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2 \ln(x-1) - \ln x.$$

Nello stesso modo otterremo :

$$\int \frac{(5x^3-2)dx}{x^4-8x^3+18x^2-27} = -\frac{133}{8(x-3)^2} - \frac{407}{16(x-3)} + \frac{313}{64} \ln(x-3) + \frac{7}{64} \ln(x+1)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^4-5x^3+6x^2-3x+5)dx}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1} &= \frac{3}{2(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} \\ &- \ln(x-1) + 2 \ln(x+1) \\ &= \frac{2x^2+7x-3}{2(x^2-x^2-x+1)} + \ln \frac{(x+1)^2}{x-1}. \end{aligned}$$

68.

Frazioni parziali con denominatori trinomi.

Rispetto al terzo degli integrali presentati nel principio del n° precedente, scomporremo il numeratore nelle due parti

$$A(x-a) \text{ e } Ax+B,$$

ne faremo due frazioni, di cui dividendo la seconda per β^2 avremo :

$$\frac{(Ax+B)dx}{(x-a)^2+\beta^2} = \frac{A(x-a)dx}{(x-a)^2+\beta^2} + \frac{Ax+B}{\beta^2} \cdot \frac{\frac{dx}{\beta}}{\left(\frac{x-a}{\beta}\right)^2+1};$$

e ricorrendo alle equazioni 5 e 6 del n° 53, otterremo

$$1. \int \frac{(Ax+B)dx}{(x-a)^2+\beta^2} = \frac{A}{2} \ln[(x-a)^2+\beta^2] + \frac{Ax+B}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\beta}.$$

Decomponendo similmente il numeratore del quarto integrale del n° precedente, avremo

$$\frac{(Ax+B)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \frac{A(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{(A\alpha+B)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Il primo termine del 2° membro di questa equazione ha per integrale :

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{A}{(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}},$$

come risulta dall'equazione 2 del n° precedente, quando in essa ad x si sostituisca $(x-\alpha)^2+\beta^2$. Il secondo termine poi assume mercè la divisione per β^{2n} la forma

$$\frac{A\alpha+B}{\beta^{2n-2}} \cdot \frac{\frac{dx}{\beta}}{\left[\left\{\frac{x-\alpha}{\beta}\right\}^2+1\right]^n},$$

o l'altra più semplice :

$$\frac{A\alpha+B}{\beta^{2n-2}} \cdot \frac{dz}{(z^2+1)^n},$$

quando si faccia $\frac{x-\alpha}{\beta} = z$, quindi $\frac{dx}{\beta} = dz$. Resta dunque soltanto a trovare l'integrale

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

Or integrando per parti l'equazione 2 del n° 54, e scambiandovi u con $\frac{1}{(z^2+1)^n}$ e dv con dz , si ha

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(z^2+1)^n} + 2n \int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^{n+1}},$$

ovvero, ponendo $z^2+1 = t$ in vece di z^2 nell'integrale del 2° membro,

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(z^2+1)^n} + 2n \int \frac{dz}{(z^2+1)^n} - 2n \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}}.$$

Risolvendo quest'ultima equazione rispetto all'ultimo integrale del 2° membro, si avrà

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}} = \frac{z}{2n(z^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dz}{(z^2+1)^n},$$

ovvero, scambiando n con $n-1$,

$$2. \int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}$$

L'integrale richiesto dunque dipende da un altro integrale della stessa forma, ed in cui l'esponente n è diminuito di un'unità. Cercando l'integrale del 2° membro di quest'ultima equazione, e così procedendo finchè l'esponente n si riduca all'unità, si avrà la seguente equazione di riduzione

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = & \frac{z}{2(z^2+1)^{n-1}} \left\{ \frac{1}{n-1} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{z^2+1}{n-2} \right. \\ & + \frac{(2n-3)(2n-5)}{2^2(n-1)(n-2)} \cdot \frac{(z^2+1)^2}{n-3} + \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{2^3(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot \frac{(z^2+1)^3}{n-4} + \dots \\ & \left. + \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 5 \cdot 3}{2^{n-2}(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2} \cdot \frac{(z^2+1)^{n-2}}{1} \right\} \\ & + \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^{n-1}(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z. \end{aligned}$$

Esempio 1. Cercando l'integrale di

$$\frac{dx}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1},$$

si troverà primieramente che il denominatore risulta dai fattori $(x^2+1)^2$ ed $x+1$; e che in conseguenza non rimane che a definire i denominatori delle frazioni parziali compo-

nenti il 2° membro dell'equazione

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}.$$

Dalla quale facendo sparire i denominatori si ha l'altra

$$1 = (Ax+B)(x+1) + (A_1x+B_1)(x^2+1)(x+1) + C(x^2+1)^2,$$

che insieme alla sua prima derivata

$$0 = A(x+1) + A_1(x^2+1)(x+1) + 4C(x^2+1)x + Ax + B + 2(A_1x+B_1)(x^2+x) + (A_1x+B_1)(x^2+1),$$

farà determinare i numeri A , A_1 , B , B_1 , quando vi si ponga $x^2+1=0$, ossia $x=\pm i$. Nell'ipotesi di $x=+i$ si avrà dalla prima di queste equazioni

$$1 = (Ai+B)(i+1),$$

ossia

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = +\frac{1}{2};$$

e dalla seconda

$$0 = -\frac{1}{2}i + (B_1-A_1)i - (A_1+B_1),$$

ossia

$$A_1 = -\frac{1}{4}, \quad B_1 = +\frac{1}{4};$$

ed in fine per $x=-1$ si avrà $C = \frac{1}{4}$ dall'equazione

$$1 = C(x^2+1)^2.$$

Quindi risulterà

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x+1)} = -\frac{x-1}{2(x^2+1)^2} - \frac{x-1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4(x+1)}.$$

Or per le equazioni 1 e 2 si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \\ &= -\frac{x+1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x,\end{aligned}$$

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^4+1} = \int \frac{x dx}{x^4+1} - \int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4+x^4+2x^2+x+1} &= \frac{x+1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.\end{aligned}$$

Similmente si avrà

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{x^4-2x^2+x^4+x^2-2x+1} &= -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2} \ln(x-1) \\ &\quad - \frac{1+\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) - \frac{1-\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1), \\ \int \frac{dx}{1-x^6} &= \frac{1}{6} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{12} \ln \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.\end{aligned}$$

d. Funzioni irrazionali.

69.

Allontanamento della forma irrazionale.

Son poche le funzioni irrazionali, i cui integrali possono rappresentarsi sotto forma finita, essendochè non ogni funzione di questa specie risulta da differenziazione. E già l'in-

tegrale

$$\int \frac{Pdx}{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)^{\frac{1}{2}}}$$

in cui P disegna una funzione razionale di x , presenta non piccola difficoltà, quantunque contenesse la radice più semplice, la seconda. Siamo perciò costretti ad intrattenerci delle forme più semplici le quali si possono o render razionali o ridurre a forme conosciute.

1. A fin di render subito razionale una funzione che contenesse la radice seconda di $a+bx+x^2$, si porrà

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z - x,$$

supponendo che x^2 abbia il segno $+$ sotto il radicale. Si avrà così

$$a+bx = -2xz + z^2,$$

$$b dx = -2z dx - 2x dz + 2z dz,$$

quindi
$$x = \frac{z^2 - a}{2z + b}, \quad dx = \frac{2(z^2 + bz + a)}{(2z + b)^2},$$

$$\sqrt{a+bx+x^2} = \frac{z^2 + bz + a}{2z + b}.$$

2. Il proposto radicale diverrà ancora razionale, quando tra x ed una nuova variabile z si stabilisca la seguente relazione:

$$\sqrt{a+bx+x^2} = \sqrt{a+xz}.$$

Ne risulterà $b+x = 2z\sqrt{a+xz},$

$$dx = 2dz\sqrt{a+z^2} + 2xz dz;$$

quindi
$$x = \frac{2z\sqrt{a-b}}{1-z^2}, \quad dx = 2 \frac{\sqrt{a-bz+z^2}\sqrt{a}}{(1-z^2)^2} dz,$$

$$c \quad \sqrt{a + bx + x^2} = \frac{\sqrt{a - bx + x^2} \sqrt{a}}{1 - x^2};$$

dimodochè si è eliminato il segno radicale, e dx è restato razionale.

3. Se nella forma $\sqrt{a + bx + x^2}$ la quantità a fosse negativa, il metodo esposto condurrebbe ad un numero immaginario. Per ciò evitare giova la seguente trasformazione.

Giacchè nell'ipotesi di a negativa le radici dell'equazione quadratica

$$-a + bx + x^2 = 0$$

sono reali, noi porremo

$$-a + bx + x^2 = (x - \alpha)(x - \beta),$$

$$e \quad \sqrt{-a + bx + x^2} = (x - \alpha)z,$$

cosicchè sarà

$$x - \beta = (x - \alpha)z^2, \quad dz = z^2 dx + 2(x - \alpha)z dz,$$

$$x = \frac{\beta - \alpha z^2}{1 - z^2}, \quad dx = \frac{2(\beta - \alpha)z dz}{(1 - z^2)^2},$$

$$e \quad \sqrt{-a + bx + x^2} = \frac{(\beta - \alpha)z}{1 - z^2}.$$

Se x^2 fosse affetta dal segno — nel supposto radicale, allora per a positiva si terrebbe il primo metodo e per a negativa il secondo; stantechè le radici dell'equazione

$$-a + bx - x^2 = 0$$

dovranno esser sempre reali, chè in contrario $\sqrt{-a + bx - x^2}$ sarebbe sempre immaginaria.

Sia p. e. da cercarsi l'integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}.$$

Per la trasformazione data nel n° 1 avremo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \int \frac{dz}{z + \frac{b}{2}} = l\left\{\frac{b}{2} + z\right\},$$

ovvero

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = l\left\{\frac{b}{2} + x + \sqrt{a+bx+x^2}\right\}.$$

Il quale integrale coincide con quello dell'equazione 16 del n° 55; imperocchè basterà porre in quello $c=1$ ed in questo introdurre la costante $l/2$ per conoscere l'identità della forma.

Rispetto poi all' integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$$

dovendosi supporre reali le radici dell'equazione:

$$a + bx - x^2 = 0,$$

potremo applicarvi la trasformazione del n° 3 di questo paragrafo.

In conseguenza ponendo

$$x^2 - bx - a = (x-\alpha)(x-\beta)$$

$$e \quad \sqrt{a + bx - x^2} = -(x-\alpha)z,$$

si avrà

$$\beta - x = (x-\alpha)z^2, \quad dx(1+z^2) = -2(x-\alpha)zdz,$$

$$e \quad \frac{dx}{(x-\alpha)z} = -\frac{2dz}{1+z^2};$$

$$\begin{aligned} \text{quindi} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} &= -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}} \\ &= -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-(2x-b) + \sqrt{b^2+4a}}{2x-b + \sqrt{b^2+4a}}}. \end{aligned}$$

Or essendo per ogni angolo u :

$$\operatorname{tg} 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u},$$

sarà
$$2u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u} \right\},$$

e

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-(2x-b) + \sqrt{b^2+4a}}{(2x-b) + \sqrt{b^2+4a}}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{b^2+4a-(2x-b)^2}}{2x-b}.$$

Similmente essendo

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} \text{ ed } u = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}},$$

sarà
$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{b^2+4a-(2x-b)^2}}{2x-b} = \operatorname{arc} \cos \frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}},$$

e
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = -\operatorname{arc} \cos \frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}.$$

70.

Riduzione delle forme irrazionali.

Se nella forma generale

$$x^m (a + bx^r)^{\frac{p}{q}} = X$$

m ed r rappresentino qualsivogliano valori reali, ma p e q siano numeri interi, vi sono pochi casi soltanto nei quali per valori di questi quattro esponenti l'irrazionalità può esser tolta di mezzo. Ed in vero ponendo

$$a + bx^r = z^q,$$

si avrà
$$x = \left\{ \frac{z^q - a}{b} \right\}^{\frac{1}{r}}, \quad dx = \frac{qz^{q-1}}{rb} \left\{ \frac{z^q - a}{b} \right\}^{\frac{1}{r}-1} dz,$$

$$e \quad Xdx = \frac{az^{p+q-1}}{rb} \left\{ \frac{z^q - a}{b} \right\}^{\frac{m+1}{r}} dz ;$$

cosicchè la funzione Xdx sarà razionale , se $\frac{m+1}{r}$ sia numero intero.

Potendosi la stessa espressione di X scriver sotto la forma

$$X = x^{m+\frac{p}{q}} (ax^{-r} + b)^{\frac{p}{q}} ,$$

è chiaro che Xdx sarà ancora funzione razionale , se

$$\frac{m+\frac{p}{q} + \frac{rp}{q}}{r} = \frac{m+1}{r} + \frac{p}{q}$$

rappresenti un numero intero.

Eccetto questi due casi la funzione differenziale Xdx non potrà divenir razionale. Si è quindi costretto ricondurla ad una delle note forme , in cui uno degli esponenti m e $\frac{p}{q}$, o tutti due ad un tempo si presentino alterati. Con ciò si ottengono tre forme , ciascuna delle quali potrà prendersi in doppio modo , secondochè l'esponente alterato potrà divenire maggiore o minore.

Pongasi , all'oggetto d'integrare per parti , nell'equazione 2 del n° 54

$$dv = x^m dx , u = (a + bx^r)^n ,$$

m , n ed r disegnando qualunque numero intero o fratto , od anche immaginario. Sarà dunque

$$du = nr b (a + bx^r)^{n-1} x^{r-1} dx , v = \frac{x^{m+1}}{m+1} ;$$

e quindi si ha l'equazione

$$1. \int x^m (a + bx^r)^n dx = \frac{x^{m+1} (a + bx^r)^n}{m+1} \\ - \frac{nr b}{m+1} \int x^{m+r} (a + bx^r)^{n-1} dx ,$$

mercè la quale l'integrale proposto è riferito ad un'altro nel quale m si mostra aumentato ed n diminuito. Se poi dovesse m divenir minore ed n maggiore, si scambierebbe m con $m-r$ ed n con $n+1$ nell'equazione 1, che così diverrebbe

$$\int x^{m-r} (a+bx^r)^{n+1} dx = \frac{x^{m-r+1} (a+bx^r)^{n+1}}{m-r+1} - \frac{r(n+1)b}{m-r+1} \int x^m (a+bx^r)^n dx ;$$

la quale risolta rispetto all'integrale che contiene nel 2° membro, ci dà

$$2. \quad \int x^m (a+bx^r)^n dx = \frac{x^{m-r+1} (a+bx^r)^{n+1}}{r(n+1)b} - \frac{m-r+1}{r(n+1)b} \int x^{m-r} (a+bx^r)^{n+1} dx.$$

Da questa equazione 2 si può per l'integrale del 1° membro dedurre una nuova espressione, in cui si mostri alterato il solo esponente m . Imperocchè decomponendo la forma $(a+bx^r)^{n+1}$ in due fattori che abbiano rispettivamente gli esponenti n ed 1, si avrà

$$\begin{aligned} (a+bx^r)^{n+1} &= (a+bx^r)^n \cdot (a+bx^r) \\ &= a(a+bx^r)^n + bx^r (a+bx^r)^n ; \end{aligned}$$

in conseguenza

$$x^{m-r} (a+bx^r)^{n+1} = ax^{m-r} (a+bx^r)^n + bx^m (a+bx^r)^n ;$$

e perciò

$$\begin{aligned} \int x^m (a+bx^r)^n dx &= \frac{x^{m-r+1} (a+bx^r)^{n+1}}{r(n+1)b} \\ &- \frac{(m-r+1)a}{r(n+1)b} \int x^{m-r} (a+bx^r)^n dx - \frac{m-r+1}{r(n+1)b} \int x^m (a+bx^r)^n dx ; \end{aligned}$$

ovvero, trasportando nel 1° membro il 2° integrale del 2°

membro , e facendone sparire il fattore costante ,

$$3. \quad \int x^m (a + bx^r)^n dx = \frac{x^{m-r+1} (a + bx^r)^{n+1}}{(m + rn + 1)b} \\ - \frac{(m - r + 1)a}{(m + rn + 1)b} \int x^{m-r} (a + bx^r)^n dx.$$

In questa equazione n è rimasto invariato , all' opposto m è divenuto minore. Se al contrario m debba divenire più grande , bisognerà scambiarsi $m - r$ con m e ridurre l' equazione risultante alla forma precedente. Per l' indicata sostituzione si ottiene

$$\int x^{m+r} (a + bx^r)^n dx = \frac{x^{m+1} (a + bx^r)^{n+1}}{(m + rn + r + 1)b} \\ - \frac{(m + 1)a}{(m + rn + r + 1)b} \int x^m (a + bx^r)^n dx ,$$

cosicchè per l' integrale che si trova nel 2° membro si avrà

$$4. \quad \int x^m (a + bx^r)^n dx = \frac{x^{m+1} (a + bx^r)^{n+1}}{(m+1)a} \\ - \frac{(m+rn+r+1)b}{(m+1)a} \int x^{m+r} (a + bx^r)^n dx.$$

Rimane ancora a svolgere le due forme pel caso in cui m rimanendo invariato , n debba esser più grande o più piccolo. Servono a ciò le equazioni 1 e 4 , scomponendovi x^{m+r} in $x^m \cdot x^r$. Scegliendo perciò l' equazione 4 , si avrà

$$x^{m+r} = \frac{x^m}{b} \cdot bx^r = \frac{x^m}{b} (a + bx^r - a) ,$$

$$\text{ovvero} \quad x^{m+r} = \frac{x^m}{b} (a + bx^r) - \frac{a}{b} x^m ,$$

donde

$$x^{m+r} (a + bx^r)^n = \frac{x^m}{b} (a + bx^r)^{n+1} - \frac{a}{b} x^m (a + bx^r)^n ;$$

quindi per l' equazione 4 si avrà ;

$$\begin{aligned} \int x^m (a + bx^r)^n dx &= \frac{x^{m+1} (a + bx^r)^{n+1}}{(m+1)a} \\ &- \frac{(m+rn+r+1)}{(m+1)a} \int x^m (a + bx^r)^{n+1} dx \\ &+ \frac{m+nr+r+1}{m+1} \int x^m (a + bx^r)^n dx, \end{aligned}$$

ovvero, trasportando nel 1° membro il 2° integrale del 2° membro, e facendo sparire il fattore costante,

$$\begin{aligned} 5. \quad \int x^m (a + bx^r)^n dx &= - \frac{x^{m+1} (a + bx^r)^{n+1}}{r(n+1)a} \\ &+ \frac{m+nr+r+1}{r(n+1)a} \int x^m (a + bx^r)^{n+1} dx. \end{aligned}$$

In fine, scriviamo in quest'ultima equazione $n - 1$ in vece di n per diminuire l'esponente n , ed avremo

$$\begin{aligned} \int x^m (a + bx^r)^{n-1} dx &= - \frac{x^{m+1} (a + bx^r)^n}{rna} \\ &+ \frac{m+rn+1}{rna} \int x^m (a + bx^r)^n dx; \end{aligned}$$

quindi per l'integrale del 2° membro risulterà

$$\begin{aligned} 6. \quad \int x^m (a + bx^r)^n dx &= \frac{x^{m+1} (a + bx^r)^n}{m+rn+1} \\ &+ \frac{rna}{m+rn+1} \int x^m (a + bx^r)^{n-1} dx. \end{aligned}$$

Le equazioni da 1 a 6 ammettono molte applicazioni, alcune delle quali possono qui aver luogo.

Esempio 1. Per ridurre l'integrale

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

basterà scambiare n con m , $-\frac{1}{2}$ con n , 2 con r , a^2 con a e -1 con b per vedere che potremo riferirlo alla

forma generale delle equazioni da 1 a 6. Or nell' ipotesi che n rappresenti un numero intero positivo, bisognerà far dipendere l'integrale proposto dalla forma conosciuta

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ ovvero } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Quindi la radice nel denominatore, ossia $-\frac{1}{2} = n$, dovrà rimaner invariata, e divenir minore l'esponente di x in x^n . Bisognerà dunque ricorrere all'equazione 3, al cui integrale comparando quello che ci siamo proposto, avremo in conseguenza dei valori dati

$$7. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{n-1} \sqrt{a^2 - x^2}}{n} + \frac{n-1}{n} a^2 \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

e per $a = 1$

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x^{n-1} \sqrt{1 - x^2}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

E trattando allo stesso modo l'integrale del 2° membro, avremo in fine per n dispari

$$8. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} \left\{ x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} x^{n-3} \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} x^{n-5} + \dots + \frac{(n-1)(n-3) \dots 2}{(n-2)(n-4) \dots 1} \right\},$$

e per n pari

$$9. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} \left\{ x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} x^{n-3} \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} x^{n-5} + \dots + \frac{(n-1)(n-3) \dots 3}{(n-2)(n-4) \dots 2} \right\} \\ + \frac{(n-1)(n-3) \dots 3}{n(n-2)(n-4) \dots 2} \text{ arc sen } x.$$

Se nell' integrale proposto n fosse negativo, e quindi da dover crescere, bisognerebbe ricorrere all' equazione 4, che darebbe

$$10. \int \frac{x^{-n} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{-n+1} \sqrt{a^2 - x^2}}{(n-1)a^2} + \frac{n-2}{(n-1)a^2} \int \frac{x^{-n+1} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

dalla quale equazione, come dimostrano l' equazioni 8 e 9, risultano due forme simili, essendochè l' integrale dell' equazione 10 è riducibile a

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} \text{ ovvero a } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

La seconda di queste due espressioni è nota, e la prima è riducibile all' equazione 9 del n° 58, essendochè quest' ultima nell' ipotesi di $a = a^2$, $b = 0$, $c = -1$ ci dà

$$11. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{2a(a - \sqrt{a^2 - x^2})}{x}.$$

In fine mercè le equazioni 8 e 9 si potrà trasformare l' integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{a+x}}$$

in una serie. Imperocchè essendo

$$\frac{1}{\sqrt{a+x}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^2}{a^2} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{a^3} + \dots \right\},$$

si avrà

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{a+x}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \arcsen x + \frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1-x^2} \\ - \frac{1.3}{2.4 a^{\frac{5}{2}}} \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsen x \right\} \\ + \frac{1.3.5}{2.4.6 a^{\frac{7}{2}}} \left\{ \frac{x^3}{8} + \frac{2}{3} \right\} \sqrt{1-x^2} + \dots$$

Similmente si avrà

$$13. \int \frac{\sqrt{1-e^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + \frac{1}{2} e^2 \left\{ \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsen x \right\} \\ + \frac{1}{2.4} e^4 \left[\left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{1.3}{2.4} x \right\} \sqrt{1-x^2} - \frac{1.3}{2.4} \arcsen x \right] \\ + \frac{1.3}{2.4.6} e^6 \left[\left\{ \frac{x^2}{6} + \frac{1.5}{4.6} x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x \right\} \sqrt{1-x^2} \right. \\ \left. - \frac{1.3.5}{2.4.6} \arcsen x \right] + \dots$$

Esempio 2. L' integrale

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax+bx^2}} \quad \text{ovvero} \quad \int \frac{x^{n-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a+bx}}$$

si ridurrà facilmente alla forma di una delle sei precedenti equazioni. Ed in questa riduzione è da osservarsi che gl'integrali

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+bx^2}} \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

sono noti, giacchè il primo si deduce dall'equazione 4 n° 58 ed il secondo dalle equazioni 15 e 16 n° 55. Quindi per giungere a questi integrali è da applicarsi dinuovo l'equazione 3 per ottenerne

$$14. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax+bx^2}} = \frac{x^{n-1} \sqrt{ax+bx^2}}{nb} - \frac{(2n-1)a}{2nb} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{ax+bx^2}};$$

all'opposto per n negativo si avrà dall'equazione 4:

$$15. \int \frac{dx}{x^n \sqrt{ax+bx^2}} = -\frac{2\sqrt{ax+bx^2}}{(2n+1)ax^n} - \frac{2(n-1)b}{(2n-1)a} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{ax+bx^2}}.$$

Pel caso speciale che nell'equazione 14 a si muti in $2a$ e b in -1 , si ha

*

$$16. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{n-1}}{n} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{(2n-1)a}{n} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

E mercè questa equazione si troverà l'integrale di

$$\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)(1-cx)}},$$

imperocchè trasformando in serie $(1-cx)^{-\frac{1}{2}}$, si ottiene

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)(1-cx)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} cx + \frac{1.3}{2.4} c^2 x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} c^3 x^3 + \dots \right\}.$$

71.

Continuazione.

Dalla forma binomia $a+bx^2$ che si trova sotto il segno radicale nelle equazioni del n° precedente, si potrà pervenire alla forma trinomia $a+bx+cx^2$ scambiando x con $a+x$, come si è dimostrato nell'esempio 3 n° 55. Più direttamente si raggiungerà lo scopo, se per una data funzione differenziale di questa specie si ottenga l'equazione di riduzione da un differenziale.

Così per l'integrale, a modo di esempio,

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = X_n$$

l'equazione richiesta sarà data dal differenziale di $x^{n-1} \sqrt{a+bx+cx^2}$; imperocchè introducendo questo differenziale nel denominatore, si ha

$$d(x^{n-1} \sqrt{a+bx+cx^2}) = (n-1)a \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{(2n-1)b}{2} \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + nc \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}};$$

donde per integrazione

$$1. \quad \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x^{n-1}}{nc} \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{(2n-1)b}{2nc} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} - \frac{(n-1)a}{nc} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

Perciò questo integrale è riducibile a due forme simili, e deve riguardarsi come noto, imperocchè per $n=1$ l'equazione 4 n° 58 ci dà

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Una simile equazione si ottiene per n negativo; imperocchè sostituendo $-n+2$ ad n nell'equazione 1, questa diviene

$$\int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{a+bx+cx^2}} = - \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{(n-2)cx^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{2(n-2)c} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{a+bx+cx^2}} - \frac{(n-1)a}{(n-2)c} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{a+bx+cx^2}},$$

donde per l'ultimo integrale del 2° membro risulta

$$2. \quad \int \frac{dx}{x^n \sqrt{a+bx+cx^2}} = - \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{(n-1)ax^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{2(n-1)a} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{a+bx+cx^2}} - \frac{(n-2)c}{(n-1)a} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Or ponendo $n=2$, ne risulta

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a+bx+cx^2}} = - \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x \sqrt{a+bx+cx^2}};$$

e l'integrale del 2° membro è noto per le equazioni 8 e 9 del n° 58.

L'equazione 2 riceverà una forma più generale scambiandovi x con $\alpha + \beta x$, e ponendovi

$$a + bx + cx^2 = A, \quad b\beta + 2c\alpha\beta = B, \quad c\beta^2 = C.$$

Così per

$$X_n = \int \frac{dx}{(\alpha + \beta x)^n \sqrt{A + Bx + Cx^2}},$$

$$M = A\beta^2 - Bx\beta + C\alpha^2, \quad N = B\beta - 2C\alpha,$$

si avrà la relazione

$$\begin{aligned} 3. \quad (n-1)MX_n + \frac{2n-3}{2}NX_{n-1} + (n-2)CX_{n-2} \\ = -\frac{b\sqrt{A+Bx+Cx^2}}{(a+bx)^{n-1}} \end{aligned}$$

Esempio. Dall'equazione 1 si otterrà facilmente

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x+x^2}} &= \frac{2x-3}{4} \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{8} (2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}), \\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x-x^2}} &= -\frac{\sqrt{1-x-x^2}}{24} (8x^2-10x+31) \\ &\quad - \frac{17}{16} \arcsen \frac{2x+1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

e. Funzioni trascendenti.

72.

Funzioni trigonometriche.

È già noto pel n° 58 che insieme all'integrale

$$\int F'x \, dx = Fx$$

è dato ancora l'integrale

$$1. \quad \int F'u \, du = Fu$$

qualunque sia la funzione u di x o di altra variabile.

Oltrechè rispetto alle singole specie delle funzioni trascendenti si potranno utilizzare le equazioni dei n° 70 e 71 relative al trattamento delle funzioni differenziali composte. Scegliamo le funzioni trigonometriche

$$\operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx, \quad \frac{dx}{(a+b \cos x)^n}$$

Rispetto alla prima di queste due forme, ne otterremo facilmente l'integrale mercè le equazioni da 1 a 6 del n° 70. Imperocchè ponendo in ognuna di esse $a=1$, $b=-1$, $r=2$, $n=\frac{m-1}{2}$, $m=n$ ed $x=\cos x$, avremo ordinatamente

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx \\ &= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n+1} x \, dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-1} x \, dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x \, dx \\ &= -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n+2} x \, dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^n x \, dx \\ &= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x \, dx. \end{aligned}$$

Pel caso di m positivo ed n negativo si avrà dalla quarta delle sei equazioni che precedono,

$$2. \int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^n x} dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^{n-2} x} dx,$$

equazione inapplicabile al solo caso di $n=1$. In questo caso l'integrale di $\frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos x} dx$ è da trattarsi colla sesta forma, nella quale l'esponente m diminuendo, ne avverrà che denominando m un numero intero, l'integrale sarà riducibile ad una delle due forme

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx, \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Supponendo poi m negativo ed n positivo, si otterrà dalla quinta equazione

$$3. \int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^m x} dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^{m-2} x} dx,$$

che si determinerà per mezzo dell'equazione 2, scambiando x con $\frac{\pi}{2} - x$. Ma se fosse $m=1$, l'ultima equazione diverrebbe inapplicabile; ed in questo caso bisognerà ottenere l'integrale di $\frac{\cos^n x}{\operatorname{sen} x} dx$ dalla terza delle equazioni 1, e quindi per ogni valore intero di n si potrà ridurre alle forme

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx, \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$$

Se m ed n siano negativi ad un tempo, dalla quarta e quinta delle equazioni 1 si avrà

$$4. \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x},$$

$$5. \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x \cos^n x} = \frac{-1}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x}.$$

L'equazione 4 per $n=1$ e la 5 per $m=1$ riescono inapplicabili. In questi casi, per un intero m quando sia $n=1$, e per un intero n nell'ipotesi di $m=1$, si perverrà ad una delle tre forme

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{\cos x}, \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

Disegnando m ed n dei numeri interi, positivi o negativi, le equazioni da 1 a 5 condurranno ad integrali della forma

$$dx, \sin x dx, \cos x dx, \sin x \cos x dx, \\ \frac{\sin x}{\cos x} dx, \frac{\cos x}{\sin x} dx, \frac{dx}{\sin x}, \frac{dx}{\cos x}, \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

Di quest'integrali i primi tre son noti,

$$\int dx = x, \int \sin x dx = -\cos x, \int \cos x dx = \sin x.$$

Rispetto alla quarta e sesta forma osservando che $\cos x dx$ è il differenziale di $\sin x$, e riguardo alla quinta forma che $\sin x dx$ è il differenziale di $-\cos x$, si ha

$$6. \quad \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$7. \quad \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log \cos x$$

$$8. \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log \sin x$$

Ponendo nell'integrale di $\frac{dx}{\sin x}$ in vece di $\sin x$ il prodotto $2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$, e dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2 \frac{x}{2}$, si avrà

$$\int \left\{ \frac{d \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} : \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right\} = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

ovvero

$$9. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

e sostituendo $\frac{\pi}{2} + x$ ad x , ne risulterà

$$10. \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{tg} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right\}.$$

In fine dividendo per $\cos^2 x$ i due termini della forma $\frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$, si ottiene

$$11. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x.$$

Esempio. Siano da trovarsi gl' integrali

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx, \quad \int \cos^n x \, dx, \quad \int \operatorname{tg}^n x \, dx.$$

Per la sesta delle equ. 1 si ha

$$12. \quad \int \operatorname{sen}^n x \, dx = - \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx;$$

per la terza di esse si ottiene

$$13. \quad \int \cos^n x \, dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx,$$

e per la prima

$$14. \quad \int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx.$$

Trattando similmente gl' integrali che si trovano nei se-

condi membri di queste tre equazioni, e spingendo l'operazione finchè si giunga ad una delle precedenti equazioni finali, si troverà nel caso di n pari ovvero $2n$:

$$15. \int \sin^{2n} x dx = -\frac{\cos x}{2n} \left\{ \sin^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n-2} \sin^{2n-3} x \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)} \sin^{2n-5} x + \dots + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3}{(2n-2)(2n-4)\dots 4.2} \sin x \right\} \\ + \frac{(2n-1)(2-3)\dots 5.3.1}{2n(2n-2)\dots 6.4.2} x,$$

$$16. \int \cos^{2n} x dx = \frac{\sin x}{2n} \left\{ \cos^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n-2} \cos^{2n-3} x \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)} \cos^{2n-5} x + \dots + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3}{(2n-2)(2n-4)\dots 4.2} \cos x \right\} \\ + \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3.1}{2n(2n-2)\dots 6.4.2} x.$$

$$17. \int \lg^{2n} x dx = \frac{\lg^{2n-1} x}{2n-1} - \frac{\lg^{2n-3} x}{2n-3} + \dots \mp \lg x \pm x.$$

Al contrario per n dispari ossia per $n = 2n + 1$:

$$18. \int \sin^{2n+1} x dx = -\frac{\cos x}{2n+1} \left\{ \sin^{2n} x + \frac{2n}{2n-1} \sin^{2n-2} x + \dots \right. \\ \left. + \frac{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4.2}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3.1} \right\}.$$

$$19. \int \cos^{2n+1} x dx = \frac{\sin x}{2n+1} \left\{ \cos^{2n} x + \frac{2n}{2n-1} \cos^{2n-2} x + \dots \right. \\ \left. + \frac{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4.2}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3.1} \right\}.$$

$$20. \int \lg^{2n+1} x dx = \frac{\lg^{2n} x}{2n} - \frac{\lg^{2n-2} x}{2n-2} + \dots \pm \frac{\lg^2 x}{2} \mp \lg x.$$

Similmente si avrà:

$$21. \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x},$$

$$22. \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2}x},$$

$$23. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^n x} = -\frac{1}{(n-1)\operatorname{tg}^{n-1}x} - \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^{n-2}x}.$$

Dalle quali tre equazioni si avranno formole di riduzione simili a quelle presentate nelle equazioni da 15 fino a 20.

73.

Continuazione.

La formola presentata nel n° precedente

$$\int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n}$$

verrà integrata nel modo più facile, ricorrendo all'equazione 3 del n° 71; imperocchè facendo in essa

$$A = 1, B = 0, C = -1 \text{ ed } x = \cos x,$$

si ha per
$$X_n = \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n}$$

la relazione

$$(n-1)(b^2-a^2)X_n + (2n-3)aX_{n-1} - (n-2)X_{n-2} = \frac{b \operatorname{sen} x}{(a+b \cos x)^{n-1}},$$

ovvero, risolvendo rispetto ad X_n e sostituendo ad X_n , X_{n-1} , X_{n-2} i rispettivi valori

$$1. \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n} = \frac{b \operatorname{sen} x}{(n-1)(b^2-a^2)(a+b \cos x)^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(n-1)(b^2-a^2)} \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{n-2}{(n-1)(b^2-a^2)} \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{n-2}}.$$

Quindi per $n=2$ risulterà

$$2. \int \frac{dx}{(a-b \cos x)^2} = \frac{b \operatorname{sen} x}{(b^2-a^2)(a+b \cos x)} - \frac{a}{b^2-a^2} \int \frac{dx}{a+b \cos x};$$

dimodochè l'integrale proposto è ricondotto alla forma

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x}.$$

Per integrare questa forma, ci serviremo dell'equazione 17 del n° 58, ponendovi 1 in vece di A, -1 in vece di C e $\cos x$ in luogo di x . Così avremo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 \cos^2 x} &= -\frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} \cot x \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \operatorname{tg} x \right\}, \end{aligned}$$

essendochè $\operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$.

Or profittando per quest'ultima equazione equazione della relazione

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

dimodochè x sia scambiata con $\frac{x}{2}$, $2\alpha^2 + \beta^2$ con a e β^2 con b si avrà l'equazione

$$3. \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\},$$

la quale è applicabile nel solo caso di $a > b$.

Nel caso poi di $a < b$, la nota relazione

$$\operatorname{arctg} z i = \frac{1}{2i} \log \frac{1-z}{1+z}$$

e l'equazione 3 condurranno alla nuova forma

$$4. \quad \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

Se finalmente sia $a=b$, le relazioni

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

ci daranno

$$5. \quad \int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

74.

Altre funzioni trascendenti.

Nel differenziale $Pz^n dx$ rappresenti P una qualsivoglia funzione di x , e z sia una funzione trascendente della stessa variabile x ; siano inoltre

$$\int P dx = Q, \quad \int Q \frac{dz}{dx} dx = R, \quad \int R \frac{dz}{dx} dx = S, \dots$$

Se le funzioni $Q, R, S, \dots$ sono determinabili per integrazione, sarà noto ancora l'integrale di $Pz^n dx$. Imperocchè integrando per parti avremo

$$\int Pz^n dx = Qz^n - n \int Qz^{n-1} \frac{dz}{dx} dx,$$

$$\int Qz^{n-1} \frac{dz}{dx} dx = Rz^{n-1} - (n-1) \int Rz^{n-2} \frac{dz}{dx} dx,$$

$$\int Rz^{n-2} \frac{dz}{dx} dx = Sz^{n-2} - (n-2) \int Sz^{n-3} \frac{dz}{dx} dx,$$

.....

quindi

$$1. \quad \int Pz^n dx = Qz^n - nRz^{n-1} + n(n-1)Sz^{n-2} - + \dots$$

Esempio. Ponendo in questa equazione $P=1$, e sostituendo a z successivamente i valori

$$z = lx, \quad z = \arcsen x, \quad z = \arccos x$$

$$z = l(x + \sqrt{1+x^2}),$$

si avranno facilmente le equazioni

$$2. \quad \int l^n x dx = x l^n \left\{ 1 - \frac{n}{lx} + \frac{n(n-1)}{l^2 x} - + \dots \pm \frac{n(n-1) \dots 3.2.1}{l^n x} \right\},$$

$$3. \quad \int (\arcsen x)^n dx = (\arcsen x)^n \left\{ x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arcsen x} - \frac{n(n-1)x}{(\arcsen x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arcsen x)^3} + \dots \right\},$$

$$4. \quad \int (\arccos x)^n dx = (\arccos x)^n \left\{ x - \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arccos x} - \frac{n(n-1)x}{(\arccos x)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arccos x)^3} + \dots \right\},$$

$$5. \quad \int [l^n (x + \sqrt{1+x^2})] dx = l^n (x + \sqrt{1+x^2}) \left\{ x - \frac{n\sqrt{1+x^2}}{l(x + \sqrt{1+x^2})} + \frac{n(n-1)x}{l^2 (x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1+x^2}}{l^3 (x + \sqrt{1+x^2})} + \dots \right\}.$$

In egual guisa e nell'equazione 1 facendo $P = x^{n-1}$ si otterranno gl'integrali dei differenziali

$$x^{n-1} l^n x dx, \quad x^{n-1} (\arcsen x)^n dx.$$

Pel primo di questi integrali, a cagione di esempio, si ha

$$6. \int x^{n-1} l^n x dx = \frac{x^n}{n} l^n x \left\{ 1 - \frac{n}{a l x} + \frac{n(n-1)}{a^2 l^2 x} - + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{n(n-1) \dots 3.2.1}{a^n l^n x} \right\}.$$

I differenziali dei primi membri delle equazioni 2, 5 e 6 si possono trasformare in funzioni esponenziali, come quelli delle equazioni 3 e 4 lo saranno in funzioni trigonometriche, quando si ponga nelle equazioni 2 e 6

$$l x = z, x = e^z, dx = e^z dz,$$

e nell'equazione 5

$$l(x + \sqrt{1+x^2}) = z, x + \sqrt{1+x^2} = e^z,$$

ed essendo

$$\frac{(x + \sqrt{1+x^2})(-x + \sqrt{1+x^2})}{-x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{-x + \sqrt{1+x^2}} = e^z, \\ -x + \sqrt{1+x^2} = e^{-z},$$

sarà
$$x = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, dx = \frac{e^z + e^{-z}}{2} dz,$$

e finalmente nell'equazione 3 e 4

$$\arcsen x = z, x = \sen z, dx = \cos z dz, \\ \arccos x = z, x = \cos z, dx = -\sen z dz.$$

Così avremo ordinatamente dalle equ. 2 a 6 :

$$7. \int z^n e^z dz = z^n \left\{ 1 - \frac{n}{z} + \frac{n(n-1)}{z^2} - + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{n(n-1) \dots 3.2.1}{z^n} \right\},$$

$$8. \int z^n \cos z dz = z^n \left\{ \sen z \left[1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^2} + \dots \right] \right. \\ \left. + \cos z \left[\frac{n}{z} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^2} + \dots \right] \right\},$$

$$9. \int z^n \sin z \, dz = -z^n \left\{ \cos z \left[1 - \frac{n(n-1)}{z^2} + \dots \right] \right. \\ \left. - \sin z \left[\frac{n}{z} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \dots \right] \right\},$$

$$10. \int z^n \frac{e^z + e^{-z}}{2} \, dz = z^n \left\{ \frac{e^z - e^{-z}}{2} \left[1 + \frac{n(n-1)}{z^2} + \dots \right] \right. \\ \left. - \frac{e^z + e^{-z}}{2} \left[\frac{n}{z} + \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \dots \right] \right\},$$

$$11. \int z^n e^{az} \, dz = \frac{z^n e^{az}}{a} \left\{ 1 - \frac{n}{az} + \frac{n(n-1)}{a^2 z^2} - + \dots \right. \\ \left. + \frac{n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{a^n z^n} \right\}.$$

C. Integrali definiti.

a. Leggi generali.

75.

Deduzione dagli integrali indefiniti.

Gl' integrali indefiniti rappresentano le relazioni che han luogo tra un dato differenziale, $F'x \, dx$ e l'integrale Fx . Ma poichè la forma della funzione Fx viene con ciò ad esser conosciuta, così essi servono all'immediata deduzione dell'integrale definito di $F'x \, dx$. Ed in vero per l'equazione 1 del n° 51 vale tra i limiti $x=a$ ed $x=b$ l'equazione

$$1. \quad \int_a^b F'x \, dx = Fb - Fa,$$

quando

$$\int F'x \, dx = Fx$$

rappresenti l'integrale generale o indefinito. Quindi allorchè sarà noto l'integrale indefinito, non si avrà che a sottrarre il valore della funzione pel limite inferiore da quello corri-

spondente al limite superiore, per ottenere l'integrale definito.

Ciascun integrale vale purtuttavia per quei limiti soltanto, tra i quali la funzione non perde la sua continuità, imperocchè per soli valori consimili il differenziale $F'xdx$ può tra quei limiti rappresentare una quantità infinitamente piccola.

Così l'integrale, per esempio, di $\frac{dx}{x^4}$ è inammissibile tra i limiti $x = -a$ ed $x = +b$, essendochè tra questi limiti è compreso il valore $x=0$ che rende infinita l'espressione $\frac{1}{x^4}$. La stessa cosa viene già indicata dall'equazione

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3b^3} - \frac{1}{3a^3},$$

la quale ci presenta una quantità negativa come valore dell'integrale, mentre per ogni valore positivo o negativo di x la funzione $\frac{dx}{x^4}$ restando sempre positiva, tale dovrebbe ancora esserne la somma ossia l'integrale.

Perciò è indispensabile l'esaminare se tra limiti assegnati una data funzione integrale rimanga o pur no continua. Questo esame è reso agevole dal teorema del n° 16, essendochè dalla continuità della funzione differenziale seguendo necessariamente quella della funzione integrale e viceversa, è indifferente per l'esperimento della continuità quale delle due funzioni si metta a pruova.

Per quest'obbietto facciamoci ad esaminare alcuni casi.

Esempio 1. L'integrale

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

dell'equazione 7 n° 55 non può esser preso tra i limiti

α e β tali che siano

$$a + b\alpha + c\alpha^2 < 0 \text{ e } a + b\beta + c\beta^2 > 0$$

o viceversa, imperocchè tra questi limiti avvi un valore che renderebbe

$$\frac{1}{a+bx+cx^2} = \infty.$$

Per la stessa ragione non potrebbe per uno dei limiti esser

$$a + b\alpha + c\alpha^2 = 0.$$

Che anzi questo trinomio, per ogni valore di x compreso tra i limiti α e β , deve risultare di un medesimo segno, vale a dire che dovranno esser immaginarie le due radici

$$x = \frac{1}{2c}(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})$$

dell'ultima equazione, ed in conseguenza esser

$$4ac > b^2.$$

Risultamento del tutto conforme alla funzione integrale, che diviene infinita quando sia $4ac = b^2$, ed immaginaria nell'ipotesi di $4ac < b^2$.

Le stesse osservazioni valgono ancora per l'integrale dell'equazione 16 n° 55 e per quello dell'equ. 7 n° 58.

Esempio 2. L'integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsen \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}$$

non ammettere per limiti estremi quei valori soltanto che risulteranno dalla duplice equazione

$$\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} = \pm 1,$$

poichè il seno, che fosse maggiore di $+1$ o minore di -1 , darebbe un valore immaginario. E risolvendo l'ultima equa-

*

zione rispetto ad x , si hanno i valori

$$x = \frac{1}{2c} (b \pm \sqrt{4ac + b^2}),$$

che rappresentano i limiti estremi della continuità della funzione differenziale e dell'integrale.

Gli stessi limiti valgono ancora per ogni integrale riducibile alla precedente funzione, ovvero a

$$\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \ln \frac{2cx-b+\sqrt{4ac+b^2}}{2cx-b-\sqrt{4ac+b^2}}.$$

Esempio 3. Prendendo in considerazione le precedenti osservazioni, riflettendo che per $x = a - \alpha$ la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$ non è ancora un infinitesimo, tosto che α lo sia; si troverà che valgono gl'integrali

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2 \pi}{2},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x^n \sin x dx = \pi^n \left\{ 1 - \frac{n(n-1)}{\pi^2} + - \dots \right\} \\ + \frac{\pi^n}{2^n} \left\{ \frac{2n}{\pi} - \frac{2^2 n(n-1)(n-2)}{\pi^3} + - \dots \right\},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx,$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^a \frac{x^n dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} a^n \pi,$$

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-e^{2x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{1} \left\{ \frac{1}{2} e \right\}^2 - \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} e^2 \right\}^2 - \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} e^3 \right\}^2 - \dots \right]$$

76.

Metodi generali.

I metodi d'integrazione, esposti nei n.º da 54 a 60 per gl' integrali indefiniti, valgono ancora per gl' integrali definiti, poichè questi non contengono che i limiti dei primi, che ne sono le forme generali, e quei metodi restano indipendenti dai limiti speciali delle funzioni integrande.

Se all'opposto, come avviene pei metodi di riduzione e sostituzione, la variabile si scambii con un'altra, i limiti ancora dovranno alterarsi; dimodochè se nell'equazione

$$\int_{x_0}^{x_n} F'x dx = Fx_n - Fx_0$$

la x si muti in una nuova variabile z , e

z in z_0 , quando sia $x = x_0$,

e z in z_n , quando sia $x = x_n$,

avrà luogo l'equazione

$$1. \quad \int_{x_0}^{x_n} F'x dx = \int_{z_0}^{z_n} F'z dz.$$

Esista inoltre tra $F'x$ e fz la relazione

$$F'x dx = fz dz ,$$

seguirà necessariamente che

$$Fx = fz + C ,$$

imperocchè due funzioni , che hanno eguali differenziali , non possono differire che di una quantità costante. Ma dall'ultima equazione risulta

$$Fx_a = fz_a + C , Fx_o = fz_o + C ,$$

dunque
$$Fx_a - Fx_o = fz_a - fz_o ,$$

ovvero
$$\int_{x_o}^{x_a} F'x dx = \int_{z_o}^{z_a} fz dz .$$

E poichè la relazione

$$F'x dx = fz dz$$

suppone che x sia funzione di z o viceversa, ne segue che nell'ipotesi di $x = \varphi z$ dovrà reggere ancora l'equazione

$$fz dz = \int (\varphi z) \varphi' z dz ,$$

purchè Fx o $F'x$ resti continua tra i limiti $x = x_a$, $x = x_o$.

Esempio 1. Integrando tra i limiti $x = -1$ ed $x = +1$ l'equazione 9 n° 70 , ne risulta , tostochè si scriva $2n$ in vece di n :

$$2. \quad \int_{-1}^{+1} \frac{x^{2ndx}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)(2n-3)...5.3.1}{2n(2n-2)...6.4.2} \pi ,$$

essendo $\arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Ma scambiando nell'integrale di quest'equazione x con $\sen z$ dimodochè dx diverrà $\cos z dz$, e $\sqrt{1-x^2}$ si trasformerà in $\cos z$, sarà

$$\text{per } x = -1 , \text{ senz} = -1 \text{ e } z = -\frac{\pi}{2} ,$$

per $x = +1$, $\operatorname{sen} z = +1$ e $z = \frac{\pi}{2}$.

Saranno dunque $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ i limiti dell'integrale, ed in conseguenza

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} z dz.$$

In fatti l'equazione 15 n° 72 dimostra che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5.3.1}{2n(2n-2)\dots 6.4.2} \pi.$$

Esempio 2. Per l'esempio 3. n° 63 si ha nell'ipotesi di $m < n$,

$$\frac{x^{2m}}{x^{2n+1}} = -\frac{1}{n} \sum \frac{x \cos(2m+1)k - \cos mk}{x^2 - 2x \cos k + 1}$$

supponendo che k rappresenti ordinatamente i numeri

$$\frac{1}{2n} \pi, \frac{3}{2n} \pi, \dots, \frac{2n-3}{2n} \pi, \frac{2n-1}{2n} \pi.$$

Mercè l'equ. 3 del n° 58 si ha inoltre

$$\int \frac{x \cos(2m+1)k - \cos mk}{x^2 - 2x \cos k + 1} dx = \frac{1}{2} \cos(m+1)k \log(x^2 - 2x \cos k + 1) \\ + [\cos(2m+1)k \cos k - \cos 2mk] \int \frac{dx}{x^2 - 2x \cos k + 1}.$$

L'integrale del 2° membro è da cercarsi mercè l'equazione 8 n° 55, stantechè si ha $4ac - b^2 > 0$, ovvero

$$4 - 4 \cos^2 k = 4 \operatorname{sen}^2 k > 0;$$

quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x \cos k + 1} = \frac{1}{\operatorname{sen} k} \operatorname{arc} \lg \frac{x - \cos k}{\operatorname{sen} k}.$$

Per noto teorema trigonometrico essendo ancora

$\cos(2m+1)k \cos k - \cos 2mk = -\sin(2m+1)k \sin k$,
sarà

$$\int \frac{x \cos(m+1)k - \cos mk}{x^2 - 2x \cos k + 1} dx = \frac{1}{2} \cos(2m+1)k (x^2 - 2x \cos k + 1) \\ - \sin(2m+1)k \operatorname{arctg} \frac{x - \cos k}{\sin k}.$$

Laonde moltiplicando l'equazione anzidetta per dx ed integrandola rispetto ad x , si avrà

$$3. \quad \int \frac{x^{2n} dx}{x^{2n} + 1} = -\frac{1}{2n} \sum \cos(2m+1)k (x^{2n} - 2x \cos k + 1) \\ + \frac{2}{2n} \sum \sin(2m+1)k \operatorname{arctg} \frac{x - \cos k}{\sin k},$$

k indicando la serie dei numeri di sopra mentovati.

Essendo $2m < 2n$, questa equazione potrà esser integrata tra il limite 0 ed un numero u crescente all'infinito, dimodochè si avrà

$$\int_0^u \frac{x^{2n} dx}{x^{2n} + 1} = -\frac{1}{2n} \sum \cos(2m+1)k (u^{2n}) \\ + \frac{2}{2n} \sum \sin(2m+1)k \frac{\pi}{2}$$

ovvero

$$4. \quad \int_0^u \frac{x^{2n} dx}{x^{2n} + 1} = -\frac{1}{n} \sum \cos(2m+1)k \\ + \frac{\pi}{2n} \sum \sin(2m+1)k,$$

k conservando il suo significato.

Le somme di $\cos(2m+1)k$ e $\sin(2m+1)k$ di questa equazione possono ridursi ad espressioni finite. Imperocchè ponendo $\sqrt{-1} = i$, abbiamo subito

$$2\cos(2m+1)k = e^{(2m+1)ki} + e^{-(2m+1)ki}.$$

Or ponendo per brevità $\frac{2m+1}{2n}\pi = z$, si avrà

$$2 \sum \cos(2m+1)k = e^{zi} + e^{2zi} + \dots + e^{(2n-1)zi} \\ + e^{-zi} + e^{-2zi} + \dots + e^{-(2n-1)zi},$$

ovvero

$$2 \sum \cos(2m+1)k = e^{zi}(1 + e^{2zi} + \dots + e^{(2n-2)zi}) \\ + e^{-zi}(1 + e^{-2zi} + \dots + e^{-(2n-2)zi}) \\ = e^{zi} \frac{e^{2nzi} - 1}{e^{2zi} - 1} + e^{-zi} \frac{e^{-2nzi} - 1}{e^{-2zi} - 1}.$$

Ma essendo

$$e^{\pm 2nzi} = \cos 2nz \pm i \sin 2nz, \text{ e } z = \frac{2m+1}{2n}\pi,$$

sarà $e^{\pm 2nzi} = \cos(2m+1)\pi \pm i \sin(2m+1)\pi = -1$,

ed in conseguenza

$$2 \sum \cos(2m+1)k = -2 \frac{e^{zi}}{e^{2zi} - 1} - 2 \frac{e^{-zi}}{e^{-2zi} - 1},$$

ovvero

$$\sum \cos(2m+1)k = -\frac{e^{zi} \cdot e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} - \frac{e^{-zi} \cdot e^{zi}}{e^{-zi} - e^{zi}} = 0$$

Laonde pel numero $\frac{2m+1}{2n}k$, quando $\frac{2m+1}{2n}$ sia frazione vera, avrà luogo l'equazione

$$\cos a\pi + \cos 3a\pi + \cos 5a\pi + \dots + \cos(2r+1)a\pi = 0.$$

Per quel che poi riguarda la somma dei $\sin(2m+1)k$, si ha

$$2i \sin(2m+1)k = e^{(2m+1)ki} - e^{-(2m+1)ki},$$

quindi coll'ajuto delle precedenti equazioni

$$2i \sum \operatorname{sen} (2m+1)k = -2 \frac{e^{zi}}{e^{2zi}-1} + 2 \frac{e^{-zi}}{e^{-2zi}-1} = \frac{-4}{2i \operatorname{sen} z}$$

ed in conseguenza

$$\sum \operatorname{sen} (2m+1)k = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{2m+1}{2n} \pi}$$

Quindi pel suddetto significato di a si ottiene l'equazione

$$\operatorname{sen} a\pi + \operatorname{sen} 3a\pi + \operatorname{sen} 5a\pi + \dots + \operatorname{sen} (2r+1)a\pi = \frac{1}{\operatorname{sen} a\pi},$$

r indicando un numero qualunque intero.

Or introducendo nell'equazione 4 i valori che abbiamo trovato delle somme di $\cos (2m+1)k$ e $\operatorname{sen} (2m+1)k$, ne risulta

$$5. \quad \int_0^\infty \frac{x^{2m} dx}{x^{2m}+1} = \frac{\pi}{2n \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2n} \pi},$$

giacchè il numero assoluto $\sum \cos (2m+1)k = 0$, moltiplicato per lu ovvero $l(\infty)$, deve dare un prodotto nullo.

In fine ponendo in questa equazione

$$x^{2n} = y, \text{ e } \frac{2m+1}{2n} = a,$$

$$\text{quindi} \quad dx = \frac{dy}{2n x^{2n-1}} = \frac{dy}{2n y^{1-\frac{1}{2n}}},$$

e considerando che dovrà essere

$$\text{per } x=0 \text{ anche } y=0,$$

$$\text{per } x=\infty \text{ anche } y=\infty:$$

$$\text{si avrà} \quad \frac{1}{2n} \int_0^\infty \frac{y^{n-1} dy}{y+1} = \frac{\pi}{2n \operatorname{sen} a\pi},$$

ovvero, scrivendo x in vece di y ,

$$6. \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{x+1} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi},$$

nella quale equazione a significa una frazione vera positiva.

Esempio 5. Se nelle equazioni 20 e 21 del n° 58 scambiamo a con $-a$ ovvero x con $-x$, risulteranno le due equazioni

$$\begin{aligned} \int e^{-ax} \cos bx \, dx &= \frac{b \operatorname{sen} bx - a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \\ \int e^{-ax} \operatorname{sen} bx \, dx &= -\frac{b \cos bx + a \operatorname{sen} bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}, \end{aligned}$$

che possono esser prese tra i limiti 0 e ∞ . Quindi risulteranno le equazioni

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx &= \frac{a}{a^2 + b^2}, \\ \int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{sen} bx \, dx &= \frac{b}{a^2 + b^2}, \end{aligned}$$

le quali differenziate n volte rispetto ad a , diverranno, avuto riguardo alle equazioni

$$D_x^{(n)} \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ e } D_x^{(n)} \frac{b}{a^2 + b^2}$$

dell'esempio 2 n° 12,

$$7. \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \cos bx \, dx = 1. 2. 3 \dots n \frac{\cos(n+1)\varphi}{(a^2 + b^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

$$8. \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \operatorname{sen} bx \, dx = 1. 2. 3 \dots n \frac{\operatorname{sen}(n+1)\varphi}{(a^2 + b^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

ponendo $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Le due equazioni valgono ancora per $a = 0$; sarà in conseguenza $\varphi = \frac{\pi}{2}$, e per $n = 1$ in vece di n si avrà

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} \cos bx \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{b^n} \cos \frac{n\pi}{2},$$

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} \sin bx \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{b^n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

L'equazione $\int e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a} e^{-ax}$

può essere egualmente integrata tra $x=0$ ed $x=\infty$. Essa ci dà

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a},$$

dalla quale, mercè $(n-1)$ differenziazioni rispetto ad a , risulta

$$9. \quad \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-ax} \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{a^n}$$

In egual guisa l'equazione

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}},$$

differenziata n volte rispetto ad a , ci somministra

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \, dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n a^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

ovvero, abbreviando e scambiando a con a^2 ,

$$10. \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2a^{2n+1}}.$$

Esempio 4. Se le già adoperate equazioni

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos nx dx = \frac{a}{a^2 + n^2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin nx dx = \frac{n}{a^2 + n^2},$$

vengano integrate rispetto ad a e tra i limiti b e c , esse daranno

$$11. \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} dx = \log \frac{c}{b},$$

$$12. \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} \cos nx dx = \frac{1}{2} \log \frac{c^2 + n^2}{b^2 + n^2}$$

$$13. \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} \sin nx dx = \arctg \frac{c}{n} - \arctg \frac{b}{n}.$$

La prima di queste tre equazioni suppone che i due limiti b e c siano diversi da zero ed abbiano lo stesso segno. A questa limitazione non sono però sottoposte le altre due; ed in conseguenza ponendo nella terza equazione $b = 0$ e $c = \infty$, si ottiene l'equazione

$$14. \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

che vale per ogni valore positivo n .

77.

Metodi speciali.

L'equazione
$$\int_a^b Fx dx = Fb - Fa$$

dimostra che ogni differenza, eguale nella forma al suo 2°

membro, può riguardarsi qual integrale definito della funzione $F'x dx$ rappresentata dal simbolo F . Da questa considerazione deriva la conoscenza di alcuni attributi propri degli integrali definiti.

1. Essendo $Fb - Fa = -(Fa - Fb)$

e $Fa - Fb = \int_b^a F'x dx,$

sarà $\int_a^b F'x dx = - \int_b^a F'x dx.$

2. Se la funzione Fx è continua tra i limiti $x = a$ ed $x = b$, lo sarà ancora per $x = c$, supponendo che sia $b > c > a$. Quindi l'equazione identica

$$Fb - Fa = (Fc - Fa) + (Fb - Fc)$$

mena alla relazione

$$\int_a^b F'x dx = \int_a^c F'x dx + \int_c^b F'x dx.$$

3. Inoltre l'equazione

$$Fa - Fb = F(b + c - c) - F(a + c - c)$$

è soddisfatta per ogni valore di c . Ma se il valore dell'integrale, di cui costa il 2° membro, deve pareggiare il 1°, i suoi limiti dovranno essere $b + c$ ed $a + c$, e $F(x - c)$ la funzione, dalla quale risulteranno Fa e Fb , quando vi s'introducano $b + c$ ed $a + c$. Si avrà dunque dall'ultima equazione

$$\int_a^b F'x dx = \int_{a+c}^{b+c} F'(x - c) dx,$$

ovvero, supponendo che $F'(x + c)$ rimanga continua e che x

sia scambiata con $x + c$,

$$\int_a^b F'(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} F'x dx.$$

4. Dall'eguaglianza

$$Fb - Fa = F\left\{\frac{bc}{c}\right\} - F\left\{\frac{ac}{c}\right\}$$

si perviene nello stesso modo all'equazione

$$\int_a^b F'(cx) dx = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} F'x dx,$$

ovvero,

$$\int_a^b F'x dx = \int_{ac}^{bc} F'\left\{\frac{x}{c}\right\} dx.$$

Esempio I. Se nell'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a}$$

si ponga $-x$ in vece di x , cosicchè i limiti 0 e ∞ passino rispettivamente a 0 e $-\infty$, si avrà per l'equazione sotto il n° 1

$$-\int_0^{-\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

Or per l'equazione sotto il n° 2 si ha

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{a^2 + x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a}.$$

Del pari sarà

$$\int_{-\frac{\pi}{2a}}^{+\frac{\pi}{2a}} \operatorname{sen}^{2n} x dx = \int_{-\frac{\pi}{2a}}^0 \operatorname{sen}^{2n} x dx + \int_0^{+\frac{\pi}{2a}} \operatorname{sen}^{2n} x dx.$$

Ma
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}^n x \, dx = - \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \, dx ,$$

e scambiando nell' integrale a destra x con $-x$ si ottiene

$$- \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \, dx = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \, dx ;$$

dunque
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \, dx = 2 \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \, dx ,$$

e prendendo il valore del primo membro dall' esempio 1 del n° 76 , si avrà .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} .$$

Esempio 2. L' integrale dell' equazione 6 n° 76

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$$

sia decomposto in due parti , la prima delle quali sia presa da $x=0$ ad $x=1$, la seconda da $x=1$ ad $x=\infty$.
Avremo così

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{1+x} + \int_1^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi} .$$

Ma il secondo integrale ammette gli stessi limiti del primo, quando x si muti in $\frac{1}{x}$, dimodochè passerà in

$$- \int_1^0 \frac{x^{-n} dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{-n} dx}{1+x} .$$

Quindi la somma di questo integrale e del primo ci darà

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} + x^{-n}}{1+x} \, dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi} .$$

Esempio 3. Sia da cercarsi l'integrale doppio

$$\int_0^a \int_0^\infty \varphi z \cos tz \cos nkt \, dt \, dz = u,$$

supponendo che z indichi una funzione continua tra $z=0$ e $z=a$.

Per ottenere subito l'integrale rispetto a t tra i limiti $t=0$, e $t=\infty$, poniamo

$$\cos tz \cos nkt = \frac{1}{2} \cos(z+nk)t + \frac{1}{2} \cos(z-nk)t,$$

quindi

$$\int \cos tz \cos nkt \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(z+nk)t}{z+nk} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(z-nk)t}{z-nk}.$$

Questo integrale sparisce nell'ipotesi di $t=0$, e questo valore può anche attribuirsi alla variabile z in comparazione di nk , imperocchè per $z=nk$ si ha:

$$\frac{\text{sen}(z-nk)t}{z-nk} = \frac{0}{0} = t \cos(z-nk)t.$$

Quindi ponendo τ per $t=\infty$, ne risulta

$$1. \int_0^\infty \cos tz \cos nkt \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(z+nk)\tau}{z+nk} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(z-nk)\tau}{z-nk},$$

ed in conseguenza rispetto al proposto integrale reggerà l'equazione

$$2. u = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\text{sen}(z+nk)\tau}{z+nk} \varphi z \, dz + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\text{sen}(z-nk)\tau}{z-nk} \varphi z \, dz.$$

Rispetto al primo di questi due integrali estendendo a $0+nk$ ed $a+nk$ i limiti 0 ed a , mercè l'equazione contenuta sotto il n° 3 potremo scrivere:

$$\int_0^a \frac{\text{sen}(z+nk)\tau}{z+nk} \varphi z \, dz = \int_{nk}^{a+nk} \frac{\text{sen}z\tau}{z} \varphi(z-nk) \, dz,$$

e moltiplicando per τ i limiti di questo integrale, avremo per l'equazione sotto il n° 4:

$$\int_0^a \frac{\text{sen}(z+nk)\tau}{z+nk} \varphi z dz = \int_{nk\tau}^{(a+nk)\tau} \frac{\text{sen } z}{z} \varphi \left\{ \frac{z}{\tau} - nk \right\} dz.$$

L'integrale del 2° membro evidentemente è nullo, giacchè i limiti $nk\tau$ ed $(a+nk)\tau$ sono infinitamente grandi a cagione di $\tau = \infty$.

Quanto al secondo integrale dell'equazione 2 diminuiremo di nk i limiti, e così avremo

$$\int_0^a \frac{\text{sen}(z-nk)\tau}{z-nk} \varphi z dz = \int_{-nk}^{a-nk} \frac{\text{sen } z}{z} \varphi(z+nk) dz.$$

Qui può esser $a - nk \geq 0$.

Nel caso di $a - nk < 0$ vale l'equazione

$$\int_{-nk}^{a-nk} \frac{\text{sen } z}{z} \varphi(z+nk) dz = \int_{-nk\tau}^{(a-nk)\tau} \frac{\text{sen } z}{z} \varphi \left\{ \frac{z}{\tau} + nk \right\} dz.$$

Ma l'integrale del 2° membro può esser decomposto nei due integrali

$$\int_{-nk\tau}^0 \frac{\text{sen } z}{z} \varphi \left\{ \frac{z}{\tau} + nk \right\} dz + \int_0^{(a-nk)\tau} \frac{\text{sen } z}{z} \varphi \left\{ \frac{z}{\tau} + nk \right\} dz,$$

l'ultimo dei quali a cagione di $(a - nk)\tau = \infty$ e $\frac{z}{\tau} = 0$ mena, per l'equazione 14 del n° 76, all'equazione

$$\int_0^{(a-nk)\tau} \frac{\text{sen } z}{z} \varphi \left\{ \frac{z}{\tau} + nk \right\} dz = \frac{\pi}{2} \varphi(nk).$$

Ma pel primo integrale, scambiandovi z con $-z$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-nk\tau}^{\tau} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \varphi\left\{\frac{z}{\tau} + nk\right\} dz &= - \int_{nk\tau}^{\tau} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \varphi\left\{-\frac{z}{\tau} + nk\right\} dz \\ &= \int_0^{nk\tau} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \varphi(nk) dz = \frac{\pi}{2} \varphi(nk), \end{aligned}$$

dimodochè per $a > nk$ sarà

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen}(z - nk)\tau}{z - nk} \varphi z dz = \pi \varphi(nk).$$

Se poi fosse $a = nk$, il suddetto integrale assumerebbe il valore $\frac{\pi}{2} \varphi(nk)$, ed il valore 0 nell'ipotesi di $a < nk$, come per analoga via si può subito trovare.

Ponendo $a = \infty$, e sempre maggiore di nk come n diviene più grande, si avrà pel proposto integrale doppio l'equazione

$$3. \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi z \cos t z \cos n k t dt dz = \frac{\pi}{2} \varphi(nk).$$

Nello stesso modo si perverrà all'equazione

$$4. \quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi z \operatorname{sen} t z \operatorname{sen} n k t dt dz = \frac{\pi}{2} \varphi(nk).$$

78.

Integrazione per approssimazione.

Non è sempre possibile soddisfare all'equazione

$$\int_a^b F'x dx = Fb - Fa,$$

imperocchè non ogni funzione $F'x$ deriva da differenziazio-

*

ne, nè i metodi d'integrazione sono sufficienti alla rappresentazione di ogni funzione Fx . Quando avviene un caso simile, non rimane a far altro che determinare approssimativamente l'integrale, considerandolo come somma di quantità non infinitamente piccole, ma molto piccole; e come queste si prenderanno più piccole, la loro somma potrà tanto più avvicinarsi al valore dell'integrale. Sia dunque da cercarsi il valore di $Fb - Fa$ per l'equazione

$$1. \quad \int_a^b f x \, dx = Fb - Fa.$$

Decomponiamo la differenza $b - a$ in n parti eguali δ . Intanto per la serie di Taylor si ha

$$F(a + \delta) = Fa + \delta F'a + \frac{\delta^2}{1.2} F''a + \frac{\delta^3}{1.2.3} F'''a + \dots$$

Ma poichè per l'equazione 1 è

$$\int f x \, dx = Fx \text{ ossia } \int f a \, da = Fa,$$

quindi $fa = F'a$, $fa = F''a$, $f'a = F'''a$, ...
così sarà

$$F(a + \delta) = Fa + \delta fa + \frac{\delta^2}{1.2} fa + \frac{\delta^3}{1.2.3} f'a + \dots$$

e similmente pei successivi valori $a + 2\delta$, $a + 3\delta$, ...
 $a + n\delta$ si avrà

$$F(a + 2\delta) = F(a + \delta) + \delta f(a + \delta) + \frac{\delta^2}{1.2} f(a + \delta) + \dots$$

$$F(a + 3\delta) = F(a + 2\delta) + \delta f(a + 2\delta) + \frac{\delta^2}{1.2} f(a + 2\delta) + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F(a + n\delta) = F(a + [n-1]\delta) + \delta f(a + [n-1]\delta) + \frac{\delta^2}{1.2} f(a + [n-1]\delta) + \dots$$

Addizionando tutte queste equazioni si avrà, a cagione di

$$n\delta = b - a,$$

$$2. \quad Fb - Fa = \delta \cdot \sum_{m=0}^{n-1} f(a + m\delta) + \frac{\delta^2}{1.2} \sum_{m=0}^{n-1} f'(a + m\delta) + \frac{\delta^3}{1.2.3} \sum_{m=0}^{n-1} f''(a + m\delta) + \dots$$

Svolgendo similmente le funzioni

$$f(a + m\delta), f'(a + m\delta), \dots$$

per ogni valore di m da $m=1$ fino ad $m=n-1$, si avrà

$$fb - fa = \delta \sum_{m=0}^{n-1} f(a + m\delta) + \frac{1}{2} \delta^2 \sum_{m=0}^{n-1} f'(a + m\delta) + \dots$$

$$fb - fa = \delta \sum_{m=0}^{n-1} f'(a + m\delta) + \frac{1}{2} \delta^2 \sum_{m=0}^{n-1} f''(a + m\delta) + \dots$$

Da queste due ultime equazioni, trascurando le potenze della piccolissima quantità δ che siano superiori alla 2^a, avremo ad uso dell'equazione 2 :

$$\frac{1}{2} \delta^2 \sum f'(a + m\delta) = \frac{1}{2} \delta (fb - fa) - \frac{1}{4} \delta^2 (fb - fa)$$

$$\frac{1}{2.3} \delta^3 \sum f''(a + m\delta) = \frac{1}{2.3} \delta (fb - fa),$$

supponendo però che le somme si estendano da $m=0$ fino ad $m=n-1$. Quindi per l'equazione 2 risulterà il valore

$$Fb - Fa = \delta \sum f(a + m\delta) + \frac{1}{2} \delta (fb - fa) - \frac{1}{12} \delta^2 (fb - fa)$$

ovvero, avendo riguardo all'equazione 1,

$$3. \quad \int_a^b f x \, dx = \delta \left\{ \frac{1}{2} f a + f(a + \delta) + f(a + 2\delta) \right. \\ \left. + \dots + f(a + [n-1]\delta) + \frac{1}{2} f b \right\} - \frac{1}{12} \delta^2 (f' b - f' a),$$

La serie costituente il 2° membro di quest'ultima equazione tanto più si approssimerà all'integrale del 1° membro, come sarà più piccola δ ovvero $\frac{1}{n} (b - a)$, e minore l'alterazione della funzione $f x$ tra i limiti a e b . Nel maggior numero di casi si potrà trascurare il termine $-\frac{1}{12} \delta^2 (f' b - f' a)$, dimodochè per una determinazione approssimativa dell'integrale basteranno i valori numerici di $f a$, $f(a + \delta)$, . . . senza conoscere la forma della funzione $f x$.

Esempio 1. Sia da determinarsi

$$\int_a^b \frac{dx}{x}.$$

Qui abbiamo $f x = \frac{1}{x}$, $f a = \frac{1}{a}$, $f b = \frac{1}{b}$

$$f(a + \delta) = \frac{1}{a + \delta}, \quad f(a + 2\delta) = \frac{1}{a + 2\delta}, \quad \dots$$

$$f' a = -\frac{1}{a^2}, \quad f' b = -\frac{1}{b^2}.$$

In conseguenza

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \delta \left\{ \frac{1}{2a} + \frac{1}{a + \delta} + \frac{1}{a + 2\delta} + \frac{1}{a + 3\delta} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{a + [n-1]\delta} + \frac{1}{2b} \right\} - \frac{\delta^2}{12} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\}.$$

Ponendo a cagion di esempio $a = 1$, $b = 2$, l'ultima equazione ci darà

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \delta \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\delta} + \frac{1}{1+2\delta} + \frac{1}{1+3\delta} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{1+(n-1)\delta} + \frac{1}{2(1+n\delta)} \right\} - \frac{\delta^n}{16}$$

Nell'ipotesi di $n=3$ e quindi $\delta = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$, risulta :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \right\} - \frac{1}{144} = 0,693056.$$

Per $n=4$ e quindi $\delta = \frac{1}{4}$ si ha

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{4}{6} + \frac{4}{7} + \frac{1}{4} \right\} - \frac{1}{256} = 0,693118,$$

e per $n=6$ e $\delta = \frac{1}{6}$ si ottiene

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{6}{7} + \frac{6}{8} + \frac{6}{9} + \frac{6}{10} + \frac{6}{11} + \frac{1}{4} \right\} - \frac{1}{576} = 0,693141.$$

E quest'ultimo valore è già esatto fino alla quinta cifra decimale.

79.

Integrazione ripetuta.

In $\int x dx^n$ ovvero nell'equazione

$$\frac{d^n y}{dx^n} = fx$$

rappresenti fx una funzione di x continua tra dati limiti, ed n , come di ordinario, indichi un numero intero positivo; sarà $\int x dx^n$ l'effetto di una differenziazione n volte ripetuta sulla funzione y .

Ciò posto, per ottenere dall'equazione la funzione primitiva y , si potrà tenere la seguente via. Si cerchi primieramente l'integrale di $fx dx$; questo integrale, che porterà seco una costante arbitraria, si moltiplichi per dx ; e s'integri la funzione differenziale che ne risulta. L'integrale così ottenuto portando una nuova costante, vi saranno in generale due costanti arbitrarie. Moltiplicando l'ultimo integrale per dx e poi eseguendo una nuova integrazione, si avrà un risultamento con tre costanti arbitrarie; e così di seguito. Laonde l'integrale richiesto y della funzione $d^n y = fx dx^n$ avrà in generale n costanti arbitrarie.

Purtuttavia questo metodo, per quanto naturale egli sia, non lascia di aver l'inconveniente che le successive integrazioni possono menare a funzioni non altrimenti integrabili che per mezzo di serie. Sia data, ad esempio, la funzione $d^n y = x l^n x dx$: si avrà subito

$$\int x l^n x dx = \frac{x}{2} l^n x - \frac{n}{2} \int x l^{n-1} x dx + C.$$

Questo primo integrale, dipendendo da un altro consimile, potrà esser rappresentato da una serie ordinata per le potenze di lx . Per ogni termine di questa serie il secondo integrale ne darà un'altra delle potenze di lx , e similmente avverrà per ogni termine di questa seconda serie rispetto al terzo integrale.

Per toglier di mezzo questo inconveniente, noi terremo la seguente via.

Moltiplicando per dx l'equazione

$$\frac{d^n y}{dx^n} = fx,$$

essa prenderà la forma

$$d \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = fx dx,$$

il cui integrale sarà rappresentato da

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_a^x f x \, dx + C,$$

o ciò ch'è lo stesso, da

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_a^x f z \, dz + C_1.$$

Moltiplicando questa equazione per dx ed integrando dinuovo, ne risulterà

$$1. \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \int_a^x \int_a^x f z \, dz \, dx + C_1 (x-a) + C_2.$$

Ma l'integrale doppio del 2° membro può condurre ad una forma non integrabile. Ad evitar la qual cosa noi ci serviremo dell'equazione identica

$$D_x \int_a^x (x-z)^n f z \, dz = n \int_a^x (x-z)^{n-1} f z \, dz,$$

donde per valore dell'integrale del 2° membro si ha

$$\int_a^x (x-z)^{n-1} f z \, dz = \frac{1}{n} D_x \int_a^x (x-z)^n f z \, dz,$$

ovvero, moltiplicando per dx ed integrando rispetto ad x da a fino ad x ,

$$2. \quad \int_a^x \int_a^x (x-z)^{n-1} f z \, dz \, dx = \frac{1}{n} \int_a^x (x-z)^n f z \, dz + C.$$

Questa equazione 2 è quella che riduce il doppio integrale dell'equazione 1 ad una forma più semplice, imperocchè per $n=1$ essa ci dà

$$\int_a^x \int_a^x f z \, dz \, dx = \int_a^x (x-z) f z \, dz + C;$$

dimodochè si avrà dall'equ. 1

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int (x-z) f_z dz + C_1(x-a) + C_2.$$

Moltiplicando dinuovo questa equazione per dx ed integrando poi rispetto ad x , si avranno mercè l'equazione 2 successivamente le altre:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_a^x \frac{(x-z)^2}{1.2} f_z dz + C_1 \frac{(x-a)^2}{1.2} + C_2(x-a) + C_3,$$

.....

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \int_a^x \frac{(x-z)^{n-2}}{1.2.3...(n-2)} f_z dz + C_1 \frac{(x-a)^{n-2}}{1.2.3...(n-2)} \\ + C_2 \frac{(x-a)^{n-3}}{1.2.3...(n-3)} + \dots + C_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad y = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} f_z dz + C_1 \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} \\ + C_2 \frac{(x-a)^{n-2}}{1.2.3...(n-2)} + \dots + C_{n-1}(x-a) + C_n, \end{aligned}$$

in cui $C_1, C_2, \dots, C_n$ esprimono le n costanti arbitrarie risultanti dalle n equazioni.

80.

Continuazione.

Le funzioni

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}, \dots, y$$

vengono rappresentate mercè le forme

$$\int f_x dx, \int \int f_x dx^2, \int \int \int f_x dx^3, \dots, \int \int \dots \int f_x dx^n,$$

ovvero, come suol anche scriversi, da

$$\int^{(1)} f x dx, \int^{(2)} f x dx^2, \int^{(3)} f x dx^3, \dots \int^{(n)} f x dx^n,$$

ed ordinatamente si appellano integrali del primo, secondo, terzo, n^{esimo} ordine, ovvero in generale integrali ripetuti.

Rispetto a questi integrali generali si hanno dall'equazione 3 del n° precedente le relazioni

$$\int \int f x dx^2 = \int_a^x (x-z) f z dz + C_1(x-a) + C_2,$$

$$1. \quad \int \int \int \dots f x dx^n = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f z dz + C_1 \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} + \dots + C_{n-1}(x-a) + C_n.$$

Se nell'ultima equazione si svolgano le potenze di $x-a$, si ordini rispetto alle potenze di x , e s'indichino con $A_1, A_2, A_3, \dots$ i fattori di esse, si avrà l'equazione più semplice

$$2. \quad \int \int \int \dots f x dx^n = \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)} \int_a^x (x-z)^{n-1} f z dz + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n.$$

Ma prendendo questo integrale tra i limiti $x=a$ ed $x=x$, si avrà, stantechè l'integrale di $f x dx$ preso tra limiti determinati non può contener costante,

$$\int_a^x \int_a^x f x dx^2 = \int_a^x (x-z) f z dz,$$

$$\int_a^x \int_a^x \int_a^x f x dx^3 = \int_a^x \frac{(x-a)^2}{1.2} f z dz,$$

.

$$3. \quad \int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x f x dx^n = \int_a^x \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f z dz.$$

E se il fattore $(x-z)^{n-1}$ del 2° membro dell'equazione 1 si svolga colla formola del binomio, ne risulterà

$$\int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x f x dx^n = \frac{1}{1.2.3 \dots (n-1)} \left\{ x^{n-1} \int_a^x f z dz - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int_a^x z f z dz \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \int_a^x z^2 f z dz + \dots \pm \int_a^x z^{n-1} f z dz \right\},$$

ovvero, ciò ch'è lo stesso

$$4. \int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x f x dx^n = \frac{1}{1.2.3 \dots (n-1)} \left\{ x^{n-1} \int_a^x f x dx - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int_a^x x f x dx \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \int_a^x x^2 f x dx + \dots \pm \int_a^x x^{n-1} f x dx \right\};$$

e questa equazione valerà ancora, com'è facile a comprendersi, quando l'integrale non sia preso tra limiti, imperocchè il limite inferiore rimane arbitrario, finchè starà tra quelli della continuità della funzione.

Esempio. Sia da cercarsi il triplice integrale di $e^{x^2} x dx^3$. Si ha per l'equ. 3

$$\int \int \int e^{x^2} x dx^3 = \frac{1}{2} (x^2 \int e^{x^2} x dx - 2x \int e^{x^2} x^2 dx + \int e^{x^2} x^3 dx).$$

Ma bentosto si trova che

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1,$$

$$\int e^{x^2} x^2 dx = \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + C_2;$$

e che in conseguenza

$$\int \int \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} (C_2 + C_1 x^2 + \{x^3 - \frac{1}{2}\} e^{x^2} - 2x \int e^{x^2} x^2 dx).$$

Rispetto poi all'integrale del 2° membro, usando dell'integ-

grale per parti si avrà

$$\int e^x x^2 dx = \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{2} \int e^x dx + C_2;$$

quindi

$$\int \int \int e^x x^2 dx = \frac{1}{2} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 - \frac{1}{2} e^x + x \int e^x dx);$$

l'integrale del 2° membro essendo tuttavia un'ignota funzione di x .

b. Integrali euleriani.

81.

La funzione Gamma.

Nell'esempio 3 del n° 76 si è ottenuta l'equazione

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-ax} dx = \frac{1.2 \dots (a-1)}{a^a}$$

pel caso dell'esponente a intero e positivo. Or si presenta la quistione di sapere qual sarà il valore dell'integrale, quando a divenga un numero frazionario positivo. In questo, del pari che nel caso precedente, la funzione $x^{a-1} e^{-ax}$ rimane continua per ogni valore positivo di x , essendochè essa rappresenta una frazione vera.

Stabiliamo quindi l'equazione

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-ax} dx = \Gamma(a),$$

proponendoci d'imparare a conoscere la funzione $\Gamma(a)$, denominata funzione gamma, pel caso che $a-1$ dinoti un numero frazionario.

Una proprietà di questa funzione si rivela, quando ci

facciamo a rappresentare l'integrale per mezzo dell'integrazione per parti. Così avremo

$$\int x^a e^{-x} dx = -x^a e^{-x} + a \int x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Or essendo $-x^a e^{-x} = 0$ tanto nel caso di $x=0$ che in quello di $x=\infty$, sarà

$$\int_0^{\infty} x^a e^{-x} dx = a \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx,$$

ovvero, avendo riguardo all'equ. 1,

$$2. \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

Laonde se la funzione $\Gamma(a)$ è nota pei valori di a compresi tra 0 ed 1, mercè l'ultima equazione lo sarà ancora pei valori di a compresi tra 1 e 2; da questi valori si dedurranno quelli che stanno tra 2 e 3, e così di seguito.

Quindi per comporre una tavola di tutti i valori possibili della funzione Gamma, basterà calcolarla pei valori di a compresi tra 0 e 1.

Ed è già sufficiente all'uopo la conoscenza di $\Gamma(a)$ da $a=0$ fino ad $a=\frac{1}{2}$. Imperocchè, rappresentando z una nuova variabile e b un numero positivo, si sostituisca $z(1+x)$ ad x , e b ad a ; si avrà

$$3. \quad \int_0^{\infty} z^{b-1} e^{-z(1+x)} dx = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b}.$$

Moltiplicando questa equazione per $x^{a-1} dx$, ed integrandone i due membri rispetto ad x tra i limiti $x=0$ ed $x=\infty$, si ottiene

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} z^{b-1} x^{a-1} e^{-z} e^{-zx} dz dx = \Gamma(b) \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^b}.$$

Per l'equ. 2 del n° 60 si può primieramente eseguire l'integrazione del 1° membro rispetto ad x , supponendo che x e z rimangono indipendenti. Fatto ciò, si avrà, in considerazione dell'equ. 3 :

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-xz} dx = \frac{\Gamma(a)}{z^a},$$

e l'integrale doppio diverrà

$$\Gamma(a) \int_0^{\infty} z^{b-a-1} e^{-z} dz = \Gamma(a) \Gamma(b-a),$$

espressione che in conseguenza dell'equ. 1 vale per $b-a > 0$, ossia per $b > a$. Quindi si avrà

$$\Gamma(a) \Gamma(b-a) = \Gamma(b) \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^b},$$

ovvero

$$4. \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}$$

Dall'equazione 2 si ottiene facilmente il valore dell'integrale pel caso speciale di $b = 1$, quindi di $1 > a > 0$, se si consideri che dall'equ. 1 risulta la relazione $\Gamma(1) = 1$. E poichè l'equazione precedente, comparata coll'equaz. 6 del n° 76, mena alla relazione

$$5. \quad \Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

ne segue che conoscendo i valori della funzione $\Gamma(a)$ da $a = 0$ fino ad $a = \frac{1}{2}$, avremo per mezzo di $\Gamma(1-a)$ quelli di $\Gamma(a)$ da $a = \frac{1}{2}$ fino ad $a = 1$.

Per $a = \frac{1}{2}$ l'equazione 5 ne dà :

$$6. \quad \left[\Gamma\left\{\frac{1}{2}\right\} \right]^2 = \pi, \text{ quindi } \Gamma\left\{\frac{1}{2}\right\} = \sqrt{\pi};$$

Da questa e dall'equazione 2 poi si ha :

$$\Gamma\left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1.3}{2.2} \sqrt{\pi}, \dots,$$

e dall'equazione 3, ponendovi $1+x=1$,

$$7. \quad \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}.$$

Finalmente dall'ultima equazione, scambiandovi x con y^2 , risulta :

$$8. \quad \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \text{ ovvero } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

L'integrale dell'equazione 1, ovvero l'integrale dell'equazione

$$9. \quad \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{1}{x} \right\}^{a-1} dx = \Gamma(a),$$

che risulta da quella per lo scambio di x con $1 - \frac{1}{x}$, si denomina integrale euleriano della seconda specie.

82.

La funzione Beta.

L'equazione 4 del n° 81, quando vi si ponga $a+b$ in vece di b , diviene

$$1. \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

ovvero, scambiandovi x con $\frac{x}{1-x}$, dimodochè i limiti di-

vengono 0 ed 1 ,

$$2. \quad \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Gl' integrali della forma , quale ne mostra l'equazione 2, costituiscono gl'integrali auleriani della prima specie. Noi indicheremo col nome di funzione Beta l'integrale dell'equazione 2 , che si potrebbe dedurre dalla funzione Gamma , e scriveremo

$$3. \quad B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Ponendo qui c in vece di b ed $a+b$ in vece di a , si ottiene

$$B(a+b, c) = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)},$$

e pel prodotto delle due funzioni :

$$4. \quad B(a, b) \cdot B(a+b, c) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}.$$

Il secondo membro di questa equazione non altera il suo valore , quando a , b e c vengano tra loro scambiate ; quindi il 1° membro ancora conserverà il suo valore , e si avrà

$$\begin{aligned} B(a, b) \cdot B(a+b, c) &= B(a, c) \cdot B(a+c, b) \\ &= B(b, c) \cdot B(b+c, a). \end{aligned}$$

Questa proprietà della funzione Beta già si manifesta nel 2° membro dell'equ. 2 , quando sia limitata ai numeri positivi a e b . Quindi

$$5. \quad \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1}dx.$$

Del resto il limite superiore dell'equ. 2 può rendersi

generale, scambiando x con $\frac{x}{c}$ e riguardando c come numero finito positivo. Così, a norma dell'equazione sotto il numero 4 nel paragrafo 77, i limiti 0 ed 1 diverranno 0 e c , e dall'equazione 2 risulterà l'equazione più generale

$$6. \quad \int_0^c x^{a-1}(c-x)^{b-1}dx = c^{a+b-1} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Dalla suddetta proprietà della funzione Beta ne risulta un'altra per la funzione Gamma. Ed in vero l'equazione concede per ragione della sua origine che si faccia $b=a$, dimodochè sarà

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx = B(a, a).$$

Ma per $x = \frac{1}{2}(1+y)$ i limiti passano ad esser -1 , e $+1$; quindi risulta

$$\frac{1}{2^{a-1}} \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{a-1}dy = B(a, a).$$

Or si vedrà facilmente la validità dell'equazione

$$\int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{a-1}dy = 2 \int_0^{+1} (1-y^2)^{a-1}dy,$$

donde si ottiene

$$\frac{1}{2^{a-1}} \int_0^{+1} (1-y^2)^{a-1}dy = B(a, a).$$

Ma quest'ultimo integrale può esser facilmente ricondotto alla funzione Gamma, scambiandovi y^2 con z ; e così risulta

$$\frac{1}{2^{a-1}} \int_0^{+1} z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{a-1}dz = B(a, a).$$

Imperocchè si ha per l'equ. 2

$$\frac{1}{2^{a-1}} \int_0^{+1} z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{a-1}dz = \frac{1}{2^{a-1}} B\left\{\frac{1}{2}, a\right\},$$

donde $B(a, a) = \frac{1}{2^{a-1}} B\left\{\frac{1}{2}, a\right\}$,

ovvero dall'equazione 3,

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{a-1}} \cdot \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}\right\}\Gamma(a)}{\Gamma\left\{\frac{1}{2}+a\right\}},$$

e considerando esser $\Gamma\left\{\frac{1}{2}\right\} = \pi^{\frac{1}{2}}$;

$$7. \quad \Gamma(a)\Gamma\left\{\frac{1}{2}+a\right\} = 2^{1-a}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2a).$$

Da questa equazione risulta per un numero intero a

$$\Gamma\left\{\frac{1}{2}+a\right\} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^a} \cdot \frac{1.2.3...(2a-1)}{2^{a-1}.1.2.3...(a-1)},$$

$$\text{ovvero} \quad \frac{2a}{\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot \Gamma\left\{\frac{1}{2}+a\right\} = 1.3.5...(2a-1),$$

essendochè in conseguenza dell'equ. 1 n° 81, per un intero a dovranno aver luogo le relazioni

$$\Gamma(2a) = 1.2.3...(2a-1)$$

$$\text{e} \quad \Gamma(a) = 1.2.3...(a-1).$$

83.

Applicazioni.

Le funzioni Gamma e Beta aprono un vasto campo agli integrali definiti. Eccone alcuni esempi.

1°. Trasformisi nell'equ. 2 del n° 82 la variabile x in $\frac{(k+1)y}{k+y}$, i limiti dell'integrale non verranno alterati, e si avrà

$$dx = (k+1) \frac{kdy}{(k+y)^2}, \quad 1-x = \frac{k(1-y)}{k+y},$$

in conseguenza

$$1. \quad \int_0^1 \frac{y^{a-1}(1-y)^{b-1} dy}{(k+y)^{a+b}} = \frac{1}{(1+k)^a k^b} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

2°. Le equazioni dell' esempio 3 n° 76 ;

$$\int_0^\infty x^{n-1} \cos rx \, dx = \frac{\Gamma(n)}{r^n} \cos \frac{n\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty x^{n-1} \sin rx \, dx = \frac{\Gamma(n)}{r^n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

sono state dimostrate per ogni numero intero positivo n .

Or trovisi n tra 0 ed 1. Si ha subito , per l' equ. 3 del n° 81 , fino al limite $a=0$:

$$\int_0^\infty a^{-n} e^{-ax} da = x^{n-1} \Gamma(1-n).$$

Moltiplicando questa equazione per $\cos rx \, dx$ ed integrandola tra i limiti 0 e ∞ , si avrà

$$\int_0^\infty \int_0^\infty a^{-n} e^{-ax} \cos rx \, da \, dx = \Gamma(1-n) \int_0^\infty x^{n-1} \cos rx \, dx.$$

Integrato il 1° membro rispetto x , acquisterà per le equazioni dell' esempio 3 n° 76 la forma

$$\int_0^\infty \frac{a^{1-n}}{a^2 + r^2} da,$$

dimodochè risulterà

$$\Gamma(1-n) \int_0^\infty x^{n-1} \cos rx \, dx = \int_0^\infty \frac{a^{1-n}}{a^2 + r^2} da.$$

Per trovare l' integrale del 2° membro , pongasi nell' equ. 6 del n° 76

$\frac{y^a}{r^a}$ in vece di x e $\frac{a}{2}$ in vece di a ;

ne risulterà

$$2. \quad \int_0^\infty \frac{y^{a-1} dy}{r^a + y^a} = \frac{r^{a-2} \pi}{\operatorname{sen} \frac{a\pi}{2}}.$$

Questo integrale comparato al precedente ne mostra che

$$\int_0^\infty \frac{a^{1-n} da}{a^n + r^n} = \frac{\pi}{2r^n \operatorname{sen}(2-n)\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2r^n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}},$$

ed in conseguenza

$$\Gamma(1-n) \int_0^\infty x^{n-1} \cos r x dx = \frac{\pi}{2r^n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}.$$

Or per ogni frazione vera n si ha per l'equ. 3 del n° 81

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi},$$

dimodochè risulta

$$\frac{\pi}{2r^n \Gamma(1-n) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}} = \frac{\Gamma(n) \operatorname{sen} n\pi}{2r^n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}} = \frac{\Gamma(n)}{r^n} \cos \frac{n\pi}{2};$$

e

$$3. \quad \int_0^\infty x^{n-1} \cos r x dx = \frac{\Gamma(n)}{r^n} \cos \frac{n\pi}{2} \text{ per } 1 > n > 0.$$

Similmente si troverà

$$4. \quad \int_0^\infty x^{n-1} \operatorname{sen} r x dx = \frac{\Gamma(n)}{r^n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \text{ per } 1 > n > 0.$$

Le suddette equazioni dell'esempio 3 del n° 76 valgono dunque tanto per un numero intero positivo, quanto per una vera frazione positiva n .

Ponendo nelle due ultime equazioni $n = \frac{1}{2}$, e considerando che

$$\Gamma\left\{\frac{1}{2}\right\} = \sqrt{\pi} \text{ e } \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = 2^{-\frac{1}{2}},$$

si avrà

$$5. \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos rx}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin rx}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \left\{ \frac{\pi}{2r} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

3°. Nell'equ. 2 del n° 82 si può riguardare il numero $(1-x)^b$ come integrale definito di y^{b-1} , quando sia preso tra i limiti 0 ed $1-x$, essendo

$$b \int_0^{1-x} y^{b-1} dy = (1-x)^b,$$

quindi

$$6. \quad b \int_0^1 \int_0^{1-x} x^{a-1} y^{b-1} dx dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a+b)}.$$

Or x può variare soltanto tra 0 ed 1 ed y tra 0 e $1-x$; quindi la validità di questa equazione 6 è sottoposta alle condizioni

$$x + y < 1, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Nell'ipotesi di queste condizioni si potrà quindi scrivere

$$7. \quad \iint x^{a-1} y^{b-1} dx dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1+b)}{b\Gamma(1+a+b)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(1+a+b)}.$$

Scambiando in questa equazione

$$x \text{ con } \left\{ \frac{x}{A} \right\}^p, \quad y \text{ con } \left\{ \frac{y}{B} \right\}^q,$$

ne risulta

$$\iint x^{ap-1} y^{bq-1} dx dy = \frac{A^{ap} B^{bq}}{pq} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(1+a+b)};$$

ovvero, mutando a in $\frac{a}{p}$, b in $\frac{b}{q}$,

$$8. \quad \int \int x^{a-1} y^{b-1} dx dy = \frac{A^a B^b}{pq} \cdot \frac{\Gamma\left\{\frac{a}{p}\right\} \Gamma\left\{\frac{b}{q}\right\}}{\Gamma\left\{1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right\}}$$

L'integrale doppio di questa equazione può estendersi a tutti i valori di x ed y che rendano soddisfatte le condizioni

$$\left\{\frac{x}{A}\right\}^p + \left\{\frac{y}{B}\right\}^q < 1, \quad \left\{\frac{x}{A}\right\}^p > 0, \quad \left\{\frac{y}{B}\right\}^q > 0,$$

dimodochè a cagion di esempio si avrà per $p = q = 2$:

$$\int \int x^{a-1} y^{b-1} dx dy = \frac{A^a B^b}{4} \cdot \frac{\Gamma\left\{\frac{a}{2}\right\} \Gamma\left\{\frac{b}{2}\right\}}{\Gamma\left\{1 + \frac{a+b}{2}\right\}},$$

ed in conseguenza per $a = b = 1$:

$$\int \int dx dy = \frac{AB}{4} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Or sia n il numero delle variabili $x, y, z, \dots$ e l'integrazione si estenda a tutti i valori positivi di queste variabili che per $A, B, C, \dots$ positive rendano soddisfatta la condizione

$$\left\{\frac{x}{A}\right\}^p + \left\{\frac{y}{B}\right\}^q + \left\{\frac{z}{C}\right\}^r + \dots < 1.$$

Sotto queste condizioni si avrà :

$$9. \quad \int \int \int \dots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \dots dx dy dz \dots \\ = \frac{A^a B^b C^c \dots}{pqr \dots} \cdot \frac{\Gamma\left\{\frac{a}{p}\right\} \Gamma\left\{\frac{b}{q}\right\} \Gamma\left\{\frac{c}{r}\right\} \dots}{\Gamma\left\{1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \dots\right\}}$$

Per mostrare l'esattezza di questa equazione si potrà dare alle variabili quell'alterazione, per la quale dall'equa-

zione 8 risulta l'equazione 7, e così non rimarrà che a dimostrare l'equazione.

$$10. \int \int \int \dots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \dots dx dy dz \dots = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\dots}{\Gamma(1+a+b+c+\dots)}$$

pel caso che le nuove variabili siano sottoposte alla condizione.

$$x + y + z + \dots < 1$$

Supponiamo che a questa condizione si sostituisca l'altra più generale

$$x + y + z + \dots < k,$$

k indicando un qualsiasi numero positivo, e facciamoci immediatamente a cercare l'integrale

$$U = \int \int \int x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} dx dy dz \text{ per } x + y + z < k.$$

Questa condizione rimarrà soddisfatta dando ad x i limiti 0 e k , 0 e $k-x$ ad y , 0 e $k-x-y$ a z . Ma nell'integrale

$$U = \int_0^{k-x-y} \int_0^{k-x} \int_0^k x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} dx dy dz$$

si ha
$$\int_0^{k-x-y} z^{c-1} dz = \frac{1}{c} (k-x-y)^c;$$

sarà dunque

$$U = \frac{1}{c} \int_0^{k-x} \int_0^k x^{a-1} y^{b-1} (k-x-y)^c dx dy.$$

Per l'equazione 6 del n° 82 si ha inoltre

$$\int_0^{k-x} y^{b-1} (k-x-y)^c dy = (k-x)^{b+c} \cdot \frac{\Gamma(b)\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+b+c)};$$

quindi
$$U = \frac{1}{c} \cdot \frac{\Gamma(b)\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+b+c)} \int_0^k x^{a-1} (k-x)^{b+c} dx,$$

$$\text{ovvero } U = \frac{1}{c} \cdot \frac{\Gamma(b)\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+b+c)} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(1+b+c)}{\Gamma(1+a+b+c)} k^{a+b+c},$$

e scrivendovi il valore di U ed abbreviando,

$$\begin{aligned} 11. \quad \int_0^{k-x-y} \int_0^{k-x} \int_0^k x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} dx dy dz \\ = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(1+a+b+c)} k^{a+b+c}. \end{aligned}$$

Nello stesso modo che dall'equazione 7 si è passato all'equazione 8, dall'ultima equazione si perverrà alla relazione generale:

$$\begin{aligned} 12. \quad \int \int \int \dots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \dots dx dz dz \dots \\ = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c) \dots}{\Gamma(1+a+b+c+\dots)} k^{a+b+c+\dots} \end{aligned}$$

la quale si trasforma nell'equazione 10, quando si ponga $k=1$.

c. Funzioni periodiche.

84. .

Legge generale.

Sia Ft una funzione continua tra certi limiti, la quale possa svolgersi in una serie convergente secondo le potenze crescenti di t . Sia essa disegnata da

$$1. \quad Ft = \sum A_n t^n,$$

il segno sommatorio $\sum$ dinotando che se ad n si sostituiscono i numeri 0, 1, 2, 3, 4, ... debba aver luogo la relazione

$$\sum A_n t^n = A_0 t^0 + A_1 t^1 + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \dots$$

Or se t si muti in e^{ikt} ed e^{-ikt} essendo $i = \sqrt{-1}$, e si supponga che la serie che a questo modo risulterà dall'equazione 1 rimanga convergente tra i due limiti determinati dalla continuità, saranno ancora continue e la somma

$$F(e^{ikt}) + F(e^{-ikt}) = 2 \sum A_n \cos nkt$$

e la differenza

$$F(e^{ikt}) - F(e^{-ikt}) = 2i \sum A_n \sin nkt,$$

il segno sommatorio $\sum$ conservando lo stesso significato nelle due espressioni.

Poniamo per brevità

$$\varphi t = \sum A_n \cos nkt,$$

2.

$$\psi t = \sum A_n \sin nkt,$$

φt possedendo le proprietà del coseno e ψt quelle del seno, vale a dire

$$\begin{aligned} \varphi(t \mp 2\pi) &= \varphi t, & \varphi(-t) &= +\varphi t \\ \psi(t \mp 2\pi) &= \psi t, & \psi(-t) &= -\psi t. \end{aligned}$$

A cagione di queste proprietà le due funzioni si dicono periodiche, ed il loro periodo è 2π .

La stessa proprietà avranno le due funzioni

$$\varphi v = \sum A_n \cos nkv,$$

$$\psi v = \sum A_n \sin nkv,$$

nelle quali v indicando una funzione di t , muterà il suo segno insieme a questa variabile.

Or se queste equazioni siano moltiplicate per una funzione u di t e per dt , ed integrate poi rispetto a t , ne risul-

teranno le due altre

$$3. \quad \int u \varphi v dt = \sum A_n \int u \cos nkv dt ,$$

$$4. \quad \int u \psi v dt = \sum A_n \int u \sin nkv dt ,$$

le quali come leggi generali , specialmente delle funzioni trigonometriche , esponenziali e logaritmiche , somministrano un ubertoso acquisto d'integrali definiti , e servono nel tempo stesso a svolgere funzioni in serie.

Le più semplici famiglie di tali funzioni troveranno il loro luogo nei seguenti numeri

85.

Integrale di $\varphi t dt$ e $\psi t dt$.

Poniamo il caso semplicissimo che le equazioni 3 e 4 del n° precedente siano integrate tra i limiti $t=a$ e $t=a+2\pi$, quando $u=1$, $v=t$ e $k=1$: avremo

$$1. \quad \int_a^{a+2\pi} \varphi t dt = \sum A_n \frac{1}{n} [\sin n(a+2\pi) - \sin na]$$

$$\int_a^{a+2\pi} \psi t dt = - \sum A_n \frac{1}{n} [\cos n(a+2\pi) - \cos na],$$

indicando per brevità col segno $\sum$ la somma che si estende da $n=0$ fino ad $n=p$, e quantunque per $n=0$, i due valori

$$\frac{1}{n} [\sin n(a+2\pi) - \sin na], \quad \frac{1}{n} [\cos n(a+2\pi) - \cos na]$$

assumano la forma di $\frac{0}{0}$, purtuttavia pel n° 17 il primo di questi valori sarà 2π , e l'altro sarà zero. Laonde il 2° membro della prima equazione darà

$$2\pi \sum A_n = 2\pi F_0 ,$$

e zero quello della seconda. Quindi nell'ipotesi che F_0 sia ancora continua, si avranno le equazioni

$$\int_a^{a+\pi} \varphi t \, dt = 2\pi F_0,$$

2.

$$\int_a^{a+\pi} \psi t \, dt = 0.$$

La seconda di queste equazioni, comparata all'equazione 2 del n° 84, mostra all'istante che

$$\int_a^{a+\pi} F(e^{it}) \, dt = \int_a^{a+\pi} F(e^{-it}) \, dt,$$

e che in conseguenza

$$3. \quad \int_a^{a+\pi} F(e^{\pm i t}) \, dt = 2\pi F_0.$$

Considerando inoltre che a può significare qualsiasi quantità positiva, negativa od anche zero, si ha in ultimo

$$4. \quad \int_0^{2\pi} F(e^{\pm i t}) \, dt = 2\pi F_0.$$

Se nella medesima ipotesi fatta sul principio, siano integrate le equazioni 3 e 4 del n° 84 da $t=a$ fino a $t=a+\pi$, si avranno le due altre:

$$\int_a^{a+\pi} \varphi t \, dt = \sum A_n \cdot \frac{1}{n} [\sin n(a+\pi) - \sin na],$$

$$\int_a^{a+\pi} \psi t \, dt = \sum A_n \cdot \frac{1}{n} [\cos n(a+\pi) - \cos na].$$

Il valore del 2° membro della prima equazione sarà nullo per ogni valore di $n > 0$, ed all'opposto sarà π per $n=0$; quindi

$$5. \quad \int_a^{a+\pi} \varphi t dt = \pi F 0,$$

ed avendo riguardo all' equ. 3 si troverà

$$6. \quad \int_a^{a+\pi} \varphi t dt = 2 \int_a^{a+\pi} \varphi t dt.$$

Il secondo membro della seconda equazione non concede veruna particolare espressione.

Esempio 1. Sia

$$Ft = \frac{1}{1-t}$$

una funzione che rimane continua per $t < 1$ e $t > -1$. Or si ha

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

Scambiando in questa serie t con re^{iht} ed re^{-iht} , e prendendo m da zero ad n , si avrà

$$\frac{1}{1-re^{iht}} = \sum r^m \cos mht + i \sum r^m \sin mht + r^{n+1} \frac{\cos(n+1)ht + i \sin nht}{1-re^{iht}},$$

$$\frac{1}{1-re^{-iht}} = \sum r^m \cos mht - i \sum r^m \sin mht + r^{n+1} \frac{\cos(n+1)ht - i \sin nht}{1-re^{-iht}}.$$

Ma se r sia una frazione vera, ed n divenga infinitamente grande nell'ultimo termine delle due equazioni, r^{n+1} diverrà nullo e tale sarà ancora il termine che nelle due equazioni contiene il fatto r^{n+1} . Così si avranno le equazioni

$$\frac{1}{1-re^{iht}} = \sum r^m \cos mht + i \sum r^m \sin mht$$

$$\frac{1}{1-re^{-iht}} = \sum r^m \cos mht - i \sum r^m \sin mht,$$

le quali per mezzo di addizione e sottrazione somministrano

le relazioni

$$\frac{1-r \cosh t}{1-2r \cosh t+r^2} = \sum r^m \cos mht,$$

$$\frac{r \sinh t}{1-2r \cosh t+r^2} = \sum r^m \sin mht,$$

se le somme si prendano da $m=0$ fino ad $m=\infty$, e si dia ad r uno dei valori intermedi $a+1$, e -1 .

Or se queste ultime equazioni si moltiplichino per dt , e poi s'integrino tra i limiti $t=a$, e $t=a+2\pi$, esse daranno mercè l'equazione 1:

$$\int_a^{a+2\pi} \frac{(1-r \cosh t) dt}{1-2r \cosh t+r^2} = \sum \frac{1}{mh} [\sin mh(a+2\pi) - \sin mha],$$

$$\int_a^{a+2\pi} \frac{r \sinh t dt}{1-2r \cosh t+r^2} = - \sum \frac{1}{mh} [\cos mh(a+2\pi) - \cos mha],$$

doude si avrà per $h=1$

$$\int_a^{a+2\pi} \frac{(1-r \cosh t) dt}{1-2r \cosh t+r^2} = 2\pi, \quad \int_a^{a+2\pi} \frac{r \sinh t dt}{1-2r \cosh t+r^2} = 0.$$

Esempio 2. Scambiando in $l(1+t)$ la variabile t con re^{ikt} ed re^{-ikt} , sotto la condizione, indispensabile per la convergenza della serie, che sia $1 > r > -1$; risulteranno per mezzo dell'equazione 4 le relazioni

$$\int_0^{2\pi} l(1+re^{\pm ikt}) dt = 2\pi F(1).$$

Ma $F(1) = l(1) = 0$; in conseguenza dall'addizione di questa doppia equazione risulterà

$$\int_0^{2\pi} l(1+2r \cos kt + r^2) dt = 0 \quad \text{per } 1 > r > -1.$$

Similmente dall' ipotesi di

$$Ft = \frac{e^{rt} \pm e^{-rt}}{2},$$

quando t si muti in $e^{\pm ikt}$, derivano le equazioni

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e^{r \cos kt} \pm e^{-r \cos kt}) \cos r (\sin kt) dt = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e^{r \cos kt} \pm e^{-r \cos kt}) \sin r (\sin kt) dt = 0,$$

dove, mercè l'addizione delle equazioni col segno inferiore e col superiore, risultano i valori:

$$\int_0^{2\pi} e^{r \cos kt} \cos r (\sin kt) dt = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} e^{r \cos kt} \sin r (\sin kt) dt = 0.$$

86.

Integrale di $\sum B_n \cos mt \varphi t dt$ e $\sum B_m \sin mt \varphi t dt$.

Per vieppiù estendere l'uso delle equazioni 3 e 4 del n° 84, noi ci facciamo a determinare rispetto alla prima di esse la funzione u di t mercè la somma

$$u = \sum B_m \cos mht,$$

nella quale supponiamo che m ammetta ogni valore della serie naturale 0, 1, 2, 3 . . . ma che B_m disegni un numero costante, e fissiamo la condizione che tanto la serie, rappresentata da u , quanto la funzione $u\varphi t$ vengano adoperate per quei soli valori di t , per quali u ed $u\varphi t$ rimangono convergenti. Con ciò l'equazione 3 del n° 84 ne dà

$$1. \int \sum B_m \cos mht \, f \, dt = \sum B_m \sum A_n \int \cos mht \cos nkt \, dt,$$

considerando che B_m è un numero costante, e che in conseguenza $\sum B_m$ può estrarsi dal segno integrale.

Il secondo membro di questa equazione rappresenta una serie doppia, vale a dire una serie nella quale si possono scrivere tutti i valori di n per ogni numero intero m e viceversa; perciò si comprenderà di leggieri che i segni sommatorii potranno esser scambiati colle rispettive serie.

Per poter integrare il secondo membro dell'equazione, ricorriamo alle equazioni

$$\cos mht \cos nkt = \frac{1}{2} \cos (mh + nk) t + \frac{1}{2} \cos (mh - nk) t,$$

$$\int \cos (mh \pm nk) t \, dt = \frac{1}{2(mh \pm nk)} \sin (mh \pm nk) t.$$

La funzione $\cos (mh \pm nk) t$, esistente nell'ultima equazione, rimane continua tra i limiti $t = 0$, $t = \pi$, qualunque siano i valori reali di h e k .

Per il caso di $h = k = 1$ ha luogo l'equazione

$$\int_0^\pi \cos (m \pm n) t \, dt = 0, \text{ se } m \neq n.$$

Ma se $m = n$ e più grande di zero, sarà

$$\frac{1}{m - n} \sin (m - n) t = \frac{0}{0} = \pi$$

In questo caso per ogni valore dato ad m nella somma $\sum B_m$ vale quel solo valore di n in $\sum A_n$, che sia eguale ad m , dimodochè la doppia serie del 2° membro dell'equazione 1

si trasformerà in una serie semplice, e quel membro prenderà il valore $\frac{\pi}{2} \sum B_m A_m$, in cui m rappresenta i numeri 1, 2, 3,...

Se in fine sia $m = n = 0$, sarà dinuovo

$$\frac{1}{m \pm n} \operatorname{sen} (m \pm n) t = \frac{0}{0} = \pi,$$

ed il 2° membro prenderà il valore $\pi B_0 A_0$.

Dopo ciò integrando l'equazione 1 tra i limiti 0 e π , il 2° membro, per $m = 1, 2, 3, \dots$ rappresenterà il valore

$$\pi B_0 A_0 + \frac{\pi}{2} \sum B_m A_m.$$

In vece del quale scrivendo

$$\frac{\pi}{2} B_0 A_0 + \frac{\pi}{2} B_0 A_0 + \frac{\pi}{2} \sum B_m A_m;$$

portando un $B_0 A_0$ sulla somma $\sum B_m A_m$, dimodochè m rappresenterà i numeri 0, 1, 2, 3, ...; e considerando in fine che a cagione di

$$Ft = \sum A_n t^n$$

dovrà essere $A_0 = F(0)$, si avrà

$$2. \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum B_m \cos int \varphi t dt = B_0 F0 + \sum A_m B_m,$$

quando in φt si ponga la grandezza arbitraria $k = 1$, e si faccia successivamente $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Introducendo nell'equazione 4 n° 84

$$u = \sum B_m \operatorname{sen} mkt,$$

nello stesso modo e sotto le medesime condizioni rispetto a

k ed m si perverrà all'equazione

$$3. \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum B_m \sin mt \psi t dt = -B_0 F_0 + \sum A_m B_m.$$

Le equazioni 2 e 3 reggono, finita o infinita che sia la serie $0, 1, 2, 3, \dots$ rappresentata da m , e comprendono un gran numero d'integrali definiti.

Possono servir d'esempio le equazioni

$$\frac{1-r \cos t}{1-2r \cos t+r^2} = \sum r^m \cos mt + r^{n+1} \cdot \frac{\cos(n+1)t-r \cos nt}{1-2r \cos t+r^2},$$

$$\frac{r \sin t}{1-2r \cos t+r^2} = \sum r^m \sin mt + r^{n+1} \cdot \frac{\sin(n+1)t-r \sin nt}{1-2r \cos t+r^2},$$

le quali sono state svolte nell'esempio 1 n° 85, e che valgono per ogni valore reale di r e per $n=\infty$. Or moltiplicata la prima per $\varphi t dt$ e la seconda per $\psi t dt$, e poi integrate tra i limiti $t=0$, e $t=\pi$, esse danno in conseguenza delle equazioni 2 e 3:

$$4. \quad \int_0^{\pi} \frac{1-r \cos t}{1-2r \cos t+r^2} \varphi t dt = \frac{\pi}{2} (r^0 F_0 + \sum r^m A_m)$$

$$+ r^{n+1} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)t-r \cos nt}{1-2r \cos t+r^2} \varphi t dt,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{r \sin t}{1-2r \cos t+r^2} \psi t dt = \frac{\pi}{2} (-r^0 F_0 + \sum r^m A_m)$$

$$+ r^{n+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1)t-r \sin nt}{1-2r \cos t+r^2} \psi t dt.$$

e poichè si ha $\sum r^m A_m = Fr$,

così ponendo $1 > r > -1$, gl'integrali dei secondi membri spariscono, e si hanno le equazioni trovate da Poisson:

$$5. \quad \int_0^{\pi} \frac{1-r \cos t}{1-2r \cos t+r^2} \varphi t \, dt = \frac{\pi}{2} (F0 + Fr),$$

$$\int_0^{\pi} \frac{r \sin t}{1-2r \cos t+r^2} \psi t \, dt = \frac{\pi}{2} (-F0 + Fr).$$

Le condizioni, cui debbono esser sottoposte le funzioni φt e ψt , allorchè le equazioni 5 dovranno valere per $r=+1$ ed $r=-1$, saranno altrove ricercate.

87.

Caso speciale.

Le equazioni 2 e 3 del n° precedente somministrano molte applicazioni, quando si ponga nella prima

$$\sum B_n = \sum \cos nx,$$

e nella seconda $\sum B_n = \sum \sin nx,$

e si conservi il già fissato significato del numero m od n . Imperocchè si avrà con ciò immediatamente dall'equazione 2

$$1. \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum \cos nx \cos nt \varphi t \, dt = F0 + \sum A_n \cos nx.$$

Or si scinda la somma del 1° membro in due parti, di cui la seconda si prenda da $n=1$ in avanti, ed in conseguenza si ponga

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx \cos nt \varphi t \, dt = \varphi t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \cos nt \varphi t;$$

si consideri ancora che per l'equazione 1 del n° 84 è

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx = \varphi x,$$

*

si avrà dall'equazione 1

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi t dt + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \int_0^{\pi} \cos nt \varphi t dt = F0 + \varphi x.$$

Questa equazione può esser semplificata, stantechè per l'equazione 5 del n° 83 si ha

$$\int_0^{\pi} \varphi t dt = \pi F0 ;$$

ed in conseguenza

$$2. \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi t dt + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \int_0^{\pi} \cos nt \varphi t dt = \varphi x.$$

Trattando similmente l'equazione 3 del n° precedente, e scambiando $\sum B_n$ con $\sum \sin nx$, si perverrà all'equazione

$$3. \quad \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \int_0^{\pi} \sin nt \psi t dt = \psi x.$$

Quanto alla validità delle equazioni 2 e 3, i loro primi membri esprimono funzioni periodiche col periodo 2π , e che sono inoltre contraddistinte mercè le proprietà delle funzioni φt e ψt , vale a dire

$$\varphi(-t) = +\varphi t, \quad \psi(-t) = -\psi t.$$

Alle stesse proprietà resteranno quindi sottoposte le funzioni φx e ψx , le quali debbono avere inerente il carattere

$$\varphi(-x) = \varphi x, \quad \psi(-x) = -\psi x,$$

e possono valere soltanto tra gl'indicati limiti, quando per loro natura non siano periodiche.

Inoltre rappresenti n la serie naturale dei numeri, che queste equazioni concedono poter estendere all'infinito. In questo caso x potrà prendere tutti i valori compresi tra 0 e π , imperocchè così facendo non si apporta contraddizione nelle equazioni, nè va via la supposta continuità. Anche per $x=0$ ed $x=\pi$ rimane soddisfatta l'equazione 2, non così l'equazione 3, imperocchè mentre il suo 1° membro va a zero, il 2° non l'è necessariamente. Sarà altrettanto dei valori tra $x=0$ ed $x=-\pi$, come chiaramente risulta dall'anzidetta proprietà delle funzioni periodiche φx e ψx . Rispetto poi ai valori di x , maggiori di $+\pi$ e minori di $-\pi$, e che in conseguenza si trovano fuori il periodo di $-\pi$ a $+\pi$, la funzione dovrà ricevere gradatamente i valori che risultano per $x > -\pi$ ed $x < +\pi$.

Quindi l'equazione 2 vale per $\pi \geq x \geq -\pi$, all'opposto l'equazione 3 vale per $\pi > x > -\pi$, ma non già pel valore intermedio $x=0$.

Scrivendo ora rispetto all'equazione 2

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nt \varphi t dt = a_n,$$

e risolvendo la somma nelle sue singole parti, avremo per φx la serie

$$4. \quad \varphi x = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots$$

$$\text{per } \pi \geq x \geq -\pi,$$

dimodochè la funzione φx , il cui carattere è riposto in $\varphi x = \varphi(-x)$, può tra gl' indicati limiti svolgersi in una serie secondo i multipli del coseno di x .

Ponendo ancora nell'equazione 3

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \psi t dt,$$

ne risulterà similmente

$$5. \quad \psi x = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

per $\pi > x > -\pi$, eccetto $x = 0$,

dimodochè tra i limiti pei quali si ha $\psi(-x) = -\psi x$, una funzione ψx potrà svolgersi in una serie secondo i multipli del seno di x .

Esempio 1. Siano da svolgersi $\cos kx$ e $\sin kx$ in serie secondo i multipli del seno o del coseno di x .

Essendo $\cos(-kx) = \cos kx$, avrà $\cos kx$ la proprietà di φt , e quindi prenderemo a base la serie 4. Or si ha

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nt \cos kt dt,$$

ovvero, essendo

$$\cos nt \cos kt = \frac{1}{2} \cos(n+k)t + \frac{1}{2} \cos(n-k)t,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(n+k)\pi}{n+k} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(n-k)\pi}{n-k} \\ &= \frac{1}{\pi} \cos n\pi \sin k\pi \left\{ \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n-k} \right\}. \end{aligned}$$

E poichè $\cos n\pi = (-1)^n$, sarà

$$a_n = (-1)^{n+k} \cdot \frac{2k}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 k\pi}{n^2 - k^2},$$

$$\begin{aligned} \text{e } \cos kx &= \frac{1}{k\pi} \sin k\pi + \frac{2k}{\pi} \sin k\pi \left\{ \frac{\cos x}{1^2 - k^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - k^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos 3x}{3^2 - k^2} - + \dots \right\}, \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\pi \cos kx}{2k \sin k\pi} = \frac{1}{2k^2} + \frac{\cos x}{1^2 - k^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - k^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - k^2} - + \dots$$

E questa equazione regge, com'è facile a vedersi, per ogni valore frazionario di k , positivo e negativo che sia.

Da essa derivano molte serie, quando ad x e k ovvero ad x soltanto si sostituiscono dei valori speciali che rendano soddisfatta la condizione $\pi \geq x \geq 0$. Ponendovi, per esempio $x = 0$, e $k = \frac{1}{2}$, ne risulta la serie leibniziana per $\frac{\pi}{4}$, cioè

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} - \dots$$

La funzione $\text{sen } kx$ avendo la proprietà di ψx , si avrà per l'equazione 5

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } nt \text{sen } kt \, dt,$$

ovvero, essendo

$$\text{sen } nt \text{sen } kt = \frac{1}{2} \cos(n-k)t - \frac{1}{2} \cos(n+k)t,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\text{sen}(n-k)\pi}{n-k} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\text{sen}(n+k)\pi}{n+k} \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos n\pi \text{sen } k\pi \left\{ \frac{1}{n-k} + \frac{1}{n+k} \right\}; \end{aligned}$$

cosichè si avrà, a cagione di $\cos n\pi = (-1)^n$,

$$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n}{\pi} \cdot \frac{\text{sen } k\pi}{n^2 - k^2},$$

donde

$$\text{sen } kx = \frac{2}{k} \text{sen } k\pi \left\{ \frac{\text{sen } x}{1^2 - k^2} - \frac{2 \text{sen } 2x}{2^2 - k^2} + \frac{3 \text{sen } 3x}{3^2 - k^2} - + \dots \right\},$$

ovvero

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\text{sen } kx}{\text{sen } k\pi} = \frac{\text{sen } x}{1^2 - k^2} - \frac{2 \text{sen } 2x}{2^2 - k^2} + \frac{3 \text{sen } 3x}{3^2 - k^2} - + \dots$$

In queste due equazioni k può dinuovo rappresentare ogni

numero frazionario positivo o negativo, e kx ogni numero compreso tra π e 0, del pari che tra 0 e $-\pi$.

Esempio 2. La funzione

$$e^{kx} + e^{-kx}$$

ha la proprietà di φx , quindi per l'equazione 4 si ottiene:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (e^{kt} + e^{-kt}) \cos nt \, dt.$$

Ma per l'equazione 20 del n° 58 si ha

$$\int e^{kt} \cos nt \, dt = \frac{n \sin nt + k \cos nt}{n^2 + k^2} e^{kt},$$

donde
$$\int_0^\pi e^{kt} \cos nt \, dt = \frac{k}{n^2 + k^2} (e^{k\pi} \cos n\pi - 1),$$

come
$$\int_0^\pi e^{-kt} \cos nt \, dt = \frac{-k}{n^2 + k^2} (e^{-k\pi} \cos n\pi - 1).$$

Perciò sarà

$$\int_0^\pi (e^{kt} + e^{-kt}) \cos nt \, dt = (-1)^n \cdot \frac{k}{n^2 + k^2} (e^{k\pi} - e^{-k\pi}),$$

ovvero
$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2k}{(k^2 + n^2)\pi} (e^{k\pi} - e^{-k\pi}).$$

Quindi dall'equazione 4 si ottiene

$$e^{kx} + e^{-kx} = \frac{e^{k\pi} - e^{-k\pi}}{\pi} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{2k \cos x}{1^2 + k^2} + \frac{2k \cos 2x}{2^2 + k^2} - \frac{2k \cos 3x}{3^2 + k^2} + \dots \right\}$$

ovvero anche

$$\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2k} - \frac{k \cos x}{1^2 + k^2} + \frac{k \cos 2x}{2^2 + k^2} - \frac{k \cos 3x}{3^2 + k^2} + \dots$$

Rispetto alla funzione

$$e^{kx} - e^{-kx}$$

si avrà l'equ. 21 del n° 58 ;

$$\int e^{kt} \sin nt \, dt = \frac{k \sin nt - n \cos nt}{n^2 + k^2} e^{kt}.$$

e per l'equ. 5

$$\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{e^{kx} - e^{-kx}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sin x}{1^2 + k^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 + k^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 + k^2} - \dots$$

Queste due serie valgono sotto le medesime condizioni , sotto le quali si sono presentate come vevoli le relative serie dell' esempio 1. Oltrechè egli è facile conoscere potersi passare da queste a quelle, scambiando k con $k\sqrt{-1}$.

88.

Allargamento del limiti.

Dei limiti 0 e π , a cui sono sottoposti gl' integrali del n° precedente , si potrà mutare il superiore in qualsivoglia limite c , purchè si moltiplichino π e 0 per $\frac{c}{\pi}$, e si divida per l' equ. 4 n° 77 la variabile t per $\frac{c}{\pi}$. Fatta quest' alterazione della variabile t nelle equ. 2 e 3 del n° precedente , essa avrà tale influenza sulle funzioni φx e ψx , che nella prima x potrà trovarsi tra $+c$ e $-c$ includendovi questi limiti , ma nella seconda x potrà essere tra $+c$ e $-c$, purchè restino esclusi i valori $x = +c$, $x = 0$, $x = -c$. Quindi con queste supposizioni si avranno dalle dette equazioni del n° precedente ;

$$1. \quad \varphi x = \frac{1}{c} \int_0^c \varphi t \, dt + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{c} \int_0^c \cos \frac{n\pi t}{c} \varphi t \, dt,$$

$$2. \quad \psi x = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \int_0^c \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{c} \psi t dt,$$

scrivendo φt in vece di $\varphi \left\{ \frac{\pi t}{c} \right\}$ e ψt in vece di $\psi \left\{ \frac{\pi t}{c} \right\}$, cosicchè φt e ψt disegnano due funzioni periodiche, il cui periodo regge da $-c$ fino a $+c$.

Esempio 1. Sia da cercarsi una funzione, la quale resti eguale ad una costante C tra i valori $x=0$ ed $x=c$, ed alla costante $-C$ pei valori compresi tra $x=0$ ed $x=-c$.

A fin di semplificare poniamo la costante eguale all'unità, giacchè potremo riprodurre C , moltiplicando per questo numero. In conseguenza della condizione richiesta dovrà essere $\psi(-x) = -\psi x$; quindi si avrà per l'equ. 2:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \int_0^c \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{c} dt, \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}. \end{aligned}$$

Or si ha

$$1 - \cos n\pi = 0 \text{ per ogni numero pari } n,$$

$$\text{e} \quad 1 - \cos n\pi = 2 \text{ per ogn' impari } n.$$

Laonde si ottiene

$$3. \quad 1 = \frac{4}{\pi} \left\{ \operatorname{sen} \frac{\pi x}{c} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{c} + \frac{1}{5} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{c} + \dots \right\}.$$

Questa serie rappresenta la funzione richiesta, la quale è una funzione periodica col periodo $2c$.

Esempio 2. Si cerca una funzione, che tra i limiti $+c$ e $-c$ sia eguale al numero x . È dinuovo $\psi(-x) = -\psi x$;

quindi per l'equ. 2 si ha :

$$x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \int_0^c t \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{c} dt.$$

Or per l'equ. 9 del n° 74 è :

$$\int t \operatorname{sen} t dt = -t \cos t + \operatorname{sen} t,$$

e scambiando t con $\frac{n\pi t}{c}$ ed abbreviando ,

$$\int t \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{c} dt = -\frac{ct}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{c} + \frac{c^2}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{c},$$

quindi

$$\int_0^c t \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{c} dt = -\frac{c^2}{n\pi} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \cdot \frac{c^2}{n\pi},$$

e

$$4. \quad x = \frac{2c}{\pi} \left\{ \operatorname{sen} \frac{\pi x}{c} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{c} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{c} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{c} + \dots \right\}$$

Se all' opposto debba cercarsi quella funzione che tra 0 e c sia eguale al numero x , e tra 0 e $-c$ al numero $-x$, si dovrà ricorrere all' equ. 1, dovendo essere $\varphi(-x) = \varphi x$. Quindi si avrà

$$x = \frac{1}{c} \int_0^c t dt + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{c} \int_0^c t \cos \frac{n\pi t}{c} dt.$$

Or per l'equazione 8 del n° 74 si ha :

$$\int t \cos t dt = t \operatorname{sen} t + \cos t,$$

quindi, mutando t in $\frac{n\pi t}{c}$ ed integrando tra i limiti 0 e c , fatte tutte le semplificazioni si avrà

$$3. \quad x = \frac{c}{2} - \frac{4c}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi x}{c} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{c} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{c} + \dots \right\}.$$

Le equazioni 4 e 5 danno un medesimo valore per x , quando x sia preso tra 0 e c , al contrario quando x sia preso tra 0 e $-c$ i valori risulteranno relativamente eguali, ma assolutamente di contrario segno.

89.

$$\text{Integrale di } \sum f t \cos \frac{n\pi(x-t)}{c} dt.$$

Addizionando le equazioni 1 e 2 del n° precedente dopo aver moltiplicato la seconda per $i = \sqrt{-1}$, si avrà l'equazione

$$\begin{aligned} \varphi x + i\psi x = & \frac{1}{c} \int_0^c \varphi t dt + \frac{2}{c} \sum \cos \frac{n\pi x}{c} \int_0^c \cos \frac{n\pi t}{c} \varphi t dt \\ & + \frac{2i}{c} \sum \sin \frac{n\pi x}{c} \int_0^c \sin \frac{n\pi t}{c} \psi t dt, \end{aligned}$$

la quale concede scambiare le funzioni φt e ψt colla funzione originaria Ft . Imperocchè per le equazioni 2 del n° 84 si hanno le relazioni

$$2\varphi t = F(e^{ikt}) + F(e^{-ikt}),$$

$$2i\psi t = F(e^{ikt}) - F(e^{-ikt}),$$

nelle quali facendo $k=1$ pel n° 86, l'equazione precedente si trasforma in

$$\begin{aligned} F(e^{ix}) = & \frac{1}{c} \int_0^c \varphi t dt + \frac{1}{c} \sum \cos \frac{n\pi x}{c} \int_0^c \cos \frac{n\pi t}{c} [F(e^{it}) + F(e^{-it})] dt \\ & + \frac{i}{c} \sum \sin \frac{n\pi x}{c} \int_0^c \sin \frac{n\pi t}{c} [F(e^{it}) - F(e^{-it})] dt, \end{aligned}$$

quando le somme, come per lo innanzi, si estendano da $n=1$ fino ad $n=n$.

Or profittando delle note equazioni

$$\cos \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi t}{c} = \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{c} (x-t) + \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{c} (x+t),$$

$$\sin \frac{n\pi x}{c} \sin \frac{n\pi t}{c} = \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{c} (x-t) - \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{c} (x+t),$$

dimodochè dopo tutte le riduzioni risulti

$$\begin{aligned} 1. \quad F(e^{ix}) = & \frac{1}{c} \int_0^c \varphi t \, dt + \frac{1}{c} \sum \int_0^c \cos \frac{n\pi}{c} (x-t) F(e^{it}) \, dt \\ & + \frac{1}{c} \sum \int_0^c \cos \frac{n\pi}{c} (x+t) F(e^{-it}) \, dt, \end{aligned}$$

sarà possibile dare a questa equazione una forma più semplice.

Già pel primo integrale di essa si ha

$$2 \int_0^c \varphi t \, dt = \int_0^c F(e^{it}) \, dt + \int_0^c F(e^{-it}) \, dt ;$$

ma secondo il n° 1 del paragrafo 77 è

$$\int_0^c F(e^{-it}) \, dt = - \int_0^{-c} F(e^{it}) \, dt = \int_{-c}^0 F(e^{it}) \, dt ,$$

e quindi
$$2 \int_0^c \varphi t \, dt = \int_{-c}^c F(e^{it}) \, dt.$$

Similmente il terzo integrale dell'equazione 1 può ridursi al secondo, essendo pel già indicato numero :

$$\begin{aligned} \int_0^c \cos \frac{n\pi}{c} (x+t) F(e^{-it}) \, dt &= - \int_0^{-c} \cos \frac{n\pi}{c} (x-t) F(e^{it}) \, dt \\ &= \int_{-c}^0 \cos \frac{n\pi}{c} (x-t) F(e^{it}) \, dt. \end{aligned}$$

Mercè questa equazione si ha dall'equazione 1 :

$$F(e^{ix}) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} F(e^{it}) dt + \frac{1}{c} \sum \int_{-c}^{+c} F(e^{it}) \cos \frac{n\pi(x-t)}{c} dt,$$

ovvero , scambiando $F(e^{it})$ con ft ,

$$2 \quad fx = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} ft dt + \frac{1}{c} \sum \int_{-c}^{+c} ft \cos \frac{n\pi(x-t)}{c} dt.$$

Questa equazione , come dimostra la sua deduzione dalle equazioni 1 e 2 del n° precedente , vale per ogni valore di x che stia tra $+c$ e $-c$. La somma è da prendersi da $n=1$ fino ad $n=n$ ovvero fino ad $n=\infty$; intanto essa non resterà alterata, se si prenda da $n=1$ fino ad $n=-\infty$. E poichè il primo integrale è quel termine della somma , nel quale è $n=0$, così dall'equazione 2 si ottiene :

$$fx = \frac{1}{2c} \sum_{-1}^{-\infty} \int_{-c}^{+c} ft \cos \frac{n\pi(x-t)}{c} dt + \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} ft dt \\ + \frac{1}{2c} \sum_{+1}^{+\infty} \int_{-c}^{+c} ft \cos \frac{n\pi(x-t)}{c} dt ,$$

ovvero per una più semplice notazione :

$$3. \quad fx = \frac{1}{2c} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-c}^{+c} ft \cos \frac{n\pi(x-t)}{c} dt.$$

90.

Integrale doppio di $\varphi(fz) \cos t z dz dt$ e $\psi(fz) \sin t z dz dt$.

Per una nuova applicazione delle equazioni generali 3 e 4 del n° 85 poniamo nella prima di esse

$$v = t, \quad u = \int f z \cos t z \, dz,$$

supponendo che fz indichi una funzione continua tra $z=0$ e $z=\infty$; ed integriamo rispetto a t e z tra i limiti 0 e ∞ .
Avremo

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi t f z \cos t z \, dz \, dt = \frac{\pi}{2} \sum A_n \int_0^\infty \int_0^\infty f z \cos t z \cos n k t \, dt \, dz.$$

Ma il doppio integrale del 2° membro è stato trovato nell'esempio 3 del n° 77. In conseguenza avremo mercè questo valore l'equazione

$$1. \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi t f z \cos t z \, dz \, dt = \frac{\pi}{2} \sum A_n f(nk),$$

scambiando nell'indicata equazione φz con fz e prendendo la somma da $n=0$ fino ad $n=\infty$.

Ma introducendo nell'equazione 4 del n° 85

$$v = t, \quad u = \int f z \sin t z \, dz,$$

integrando dinuovo rispetto a t e z tra 0 e ∞ , e profitando dell'equazione

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f z \sin t z \sin n k t \, dt \, dz = \frac{\pi}{2} f(nk),$$

che egualmente abbiamo imparato a trovare nell'esempio 3 del n° 77; si avrà

$$2. \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \psi t f z \sin t z \, dz \, dt = \frac{\pi}{2} \sum A_n f(nk)$$

per $n=0$ fino ad $n=\infty$.

Alcuni facili esempi serviranno a mettere in chiaro la moltiplice applicabilità delle equazioni 1 e 2.

Esempio 1. Introducendo

$\varphi t = \cos kt$ nell'equazione 1 ,

$\psi t = \sin kt$ nell'equazione 2 ,

e considerando che pel n° 85 avranno luogo in generale le relazioni

$$2\varphi t = F(e^{ikt}) + F(e^{-ikt})$$

$$2i\psi t = F(e^{ikt}) - F(e^{-ikt}) ,$$

e che in conseguenza dai supposti valori di φt e ψt segua $Ft = t$, e debba quindi essere ancora

$$n = 1 \text{ ed } A_n = 1$$

a cagione di $Ft = \sum A_n t^n$; ne risulteranno le equazioni trovate da Fourier

$$3. \quad \int_0^\infty \int_0^\infty f z \cos t z \cos k t \, dz \, dt = \frac{\pi}{2} f k ,$$

$$4. \quad \int_0^\infty \int_0^\infty f z \sin t z \sin k t \, dz \, dt = \frac{\pi}{2} f k ,$$

le quali risultano dalle equazioni generali del n° 77 , quando vi si ponga $n = 1$.

Esempio 2. Per qualsivoglia numero positivo h poniamo che nelle equazioni 1 e 2 sia

$$f z = e^{-hz}.$$

In questo caso gl'integrali doppii possono ridursi ad integrali semplici. Imperocchè integrando primieramente rispetto a z le equazioni che ne risulano ,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-hz} \varphi t \cos t z \, dz \, dt = \frac{\pi}{2} \sum A_n e^{-nhk}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-hz} \psi t \sin t z \, dz \, dt = \frac{\pi}{2} \sum A_n e^{-nhk}$$

si avrà a norma dell'esempio 3 n° 76 :

$$\int_0^{\infty} e^{-ht} \cos kt \, dt = \frac{h}{h^2 + k^2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ht} \sin kt \, dt = \frac{k}{h^2 + k^2},$$

dimodochè dagl'integrali doppii risulteranno le equazioni

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi t \, dt}{h^2 + t^2} = \frac{\pi}{2h} \sum A_n e^{-nhk}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\psi t \, dt}{h^2 + t^2} = \frac{\pi}{2} \sum A_n e^{-nhk}.$$

Ritenendo in fine il significato delle somme dei secondi membri nel senso del n° 84, questi integrali potranno scriversi così :

$$5. \quad \int_0^{\infty} \frac{\varphi t \, dt}{h^2 + t^2} = \frac{\pi}{2h} F(e^{-hk})$$

$$6. \quad \int_0^{\infty} \frac{\psi t \, dt}{h^2 + t^2} = \frac{\pi}{2} F(e^{-hk}).$$

Queste fecondissime equazioni valgono per tutti i valori positivi di h e k , unitamente alla relazione che pel n° 84 ha luogo tra le funzioni φt , ψt , Ft .

Esempio 3. Pongasi nell'equazione 5 $\varphi t = \cos kt$, quindi $Ft = t$, si avrà immediatamente

$$7. \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos kt \, dt}{h^2 + t^2} = \frac{\pi}{2h} e^{-hk};$$

e similmente per $\psi t = \sin kt$ si avrà dall'equ. 6 :

$$8. \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin kt \, dt}{h^2 + t^2} = \frac{\pi}{2} e^{-hk}.$$

Ma se nell' equ. 5 si moltiplica Ft in $l(1+t)$, dimodochè risulti

$$\varphi t = \frac{1}{2} l(1+e^{ikt}) + \frac{1}{2} l(1+e^{-ikt}) = \frac{1}{2} l(2 + e^{ikt} + e^{-ikt})$$

ovvero, eliminando gl' immaginari, ,

$$\varphi t = \frac{1}{2} l(2 \cdot 2 \cos^2 \frac{1}{2} kt) = l 2 + l \cos \frac{1}{2} kt ;$$

si avrà

$$\int_0^\infty \frac{l 2 + l \cos \frac{1}{2} kt}{h^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2h} l(1 + e^{-hk}).$$

Or è
$$\int_0^\infty \frac{l 2 \cdot dt}{h^2 + t^2} = \frac{\pi}{2h} l 2 ,$$

ed in conseguenza, scambiando $2k$ con k , sarà

$$9. \quad \int_0^\infty \frac{l \cos kt}{h^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2h} l \frac{1 + e^{-2hk}}{2}.$$

Al contrario la stessa equ. 5 per $Ft = l(1-t)$, ovvero

$$\varphi t = l 2 + l \sin \frac{1}{2} kt ,$$

ne dà :

$$10. \quad \int_0^\infty \frac{l \sin kt}{h^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2h} l \frac{1 - e^{-2hk}}{2}.$$

Sottraendo in fine l' equ. 9 dalla 10 si ha

$$11. \quad \int_0^\infty \frac{l \operatorname{tg} kt}{h^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2h} l \frac{1 - e^{-hk}}{1 + e^{-hk}}.$$

Ponendo nell' equ. 5

$$Ft = (t^r + t^{-r})^m, \text{ ovvero } Ft = (t^r - t^{-r})^{am},$$

e nell' equazione 6

$$Ft = (t^r - t^{-r})^{sm+1},$$

si avrà

$$\varphi t = 2^m \cos^m rkt \text{ pel primo caso ,}$$

$$\varphi t = (-1)^m 2^m \sin^m rkt \text{ pel secondo e}$$

$$\varphi t = (-1)^m 2^m \sin^{sm+1} rkt \text{ pel terzo ;}$$

donde risultano le equazioni

$$\int_0^\infty \frac{\cos^m rkt}{h^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2^{sm+1} \cdot h} (e^{rhk} + e^{-rhk})^m,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{sm} rkt}{h^2 + t^2} dt = \frac{(-1)^m \pi}{2^{sm+1} \cdot h} (e^{rhk} + e^{-rhk})^{sm},$$

$$\int_0^\infty \frac{t \sin^{sm+1} rkt}{h^2 + t^2} dt = \frac{(-1)^m \pi}{2^{sm+1}} (e^{rhk} - e^{-rhk})^{sm+1}.$$

Nei n.° da 85 a 90 si sono presentati i casi più semplici dell'applicazione delle equazioni 3 e 4 del n.° 84; e queste medesime ultime equazioni, ancorchè comprendano un'estesa famiglia d'integrali definiti, non sono purtuttavia che forme speciali d'integrali che comprendono più vasto campo. E si vedrà chiaramente l'esattezza di questa osservazione, quando nell'equazione 1 del n.° 84,

$$Ft = \sum A_n t^n$$

in vece di sostituire, come si è fatto, e^{ikt} ed e^{-ikt} a t , si ponga in luogo di questa variabile e^{x+ikt} ed e^{x-ikt} per ogni valore reale di x , ovvero si consideri Ft dipendente non dalla sola variabile t , ma da più variabili $x, y, z, \dots$ e per due variabili t e t' si muti l'esponente di e in

$$r(t+ak+bl)^n + r'(t'+ak'+bl')^n.$$

La ricerca di queste forme generali, che di molto supera i limiti di quest'opera, ci condurrebbe alle importanti

*

investigazioni dei moderni matematici e dimostrerebbe che esse tengono ad una medesima sorgente, per quanto diverse siano le vie seguite nei singoli casi.

CAPO SECONDO.

Funzioni differenziali di piu' variabili.

A. Funzioni differenziali lineari.

91.

Possibilita' dell' integrale.

Una funzione differenziale di più variabili $x, y, z, \dots$ e dei loro differenziali $dx, dy, dz, \dots$ dicesi lineare, quando questi differenziali non vi sono contenuti che a prima potenza. Così disegnando $P, Q, R, \dots$ funzioni delle variabili x, y, z , l'espressione

$$Pdx + Qdy + Rdz + \dots$$

sarà una funzione lineare delle variabili $dx, dy, dz, \dots$

Nel capo precedente si è dimostrato che di ogni funzione di una sola variabile si può trovare il valore del corrispondente integrale. E quantunque sia vero che i metodi sintetici non possono ridurre ogni data funzione differenziale a forma integrabile, e che i metodi analitici non comprendono affatto l'insieme delle possibili funzioni differenziali; purtuttavia i metodi generali e particolari per lo scoprimento d'integrali definiti somministrano un mezzo efficace per indagare un gran numero di simili funzioni, almeno tra dati limiti; e la teorica esposta nel n° 78 ne dimostra che per ogni valore di una funzione differenziale, com-

preso tra i limiti della continuità, è possibile ottenere un valore sempre più approssimato dell'integrale, ancorchè questo rimanesse incognito nella sua forma generale.

Altrimenti va la cosa rispetto alle funzioni differenziali di più variabili. Non ognuna di esse può corrispondere ad un integrale; che anzi questo non è possibile che sotto certe condizioni le quali debbono aver luogo tra le variabili. Queste condizioni sono le seguenti:

Nella funzione

$$Pdx + Qdy$$

siano P e Q funzioni delle due variabili x ed y . Se questa espressione è il differenziale di una funzione u dipendente dalle due variabili x ed y , sarà

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy;$$

$$\text{quindi} \quad \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = Pdx + Qdy,$$

$$\text{ovvero} \quad \left\{ \frac{du}{dx} - P \right\} dx + \left\{ \frac{du}{dy} - Q \right\} dy = 0.$$

E se le variabili x ed y sono tra loro indipendenti, dovrà essere

$$\frac{du}{dx} - P = 0, \quad \frac{du}{dy} - Q = 0,$$

$$\text{ossia} \quad \frac{du}{dx} = P, \quad \frac{du}{dy} = Q.$$

$$\text{Or essendo} \quad \frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx},$$

ne segue che, introducendovi P e Q , dovrà esser soddisfatta la relazione

$$1. \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

L'equazione 1 rappresenta la condizione che dovrà esser soddisfatta , perchè l'espressione

$$Pdx + Qdy$$

sia il risultamento della differenziazione di una funzione u di due variabili indipendenti , e quindi integrabile.

Similmente la funzione lineare

$$Pdx + Qdy + Rdz ,$$

in cui P, Q, R rappresentano funzioni delle tre variabili indipendenti x, y, z , non sarà sempre il differenziale di una funzione u . Imperocchè se u dipende da queste tre variabili , dimodochè sia

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz ,$$

quindi
$$P = \frac{du}{dx} , Q = \frac{du}{dy} , R = \frac{du}{dz} ;$$

dalle note relazioni

$$\frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx} , \frac{d^2u}{dx dz} = \frac{d^2u}{dz dx} , \frac{d^2u}{dy dz} = \frac{d^2u}{dz dy} ,$$

si avranno le condizioni

$$2. \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} , \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx} , \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy} ,$$

che dovranno esser soddisfatte se l'espressione

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

rappresenta il differenziale completo di una funzione u di tre variabili indipendenti , ovvero se l'integrale di questa funzione dev'esser possibile.

Funzioni differenziali di due variabili.

Per trovare l'integrale u della funzione differenziale

$$Pdx + Qdy,$$

nell'ipotesi ammessa per l'equazione 1, consideriamo per un istante una delle variabili, p. e. y , come costante, e e trattiamo u come funzione della sola variabile x . In questa supposizione du si trasforma in Pdx , ed integrando rispetto ad x si ha l'equazione

$$1. \quad u = \int Pdx + Y,$$

nella quale la costante Y prodotta dall'integrazione dovrà esser dipendente dalla sola variabile y .

Or se si possa, sotto la già detta condizione

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

determinare Y in modo che l'equazione 1 sia soddisfatta anche quando y sia dichiarata variabile, allora sarà possibile determinare l'integrale u . Ricavando a tal uopo dall'equazione 1 il differenziale completo, ne risulterà l'equazione

$$du = Pdx + \frac{d \int Pdx}{dy} dy + dY,$$

la quale comparata a

$$du = Pdx + Qdy,$$

ne dà

$$2. \quad dY = \left\{ Q - \frac{d \int Pdx}{dy} \right\} dy,$$

Or Y è per sua natura indipendente da x ; quindi anche la differenza

$$Q - \frac{d \int P dx}{dy}, \text{ ovvero } Q - \frac{f dP}{dy} dx,$$

dovrà essere indipendente da x ; vale a dire che la derivata di questa differenza rispetto ad x dovrà esser nulla. Ed in vero questa derivata è rappresentata da

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dx},$$

che per l'equazione di condizione 1 del n° precedente è nulla.

Laonde: se le funzioni P e Q della funzione differenziale lineare

$$du = Pdx + Qdy$$

rendano soddisfatta la condizione

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

corrisponderà du ad un integrale, e propriamente ad

$$u = \int Pdx + Y,$$

ovvero

$$3. \quad u = \int Pdx + \int \left\{ Q - \frac{d \int P dx}{dy} \right\} dy + C.$$

Se in vece di y si fosse considerata x come costante, dall'equazione 1 sarebbe risultata la relazione

$$u = \int Qdy + X,$$

X indicando una quantità dipendente dalla sola x ; e quindi l'equazione

$$4. \quad u = \int Qdy + \int \left\{ P - \frac{d \int Q dy}{dx} \right\} dx + C.$$

Esempio 1. Sia

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + a dx + 2by dy.$$

Abbiamo in questo esempio

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + a, \quad Q = 2by,$$

quindi
$$\frac{dP}{dy} = 0 = \frac{dQ}{dx}.$$

L'equazione proposta è dunque integrabile.

Integrandola rispetto ad y secondo l'equazione 4, si ha

$$u = by^2 + X,$$

ed
$$X = \int \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + a \right\} dx, \text{ essendo } \frac{d}{dx} \int Q dy = 0;$$

ovvero
$$X = l(x + \sqrt{1+x^2}) + ax;$$

quindi
$$u = by^2 + ax + l(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

Similmente da
$$du = \frac{xy dy - y^2 dx}{x^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

si ottiene l'integrale

$$u = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x} + C.$$

Esempio 2. Ponendo

$$du = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} \left\{ \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right\},$$

si ha
$$P = \frac{x^2+xy+y^2}{x(y^2+x^2)}, \quad Q = -\frac{x^2+xy+y^2}{y(x^2+y^2)},$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{dQ}{dx}.$$

Quindi
$$u = \int \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{dx}{x} + Y.$$

Or si ha
$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{x},$$

come si troverà facilmente mercè la decomposizione in frazioni parziali; in conseguenza

$$u = \int \left\{ \frac{y dx}{x^2+y^2} + \frac{dx}{x} \right\} = \text{arc tg } \frac{x}{y} + \lg x + Y.$$

Si ha inoltre

$$\frac{dY}{dy} = -\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)y} + \frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{1}{y};$$

quindi
$$Y = -\lg y + C,$$

ed
$$u = \text{arc tg } \frac{x}{y} + \lg \frac{x}{y} + C.$$

Esempio 3. Sia

$$du = \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{dy}{y} \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\}.$$

L'equazione di condizione ci dà

$$P = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q = \frac{1}{y} - \frac{x}{y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{dQ}{dx}.$$

Or integrando rispetto ad x si ottiene

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lg(x + \sqrt{x^2+y^2}) + Y;$$

ed è
$$\frac{dY}{dy} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{(x + \sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

quindi
$$\int \left\{ Q - \frac{d}{dy} \left(\frac{P dx}{dy} \right) \right\} dy = \text{Costante},$$

e perciò $u = IC(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Similmente si avrà da

$$du = (a'y + x')dx + (b' + a'x)dy$$

$$u = \frac{1}{4}x^4 + a'xy + b'y + C.$$

Da
$$du = \frac{ydy + xdx - 2ydx}{(y-x)^2}$$

$$u = l(y-x) - \frac{y}{y-x} + C.$$

Da
$$du = (\sin y + y \cos x)dx + (\sin x + x \cos y)dy$$

$$u = x \sin y + y \sin x + C.$$

93.

Funzioni differenziali di tre variabili.

Sia da integrarsi la funzione di tre variabili x, y, z .

$$Pdx + Qdy + Rdz,$$

supponendo che le funzioni P, Q, R rendano soddisfatte, conformemente all'eqn. 2 del n° 91, le condizioni

$$1. \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

Considerando nella proposta funzione differenziale una delle variabili, p. e. z , come costante, essa si trasforma in

$$Pdx + Qdy,$$

che secondo il n° precedente darà un integrale delle variabili x ed y , stantechè la prima delle tre equazioni di condizione si suppone soddisfatta. La costante arbitraria di questo integrale potendo esser una funzione di z , la rappresenteremo con Z ; e ponendo

$$Q' = Q - \frac{df P dx}{dy},$$

avremo l'integrale

$$2. \quad u = \int P dx + \int Q' dy + Z.$$

Or se u è l'integrale della funzione proposta, questa dovrà trovarsi riprodotta nel differenziale di u rispetto ad x , y e z . Questo differenziale è

$$\begin{aligned} du = P dx + \frac{df P dx}{dy} dy + \frac{df P dx}{dz} dz \\ + Q' dy + \frac{df Q' dy}{dz} dz + dZ, \end{aligned}$$

ovvero, introducendovi il suddetto valore di $Q' dy$,

$$du = P dx + Q dy + \left\{ \frac{df P dx}{dz} + \frac{df Q' dy}{dz} \right\} dz + dZ.$$

Da questa equazione, comparandone il 2° membro colla proposta funzione differenziale, risulta per dZ il valore :

$$3. \quad dZ = \left\{ R - \frac{df P dx}{dz} - \frac{df Q' dy}{dz} \right\} dz.$$

Or si può dimostrare che il fattore di dz di questa equ. 3 è indipendente tanto da x che da y , e che in conseguenza si può esprimere Z in funzione della sola z , e rappresentare u mercè l'equ. 2. A tal uopo basterà mostrare come questo fattore, che indichiamo con R' , differenziato rispetto ad x del pari che rispetto ad y , dia un risultato nullo. Or la derivata rispetto ad x di

$$R' = R - \int \frac{dP}{dz} dx - \frac{df Q' dy}{dz},$$

considerando che Q' è indipendente da x , ci dà

$$\frac{dR'}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz},$$

e questa differenza è nulla per la seconda delle equazioni di condizione 1.

Differenziando poi R' rispetto ad y si ottiene

$$\frac{dR'}{dy} = \frac{dR}{dy} - \frac{dQ'}{dz} - \frac{d^2 f P dx}{dz dy}.$$

Ma
$$Q' = Q - \frac{d f P dx}{dy},$$

e quindi
$$\frac{dQ'}{dz} = \frac{dQ}{dz} - \frac{d^2 f P dx}{dy dz};$$

dunque
$$\frac{dR'}{dy} = \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz};$$

valore nullo per la terza delle equ. 1.

Riunendo le osservazioni di questo numero, ne risulta il teorema :

Essendo data la funzione differenziale lineare

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

nella quale le funzioni P, Q, R delle variabili x, y, z rendono soddisfatte le equazioni di condizione

4.
$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy},$$

vi sarà di essa funzione un integrale u , espresso dall'equazione

5.
$$u = \int P dx + \int Q' dy + \int R' dz + C,$$

essendo
$$Q' = Q - \frac{d f P dx}{dy}$$

$$R' = R - \frac{d f P dx}{dz} - \frac{d f Q' dy}{dz},$$

dimodochè Q' è indipendente da x , ed R' lo è da x ed y .

L'equazione 5 è derivata dallo stesso principio che l'equa-

zione 3 del n° precedente, vale a dire che vi è stata considerata come variabile prima la x , indi la y , in fine la z . Ma fra tre grandezze sono possibili sei permutazioni; ed in conseguenza vi saranno cinque altre forme, simili all'equazione 5 per poter rappresentare l'integrale u .

Finalmente è chiaro che la teorica esposta in questo numero, può facilmente estendersi a funzioni differenziali di quattro e più variabili.

Esempio 1. La funzione "differenziale lineare

$$\frac{2x(x^2-y^2)dx}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} + \frac{2ydy}{x^2+y^2} - \frac{2zdz}{x^2+z^2}$$

rende immediatamente soddisfatte le equazioni di condizione 4; imperocchè si ha

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{dQ}{dx},$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{4xz}{(x^2+z^2)^2} = \frac{dR}{dx}$$

$$\frac{dQ}{dz} = 0 = \frac{dR}{dy}.$$

Or integrando Pdx , si ha

$$u = \int \frac{2x(x^2-y^2)dx}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} + Y,$$

ovvero scomponendo la frazione che trovasi sotto il segno integrale,

$$u = \int \left\{ \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+z^2} \right\} dx + Y,$$

vale a dire $u = l(x^2+y^2) - l(x^2+z^2) + Y$.

Inoltre è $Q = \frac{d}{dy} P dx = \frac{2ydy}{x^2+y^2} - \frac{2ydy}{x^2+y^2},$

ed in conseguenza $Y = \text{Costante}$.

Si troverà similmente $R' = 0$, dimodochè

$$u = 1 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2} + C$$

sarà la funzione richiesta.

Esempio 2. La funzione

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z dx - x dz}{x^2 + z^2} + z dz$$

ci dà

$$\frac{dP}{dy} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dQ}{dx},$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{-xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2} = \frac{dR}{dx},$$

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{-yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dR}{dy};$$

dimodochè per l'integrale di $P dx$ si ha

$$u = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \int \frac{z dx}{x^2 + z^2},$$

ovvero

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \text{arc tg } \frac{x}{z}.$$

Or si troverà facilmente che

$$Q' = 0, R' = z, \text{ quindi } \int R' dz = \frac{1}{2} z^2,$$

e perciò

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \text{arc tg } \frac{x}{z} + \frac{1}{2} z^2 + C.$$

Esempio 3. La funzione

$$\frac{y^2 + z^2 - x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{dx}{x} + \frac{x^2 + (y-z)^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{dy}{y} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{dz}{z} \\ - \frac{y dz}{z^2} + \frac{dz}{z^2}$$

rende soddisfatte le condizioni delle equazioni 4, imperocchè

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dy} &= \frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{dP}{dx}, \\ \frac{dP}{dz} &= \frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{dR}{dx}, \\ \frac{dQ}{dz} &= \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{1}{z^2} = \frac{dR}{dy}.\end{aligned}$$

Quindi si ha $u = \int \frac{y^2+z^2-x^2}{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{dx}{x} + Y,$

ovvero $u = \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \right\} dx + Y;$

donde $u = lx - l(x^2+y^2+z^2) + Y.$

Or si trova che $Y = \frac{y}{z},$

in conseguenza

$$u = lx - l(x^2+y^2+z^2) + \frac{y}{z} + Z.$$

Nello stesso modo si avrà

$$R' = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2},$$

ed in conseguenza

$$\int R' dz = lz - \frac{1}{2z^2} + \text{Cost.};$$

dimodochè sarà

$$u = l \frac{xz}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y}{z} - \frac{1}{2z^2} + C.$$

Similmente da

$$du = \frac{ydx}{a-z} + \frac{xdy}{a-z} + \frac{xydz}{(a-z)^2}$$

si ottiene

$$u = \frac{xy}{a-z} + C;$$

$$\text{da} \quad du = (y+z) dx + (x+z) dy + (x+y) dz$$

$$u = xy + xz + yz + C;$$

$$\text{e da} \quad du = \frac{a dx - b dy}{z} + \frac{(by - ax) dz}{z^2}$$

$$u = \frac{ax - by}{z} + C.$$

94.

Introduzione di nuove variabili.

Nel n° 91 si sono dichiarate le condizioni che rendono possibile l'integrale di una funzione lineare di due o più variabili; e nei n° 92 e 93 si sono mostrate le vie che menano all'integrale richiesto. La quistione è stata dunque compiutamente risolta.

Intanto la via, che conduce all'integrale, viene in taluni casi abbreviata mercè l'introduzione di nuove variabili, poichè così si perviene o ad una funzione differenziale di una sola variabile, ovvero ad un'espressione composta di due parti distinte della forma

$$du = Fv dv + fr dr,$$

v ed r indicando le nuove variabili.

Esempio 1. Sia data la funzione

$$\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

che indichiamo con du . Ponendovi

$$y = r \sin v, \quad x = r \cos v,$$

r e v indicando due nuove variabili, risulteranno per dy e dx i valori

$$dy = \sin v dr - r \cos v dv$$

$$dx = \cos v \, dr - r \sin v \, dv$$

quindi $y \, dx - x \, dy = -r^2 \, dv$, $x^2 + y^2 = r^2$.

Sarà dunque $du = \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2 + y^2} = -dv$,

e l' integrale proposto sarà ridotto alla forma semplicissima

$$\begin{aligned} \int \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2 + y^2} &= -v + C \\ &= -\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C. \end{aligned}$$

E poichè $\frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$,

sarà $\int \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \text{Cost.}$

Esempio 2. Introducendo gli stessi valori

$$y = r \sin v, \quad x = r \cos v$$

nella funzione differenziale

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} \left\{ \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right\},$$

ne risulta $x^2 + xy + y^2 = r^2 (1 + \sin v \cos v)$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{e} \quad \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = -\frac{dv}{\sin v \cos v};$$

quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} \left\{ \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right\} &= -v - \operatorname{ltg} v + C \\ &= \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{ltg} \frac{x}{y} + C \end{aligned}$$

Mercè gli stessi valori di x ed y si perviene ancora al-

l'equazione

$$\int \left\{ \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] \frac{dy}{y} \right\} = 1 (r[1 + \cos v]) + C$$

$$= 1 (x + \sqrt{x^2+y^2}) + \text{Cost},$$

come già si è trovato nell'esempio 3 del n° 92.

Esempio 3. Se nell'espressione

$$\frac{y^2 dx + x^2 dy}{a(x+y)xy + bx^2y^2} = du,$$

la quale, come è facile a vedersi, rende soddisfatta la condizione d'integrabilità, si sostituiscano $\frac{1}{v}$ ed $\frac{1}{w}$ ad x ed y , si avrà

$$du = - \frac{d(v+w)}{b+a(v+w)},$$

in conseguenza

$$u = - \frac{1}{a} \log [b + a(v+w)],$$

ovvero restituendo a v e w i loro valori,

$$\int \frac{y^2 dx + x^2 dy}{a(x+y)xy + bx^2y^2} = \frac{1}{a} \log \frac{axy}{a(x+y) + bxy},$$

indicando la costante con $\frac{1}{a} \log c$.

95.

Integrali definiti.

Indicando con $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ due funzioni qualunque, che rendano soddisfatta la condizione

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dy} = \frac{d\psi(x, y)}{dx},$$

la funzione differenziale

•

$$1. \quad \varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy$$

ammetterà pel n° 91 un integrale, che sarà una funzione dipendente da x ed y . Indicando questa funzione con $F(x, y)$, dovrà risultarne l'equazione

$$2. \quad \int [\varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy] = F(x, y) + C.$$

C indicando la costante arbitraria dell'integrazione.

Or per rappresentare questo integrale tra i limiti

$$x = a \text{ ed } x = A, \quad y = b \text{ ed } y = B,$$

tra quali possono rimaner continue le funzioni $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$, ed in conseguenza $F(x, y)$, noi ci serviremo dell'equazione

$$\varphi(x, y) \cdot h + \psi(x, y) \cdot k = F(x+h, y+k) - F(x, y),$$

la quale regge per qualsivoglia infinitesimo incremento h di x , e k di y . Or introducendo in questa equazione i seguenti successivi valori di x ed y ,

$$\begin{array}{ll} x = a & y = b \\ x = a + h & y = b + k \\ x = a + 2h & y = b + 2k \\ \cdot & \cdot \\ x = a + nh & y = b + nk \end{array}$$

e poi addizionando, si avrà per secondo membro

$$F(a + nh, b + nk) - F(a, b),$$

e per primo membro una somma di quantità infinitesime, la quale tanto più si approssimerà a rappresentare l'integrale tra i limiti

$x = a$ fino ad $x = a + nh$, $y = b$ fino ad $y = b + nk$, per quanto h e k si prenderanno più piccole. Si ponga

$$a + nh = A, \quad b + nk = B;$$

e dall' indicata somma si avrà l' integrale

$$3. \quad \int_{a,b}^{\Lambda,B} [\varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy] = F(\Lambda, B) - F(a, b),$$

supponendo che dei due limiti , segnati sopra e sotto del segno integrale , i primi a ed A si riferiscano ad x , i secondi b e B ad y .

Questa equazione 3 costituisce l' integrale definito o l' integrale tra limiti dell' equazione 2 ; e come è facile a conoscersi , le medesime leggi , dimostrate nel n° 77 per le funzioni di una sola variabile , valgono ancora per questa equazione 3 , ed in generale per gl' integrali definiti che dipendono da più variabili. —

Del resto l' integrale dell' equazione 3 può ridursi ad una sola variabile. Imperocchè essendosi nelle precedenti equazioni trasformata h in dx , e k in dy rispetto ai limiti superiori dell' integrale , così si potrà da esse , vale a dire dalle equazioni

$$a + ndx = A, \quad b + ndy = B,$$

eliminare l' indeterminata infinitamente grande n , ed allora le due equazioni conterranno la medesima grandezza. Avendosi mercè l' eliminazione

$$(A - a) dy = (B - b) dx,$$

sarà

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - b}{A - a}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{A - a}{B - b}.$$

Sarà dunque equivalente integrare l' equazione 3 , ovvero quella che ne risulta dopo avervi introdotto una delle relazioni tolte dalle equazioni 4 , e tra i limiti d' integrazione che rimarranno. Laonde indicando con u l' integrale

dell'equazione 3, dall'equazione 4 risulteranno le due forme

$$5. \quad u = \int_a^A \left\{ \varphi(x, y) + \frac{B-b}{A-a} \psi(x, y) \right\} dx$$

$$\text{ovvero} \quad u = \int_b^B \left\{ \varphi(x, y) + \frac{A-a}{B-b} \psi(x, y) \right\} dy,$$

nella prima delle quali si è introdotto il valore di y e nella seconda quello di x , che corrisponde all'equazione 4.

Integrando una delle equazioni 4 si ha l'equazione

$$6. \quad (A-a)y = (B-b)x + C,$$

la cui costante C potrà defiuirsi introducendo contemporaneamente nell'equazione 6

$$x = a \text{ ed } y = b$$

$$\text{ovvero} \quad x = A \text{ ed } y = B.$$

Di un modo o dell'altro si avrà sempre

$$C = Ab - Ba,$$

e con ciò l'equazione 6 prenderà una delle seguenti forme

$$7. \quad y = \frac{B-b}{A-a} x + \frac{Ab-Ba}{A-a},$$

$$x = \frac{A-a}{B-b} y + \frac{Ab-Ba}{B-b}.$$

Se quindi debba integrarsi la funzione differenziale, che supponiamo integrabile,

$$1. \quad \varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy$$

da $x=a$ fino ad $x=A$ e da $y=b$ ad $y=B$, si perverrà all'integrale, se prendendo primieramente y e dy , ovvero x e dx dall'equazione

$$(A-a)y - (B-b)x = Ab - Ba,$$

s' introducano questi valori nell' espressione 1, e si estenda l' integrazione da $x=a$ ad $x=A$ nel primo caso, e da $y=b$ ad $y=B$ nel secondo.

Esempio. Sia da cercarsi l' integrale definito

$$u = \int_{a,b}^{A,B} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

Eliminandone y e dy ed indicando

$$\frac{B-b}{A-a} \text{ con } \alpha, \text{ e } \frac{Ab-Ba}{A-a} \text{ con } \beta,$$

si avrà
$$u = \beta \int_a^A \frac{dx}{\beta^2 + 2\alpha\beta x + (1+\alpha^2)x^2}.$$

Ma per l' equ. 9 del n° 55 si ha

$$\beta \int \frac{dx}{\beta^2 + 2\alpha\beta x + (1+\alpha^2)x^2} = \text{arc tg } \frac{\alpha\beta + (1+\alpha^2)x}{\beta};$$

dunque

$$u = \text{arc tg } \frac{(A-a)(1+\alpha^2)\beta}{\beta^2 + [\alpha\beta + (1+\alpha^2)A][\alpha\beta + (1+\alpha^2)a]};$$

e riducendo,

$$\begin{aligned} u &= \text{arc tg } \frac{\beta(A-a)}{\beta^2 + \alpha\beta A + \alpha\beta a + (1+\alpha^2)aA}, \\ &= \text{arc tg } \frac{\beta(A-a)}{(\beta + \alpha A)(\beta + \alpha a) + Aa}. \end{aligned}$$

Restituendo in fine ad α e β i rispettivi valori, ne risulta l' equazione

$$\int_{a,b}^{A,B} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \text{arc tg } \frac{Ab - Ba}{Aa + Bb},$$

che si dedurrebbe egualmente dall' integrale generale

$$\int \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}$$

essendochè il 2° membro dell' equazione

$$\int_{a,b}^{A,B} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{A}{B} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b}$$

ha lo stesso valore del 2° membro dell' equazione precedente.

Eliminando dall' integrale

$$u = \int_{a,b}^{A,B} \frac{y dx + (x - \sqrt{x^2 + y^2}) dy}{y \sqrt{x^2 + y^2}}$$

y e dy , ovvero x e dx per più facile trasformazione, si perverrà per la stessa via all' equazione finale

$$u = \log \frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}},$$

la quale è nota per l' esempio 3 del n° 92 e per l' esempio 2 del n° 94.

B. Funzioni differenziali non lineari.

a. Funzioni differenziali monomie.

96.

Integrale di esse.

Le funzioni della forma

$$f x dx^m, f(x, y) dx^m dy^n, f(x, y, z) dx^m dy^n dz^r, \dots$$

che dipendono da una o più variabili, i di cui differen-

ziali vi si trovano a potenze superiori alla prima, dicendosi non lineari. sieno esse composte di uno o più termini.

Le funzioni non lineari monomie, dipendenti da una sola variabile, sono state trattate nel capo precedente, e propriamente nei n° 79 e 80.

Le funzioni differenziali non lineari di più variabili, che sono formate di un sol termine, come

$$f(x, y)dx^m dy^n,$$

risultano dalla successiva parziale differenziazione di una funzione u . Se essa dipende dalle due variabili x ed y , e sia stata differenziata m volte rispetto ad x ed n volte rispetto ad y , in qualunque siasi ordine, essa avrà prodotta l'equazione

$$1. \quad d^{m+n}u = f(x, y)dx^m dy^n, \text{ ovvero } \frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n} = f(x, y).$$

Da questa equazione può dedursi la funzione primitiva u integrandola rispetto a ciascuna variabile, ed il risultamento sarà sempre lo stesso, qualunque ordine sia seguito rispetto alle variabili. E poichè ogni integrazione apporterà una costante arbitraria, così la funzione u , che si avrà dell'equazione 1, conterrà $m + n$ costanti arbitrarie.

Sia p. e. da determinarsi la funzione u , corrispondente all'equazione

$$\frac{d^3u}{dx^2 dy^2} = \frac{y}{x^2}.$$

Moltiplicandola per dx ed integrandola rispetto ad x , si avrà

$$\frac{d^4u}{dx^3 dy^2} = -\frac{y}{3x^3} + Y,$$

indicando con Y la costante arbitraria, la quale dovrà esser dipendente da y . Moltiplicando dinuovo per dx ed integrando poi rispetto ad x ne risulterà

$$\frac{d^2 u}{dx dy^2} = \frac{y}{6x^2} + Y_1 + Y_2.$$

Or se quest'ultima equazione si moltiplichi per dy e s'integri rispetto ad y , si avrà

$$\frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{y^2}{12x^2} + x \int Y dy + \int Y_1 dy + X.$$

Ma essendo Y ed Y_1 funzioni arbitrarie di y , potremo indicare gl'integrali del secondo membro con Y' ed Y'' , quali nuove funzioni di y , e scrivere l'equazione

$$\frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{y^2}{12x^2} + x Y' + Y'' + X,$$

la quale moltiplicata per dx e dy ed integrata rispetto ad x ed y , ci darà

$$u = \iint \left\{ \frac{y^2}{12x^2} + x Y' + Y'' + X \right\} dx dy.$$

Questo metodo per trovare la funzione primitiva può condurre all'inconveniente indicato nel n° 78, vale a dire che nella serie delle integrazioni può risultare una funzione differenziale, la quale non corrisponda a verun integrale conosciuto.

L'equazione 2 del n° 80, quando sia applicata a ciascuna delle variabili, permette di prevenire questo inconveniente. Imperocchè profittando dinuovo dell'equ. 1, mentre integriamo m volte rispetto ad x , ne risulterà

$$3. \quad \iint \dots f(x, y) dx^m = \frac{1}{1.2.3\dots(m-1)} \int_a^x (x-z)^{m-1} f(z, y) dz \\ + Y_1 x^{m-1} + Y_2 x^{m-2} + Y_3 x^{m-3} + \dots + Y_{m-1} x + Y_m.$$

Dobbiamo ora integrare n volte rispetto y questa equ. 2, dopo averla moltiplicata per dy^n in conseguenza dell'equ. 1. Quindi se indichiamo con $\int^{(m)}$ l'integrale preso m volte rispetto ad x , con $\int^{(n)}$ l'integrale preso n volte rispetto ad

y , con $\varphi(x, y)$ il secondo verso dell'equ. 2, e con $\Gamma(m)$ il numero $1. 2. 3 \dots (m-1)$, si avrà dall'equ. 2.

$$3. \quad \int^{(n)} \int^{(m)} f(x, y) dx^m dy^n = \int \left\{ \frac{1}{\Gamma(m)} \int_a^x (x-z)^{m-1} f(z, y) dz \right. \\ \left. + \varphi(x, y) \right\} dy^n,$$

ovvero, indicando con $\psi(x, y)$ la quantità chiusa tra parentesi,

$$\int^{(n)} \int^{(m)} f(x, y) dx^m dy^n = \int \psi(x, y) dy^n.$$

Ma per l'equ. 2 del n° 80 risulta dall'integrale del 2° membro, quando t disegni una nuova variabile,

$$4. \quad \int \psi(x, y) dy^n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_b^y (y-t)^{n-1} \psi(x, t) dt \\ + X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + X_3 y^{n-3} + \dots + X_{n-1} y + X_n,$$

$X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ indicando le costanti arbitrarie d'integrazione, dipendenti da x .

E se per brevità introduciamo in questa equ. 4 la relazione

$$X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \dots + X_{n-1} y + X_n = X(x, y),$$

avremo dall'equ. 3 e 4 la forma generale.

$$5. \quad \int^{(n)} \int^{(m)} f(x, y) dx^m dy^n \\ = \frac{1}{\Gamma(m) \Gamma(n)} \int_b^y \int_a^x (x-z)^{m-1} (y-t)^{n-1} f(z, t) dz dt \\ + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_b^y (y-t)^{n-1} \varphi(x, t) dt + X(x, y).$$

Questa equazione dimostra che la ricerca della funzione u

di due variabili, la quale sia contraddistinta dalla relazione

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n} = f(x, y),$$

dipende da un integrale doppio.

L'andamento di questa ricerca indica in qual modo si potrebbe pervenire alla funzione u , rispetto alla quale sia data l'equazione

$$\frac{d^{m+n+r}u}{dx^m dy^n dz^r} = f(x, y, z),$$

o come la funzione u dipenda da un integrale triplo.

97.

Integrale doppio.

Se $F(x, y)$ rappresenta una funzione delle variabili indipendenti x ed y , la quale parzialmente differenziata, una volta rispetto ad x ed un'altra rispetto ad y , somministri la funzione $f(x, y)dx dy$, avrà luogo tra queste due funzioni l'equazione

$$1. \quad \frac{d^2 F(x, y)}{dx dy} = f(x, y).$$

Viceversa la funzione $F(x, y)$ si potrà dedurre da $f(x, y)dx dy$ con integrare prima rispetto ad x , indi rispetto ad y o viceversa.

Con ciò si avrà

$$\iint f(x, y) dx dy = F(x, y) + X + Y,$$

X ed Y indicando due costanti arbitrarie, di cui la prima, cioè X , si è ottenuta integrando rispetto ad y , e la seconda con integrare rispetto ad x .

Questa operazione si compirà a norma dei teoremi stabi-

liti nel capo primo, e non richiede in conseguenza ulteriori schiarimenti.

Ma poichè X ed Y rappresentano funzioni arbitrarie, così colla loro determinazione potranno esser soddisfatte alcune condizioni cui dovrà soggiacere l'integrale dell'equazione 1.

Queste condizioni potranno esser le seguenti:

Che l'integrale dell'equazione 1 sia da determinarsi in modo che 1° per un certo valore di x , p. e. $x=a$, 2° per un certo valore di y , p. e. $y=b$, l'integrale sia nullo; i quali valori saranno ammessi ancora per Y nel primo caso ed X nel secondo.

Indicando le funzioni arbitrarie X ed Y rispettivamente con φx e ψy , dimodochè φx dipende soltanto da x e ψy da y , l'equazione 1 diverrà

$$2. \quad \iint f x \, dx \, dy = F(x, y) + \varphi x + \psi y,$$

donde mercè le due richieste condizioni risulteranno le due equazioni

$$0 = F(a, y) + \varphi a + \psi y,$$

$$0 = F(x, b) + \varphi x + \psi b.$$

La prima di queste due equazioni dovrà reggere per ogni valore di y , e la seconda per ogni valore di x , quindi la prima nell'ipotesi di $y=b$, egualmente che la seconda nell'ipotesi di $x=a$, condurrà alla relazione

$$0 = F(a, b) + \varphi a + \psi b.$$

Da questa e dalle due precedenti equazioni si potranno eliminare le funzioni arbitrarie φa e ψb , e si avrà

$$0 = F(a, y) + F(x, b) - F(a, b) + \varphi x + \psi y.$$

Sottraendo questa dall'equazione 2, si ha

$$3. \quad \iint f(x, y) \, dx \, dy = F(x, y) - F(a, y) - F(x, b) + F(a, b),$$

equazione libera da funzioni arbitrarie, e che soddisfa alle due condizioni stabilite.

L'equazione 3 corrisponde ancora alle seguenti condizioni:

Che il doppio integrale dell'equazione 1 sia da ritrovarsi in modo che attuata l'integrazione rispetto ad x , la risultante funzione integrale si annulli nell'ipotesi di $x=a$, e ottenuto poi l'integrale per y , esso si annulli ancora nell'ipotesi di $y=b$.

Dell'esattezza di questa asserzione si rimarrà convinto, quando per mezzo di condizioni si vada a determinare le funzioni φx e ψx .

Esempio 1. Sia da cercarsi l'integrale doppio

$$u = \iint \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\} dx dy$$

sotto la duplice condizione di annullarsi sì per $x=0$ che per $y=0$.

S'integri primieramente rispetto ad x , e si avrà

$$u = \int \left\{ x - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{xy^2}{b^2} + X(y) \right\} dy,$$

$X(y)$ indicando la costante dell'integrazione. Integrando poi il 2° membro dell'ultima equazione rispetto ad y , si ha

$$u = xy - \frac{x^3 y}{3a^2} - \frac{xy^3}{3b^2} + \int X(y) dy + \varphi x,$$

ovvero, scambiando $\int X(y) dy$ con ψy ,

$$u = xy - \frac{x^3 y}{3a^2} - \frac{xy^3}{3b^2} + \varphi x + \psi y.$$

Quindi per $x=0$, si avrà

$$0 = \varphi 0 + \psi y,$$

e per $y=0$

$$0 = \varphi x + \psi 0;$$

con ciò se nella prima di queste equazioni si faccia $y = 0$,
o nella seconda $x = 0$, risulterà

$$0 = \varphi 0 + \psi 0.$$

Or eliminando $\varphi 0$ e $\psi 0$ dalle tre ultime equazioni si ottiene

$$0 = \varphi x + \psi y ;$$

la quale espressione sostituita nell'ultima equazione che assegna il valore di u , si avrà

$$u = xy - \frac{x^2 y}{3a^2} - \frac{xy^2}{3b^2}.$$

Esempio 2. Sia da cercarsi il doppio integrale

$$u = \iint \left[1 + \left\{ \frac{dz}{dx} \right\}^2 + \left\{ \frac{dz}{dy} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy ,$$

in modo che x , y , z essendo unite dall'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 ,$$

l'integrale debba annullarsi sì per $x = 0$ che per $y = 0$.

Essendo $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}$,

sarà
$$u = a \iint \frac{dx dy}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} ,$$

che integrata rispetto ad y diviene

$$u = a \int dx \arcsen \frac{y}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} + L(y)$$

indicando con $L(y)$ una funzione di y .

L'integrale del 2° membro può aversi mercè un'integrazione per parti. Intanto pongasi nell'equazione proposta

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t,$$

r e t indicando nuove variabili; ed essa prenderà la forma

$$u = a \iint \frac{r dr dt}{(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}},$$

che integrata rispetto a t , ci dà l'equazione

$$u = a \int \left\{ \frac{tr dr}{(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} + X(r) dr \right\},$$

e questa dietro una seconda integrazione diviene

$$u = -\frac{at}{2} \sqrt{a^2 - r^2} + a\varphi r + a\psi t,$$

avendo scambiato $\int X(r) dr$ con φr .

Or per $x=0$ e per ogni valore di t sarà anche $r=0$, del pari che per $y=0$ e per ogni valore di r sarà anche $t=0$; quindi ponendo $r=0$, si avrà

$$0 = -\frac{at}{2} + \varphi 0 + \psi t,$$

e facendo $t=0$ ne verrà

$$0 = -\frac{at}{2} + \varphi r + \psi 0$$

Da queste due equazioni, cioè dalla prima nell'ipotesi di $t=0$, o dalla seconda nell'ipotesi di $r=0$, risulta la relazione

$$0 = \varphi 0 + \psi 0,$$

la quale, congiunta alle due precedenti equazioni, ci dà per mezzo dell'eliminazione di $\varphi 0$ e $\psi 0$

$$0 = -\frac{at}{2} + \varphi r + \psi t.$$

Moltiplicando questa equazione per a e sottraendola dall'ultima equazione di u , ne risulterà

$$u = \frac{a^2 t}{2} - \frac{at}{2} \sqrt{a^2 - r^2},$$

ovvero, essendo

$$t = \arctg \frac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

$$u = \frac{a}{2} \left[a - (a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \right] \arctg \frac{y}{x}.$$

98.

Integrali doppi definiti.

Prendendo l'integrale doppio dell'equazione 3 del n° precedente tra i limiti

$$x = a \text{ ed } x = A, \quad y = b \text{ ed } y = B,$$

e nell'ipotesi che sia

$$\frac{d^2 F(x, y)}{dx dy} = f(x, y),$$

si avrà

$$1. \quad \int_b^B \int_a^A f(x, y) dx dy = F(A, B) - F(a, B) \\ - F(A, b) + F(a, b),$$

così che, essendo tra esse indipendenti x ed y , per l'equazione 2 del n° 60 e pel n° 76 non solamente dovrà aver luogo la relazione

$$2. \quad \int_b^B \int_a^A f(x, y) dx dy = \int_a^A \int_b^B f(x, y) dy dx,$$

ma dovranno ancora esser soddisfatte le equazioni

$$\begin{aligned}
 3. \quad \int_b^a \int_a^1 f(x, y) dx dy &= - \int_b^a \int_1^a f(x, y) dx dy \\
 &= - \int_b^a \int_a^1 f(x, y) dx dy, \\
 \int_b^a \int_1^a f(x, y) dx dy &= \int_b^a \int_a^1 f(x, y) dx dy.
 \end{aligned}$$

Esempio 1. Sia da cercarsi il doppio integrale

$$u = \int_0^{\sqrt{2bx}} \int_0^c z dx dy,$$

supponendo che le variabili x, y, z debbano soddisfare la condizione

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2x.$$

Eliminando z per mezzo di questa equazione, resterà ad ottenersi l'integrale

$$u = \sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^{\sqrt{2bx}} \int_0^c (2bx - y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

Or per l'equazione. 7 del n° 54 si ha

$$\int (2bx - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{y \sqrt{2bx - y^2}}{2} + bx \arcsen \frac{y}{\sqrt{2bx}},$$

donde
$$\int_0^{\sqrt{2bx}} (2bx - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{\pi}{2} bx;$$

ed in conseguenza

$$u = \frac{\pi}{2} \sqrt{ab} \int_0^c x dx = \frac{\pi}{4} c^2 \sqrt{ab}.$$

Nello stesso modo da

$$u = \int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} dy dx ,$$

integrando per ragione di facilità prima rispetto ad y indi rispetto ad x , si avrà

$$u = \frac{2}{3} a^2.$$

Così ancora dall'equazione

$$u = \iint \frac{dx dy}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} ,$$

estendendo l'integrale da zero ad $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ rispetto ad y , e da zero ad a rispetto ad x , si ottiene

$$u = a.$$

Esempio 2. Integrando primieramente rispetto ad r il doppio integrale

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos t} \frac{r dr dt}{(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}} ,$$

si ottiene

$$u = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t) dt ,$$

donde

$$u = a \left\{ \frac{\pi}{2} - 1 \right\}.$$

Similmente da

$$u = \iint r dr dt (a^2-r^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

prendendo r da 0 ad $a \cos t$, e t da 0 a $\frac{\pi}{2}$, si avrà

$$u = \frac{a^3}{3} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right\}.$$

La forma più semplice.

La forma più semplice di una funzione differenziale non lineare e polinomia di più variabili è

$$1. \quad A dx^2 + B dx dy + C dy^2,$$

A, B, C indicando funzioni di x ed y ; imperocchè la funzione proposta dipende soltanto da due variabili, ed è di 2° grado rispetto ai differenziali di queste variabili.

Supponiamo che questa funzione non risulti da una differenziazione due volte attuata sopra una funzione $F(x, y)$, ma che piuttosto essa rappresenti il differenziale totale di una funzione differenziale lineare, la quale pel n° 92 dovrà avere la forma

$$2. \quad P dx + Q dy,$$

P e Q indicando funzioni tuttavia incognite di x ed y . Allora la funzione 2 non sarà sottoposta ad altra condizione, se non a quella di dover col suo differenziale totale riprodurre la funzione (1.)

Prendendo da 2 questo differenziale totale, si ha la funzione

$$\frac{dP}{dx} dx^2 + \left\{ \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx} \right\} dx dy + \frac{dQ}{dy} dy^2,$$

la quale, dovendo esser identica alla funzione 1, ci conduce alle equazioni di condizione

$$3. \quad \frac{dP}{dx} = A, \quad \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx} = B, \quad \frac{dQ}{dy} = C.$$

Ma queste tre equazioni di condizioni si potranno riunire in una sola, se ne vengano eliminate le incognite fun-

zioni P e Q. Ciò potrà ottenersi differenziando le tre equazioni. Imperocchè differenziando la prima rispetto ad y e la seconda rispetto ad x , si avrà mercè la sottrazione delle equazioni che ne risulteranno :

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} = \frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}.$$

Differenziando questa equazione una volta rispetto ad y , e due volte rispetto ad x la 3^a delle equazioni 3; si avrà sottraendo le espressioni che ne risulteranno,

$$4. \quad \frac{d^2 A}{dy^2} - \frac{d^2 B}{dx dy} + \frac{d^2 C}{dx^2} = 0.$$

Sarà questa l'equazione di condizione che dovrà esser soddisfatta, affinchè l'espressione 1 sia il differenziale esatto della funzione 2.

Or per ottenere l'integrale della funzione 1, integreremo la prima delle equazioni 3 rispetto ad x ; ciò che ci darà

$$5. \quad P = \int A dx + Y,$$

la costante Y indicando una funzione dipendente dalla sola y . Per determinare questa costante si prenderà dall'equazione 5 la derivata parziale $\frac{dP}{dy}$, rappresentata dall'equazione

$$\frac{dP}{dy} = \int \frac{dA}{dy} dx + \frac{dY}{dy},$$

pel cui mezzo la seconda delle equazioni 3 diverrà

$$\frac{dQ}{dx} = B - \int \frac{dA}{dy} dx - \frac{dY}{dy}.$$

Or differenziando questa equazione rispetto ad y , e la terza delle equazioni 3 rispetto ad x , si avrà mercè la sottrazione delle equazioni risultanti :

$$0 = \frac{dB}{dy} - \frac{dC}{dx} - \int \frac{d^2A}{dy^2} dx - \frac{d^2Y}{dy^2},$$

donde si avrà Y espressa dall'equazione

$$6. \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{dB}{dy} - \frac{dC}{dx} - \int \frac{d^2A}{dy^2} dx.$$

Ma Y essendo funzione della sola y , il suo differenziale rispetto ad x dovrà esser nullo. Ed in effetto differenziando rispetto ad x il 2° membro dell'equazione 6 si ha il valore

$$\frac{d^2B}{dx dy} - \frac{d^2C}{dx^2} - \frac{d^2A}{dy^2},$$

che sappiamo esser nullo per l'equazione 4.

Conosciuto il valore di Y , la funzione P sarà nota per l'equazione 5. Rispetto poi a Q si ha la relazione

$$7. \quad dQ = \frac{dQ}{dx} dx + \frac{dQ}{dy} dy,$$

la quale è anche nota, poichè

$$8. \quad \frac{dQ}{dx} = B - \int \frac{dA}{dy} dx - \frac{dY}{dy},$$

e (per l'equazione 3) $\frac{dQ}{dy} = C.$

Poniamo ancora che la funzione differenziale di due variabili del 3° grado

$$A dx^2 + B dx dy + C dx dy^2 + D dy^3,$$

nella quale A , B , C , D disegnino funzioni arbitrarie di x ed y , sia da ricondursi ad una funzione di 2° grado

$$P dx^2 + Q dx dy + R dy^2.$$

Differenziando quest'ultima funzione rispetto ad x ed y , si

avranno le equazioni di condizione

$$\frac{dP}{dx} = A, \quad \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx} = B, \quad \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dx} = C, \quad \frac{dR}{dy} = D,$$

le quali mercè derivate parziali condurranno alla relazione

$$\frac{d^2 A}{dy^2} - \frac{d^2 B}{dy^2 dx} + \frac{d^2 C}{dy dx^2} - \frac{d^2 D}{dx^2} = 0,$$

la quale non contiene P, Q, R .

L'integrale poi si troverà con metodo simile a quello con cui si è giunto a rappresentare l'integrale della funzione 1.

Esempio. Sia data la funzione

$$dx^2 + (x^2 + y^2) dx dy + dy^2.$$

Comparandola alla funzione 1, si troverà

$$A = 1, \quad B = x^2 + y^2, \quad C = 1,$$

dimodochè resterà soddisfatta l'equazione di condizione 4.

Si ha inoltre dall'equazione 5:

$$P = x + Y,$$

e dall'equazione 6:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = 2y,$$

quindi $Y = 2 \int \int y dy^2 = \int (y^2 + a) dy,$

ovvero $Y = \frac{1}{3} y^3 + ay + b,$

a e b indicando le due costanti d'integrazione.

Da quest'ultima equazione si ha

$$\frac{dY}{dy} = y^2 + a,$$

donde per l'equazione 8:

$$\frac{dQ}{dx} = x^2 - a; \quad \text{e} \quad \frac{dQ}{dy} = 1.$$

Quindi per l'equazione 7 si avrà

$$dQ = (x^2 - a) dx + dy ,$$

che integrata ci dà

$$Q = \frac{1}{3} x^3 - ax + y + c.$$

In questo modo la proposta espressione si trova ridotta alla funzione differenziale lineare

$$\left\{ \frac{1}{3} y^3 + ay + x + b \right\} dx + \left\{ \frac{1}{3} x^3 - ax + y + c \right\} dy ,$$

nella quale a , b , c rappresentano costanti arbitrarie.

100.

Funzioni di ogni grado ed ogni ordine.

Nel n° preecedenti si è trattato delle funzioni differenziali che contengono i differenziali delle variabili a prima o a più elevata potenza , ma non già di quelle che comprendono differenziali di ordine superiore.

Per determinare le condizioni che rendono possibile l'integrale di una funzione di second'ordine o di ordine più elevato , noi cominciamo dal caso più semplice , qual'è quello delle funzioni dipendenti da una sola variabile.

Indicando V una qualsiasi funzione differenziale dello m^{esimo} ordine dell'unica variabile x , è d'uopo che essa contenga lo m^{esimo} differenziale di x , ed in generale potrà considerarsi qual funzione di

$$x , dx , d^2x , d^3x , \dots d^m x.$$

L'integrale corrispondente , quando sia possibile , dovrà essere una funzione differenziale dell'ordine $m - 1$, e contenere in conseguenza il differenziale $(m - 1)^{\text{esimo}}$ di x ; potrà quindi considerarsi come funzione di

Dopo ciò, le funzioni 3 saranno da determinarsi in modo che esse soddisfacciano le equ. 4 e 5, a fin di avere

$$V = dU,$$

ossia di essere U l'integrale della funzione differenziale.

Per determinare queste funzioni 3, differenzieremo parzialmente l'equ. 4. Differenziandola rispetto ad x , avremo l'equazione

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dX}{dx} x_1 + \frac{dX_1}{dx} x_2 + \frac{dX_2}{dx} x_3 + \dots + \frac{dX_{m-1}}{dx} x_m,$$

ovvero, avendo riguardo alla prima linea delle equazioni di condizione in 5,

$$\frac{dV}{dx_1} = \frac{dX}{dx} x_1 + \frac{dX}{dx_1} x_2 + \frac{dX}{dx_2} x_3 + \dots + \frac{dX}{dx_{m-1}} x_m,$$

la quale in conseguenza del significato dell'equ. 1 ci dà

$$\frac{dV}{dx} = dX.$$

Dalla differenziazione dell'equ. 4 rispetto ad x_1 risulteranno

$$\frac{dV}{dx_1} = X + \frac{dX}{dx_1} x_1 + \frac{dX_1}{dx_1} x_2 + \frac{dX_2}{dx_1} x_3 + \dots + \frac{dX_{m-1}}{dx_1} x_m,$$

donde, mercè l'equazione 5 e propriamente la prima di quelle contenute nella 1^a linea, e l'intera 2^a linea,

$$\frac{dV}{dx_1} = X + \frac{dX_1}{dx} x_1 + \frac{dX_1}{dx_1} x_2 + \frac{dX_1}{dx_2} x_3 + \dots + \frac{dX_1}{dx_{m-1}} x_m,$$

ovvero, in considerazione dell'equ. 1,

$$\frac{dV}{dx_1} = X + dX_1.$$

Nello stesso modo si perverrà alle relazioni

$$\frac{dV}{dx_2} = X_1 + dX_2, \quad \frac{dV}{dx_3} = X_2 + dX_3,$$

$$\frac{dV}{dx_4} = X_3 + dX_4, \quad \frac{dV}{dx_5} = X_4 + dX_5, \dots$$

Differenziando in fine l'equazione 4 rispetto ad x_m si avrà nella stessa guisa

$$\frac{dV}{dx_m} = X_{m-1} + dX_m.$$

E poichè la funzione integrale, e con essa le funzioni indicate in 1, sono indipendenti da x_m , così l'ultima equazione diviene

$$\frac{dV}{dx_m} = X_{m-1}.$$

Scrivendo in ordine inverso le equazioni così ottenute, si ha

6.

$$X_{m-1} = \frac{dV}{dx_m}$$

$$X_{m-2} + dX_{m-1} = \frac{dV}{dx_{m-1}}$$

$$X_{m-3} + dX_{m-2} = \frac{dV}{dx_{m-2}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_1 + dX_2 = \frac{dV}{dx_2}$$

$$X + dX_1 = \frac{dV}{dx_1}$$

$$dX = \frac{dV}{dx}.$$

Queste equazioni 6 ci danno un mezzo sicuro di rappresentare le funzioni 3 mercè le derivate parziali della data funzione V , e nel tempo stesso di comprendere in una sola equazione le condizioni d'integrabilità di essa funzione V .

Ed in vero, differenziando rispetto a tutte le variabili, $x, x_1, x_2, x_3, \dots x_m$, la prima delle equazioni 6, vale a dire scrivendo

$$dX_{m-1} = d \frac{dV}{dx_m},$$

il simbolo d indicando, come di ordinario, il differenziale totale, si avrà mercè la sottrazione di questa equazione dalla seconda delle equazioni 6:

$$X_{m-2} = \frac{dV}{dx_{m-1}} - d \frac{dV}{dx_m}.$$

Prendendo egualmente il differenziale totale di questa equazione, e sottraendolo dalla terza delle equazioni 6, si ottiene

$$X_{m-3} = \frac{dV}{dx_{m-2}} - d \frac{dV}{dx_{m-1}} + d^2 \frac{dV}{dx_m}.$$

La sottrazione del differenziale completo di questa equazione dalla quarta delle equazioni 6, ne dà

$$X_{m-4} = \frac{dV}{dx_{m-3}} - d \frac{dV}{dx_{m-2}} + d^2 \frac{dV}{dx_{m-1}} - d^3 \frac{dV}{dx_m}.$$

La legge di composizione di tutte queste forme è evidente, dimodochè sarà facile di trovare il valore di ciascuna delle funzioni indicate in 3. Rispetto ad X_1 risulterà

$$X_1 = \frac{dV}{dx_1} - d \frac{dV}{dx_2} + d^2 \frac{dV}{dx_3} - + \dots (-1)^{m-2} d^{m-2} \frac{dV}{dx_m};$$

e se il differenziale totale di questa equazione sia sottratto dalla penultima delle equazioni 6, risulterà

$$X = \frac{dV}{dx_1} - d \frac{dV}{dx_2} + d^2 \frac{dV}{dx_3} - + \dots (-1)^{m-1} d^{m-1} \frac{dV}{dx_m}.$$

Finalmente il differenziale completo di questa equazione, sottratto dall'ultima delle equazioni 6, ci darà

$$0 = \frac{dV}{dx} - d \frac{dV}{dx_1} + d^2 \frac{dV}{dx_2} - d^3 \frac{dV}{dx_3} + \dots (-1)^m d^m \frac{dV}{dx_m},$$

che sarà l'equazione di condizione per l'integrabilità della proposta funzione V.

Laonde se la funzione differenziale V dell'ordine m^{esimo} corrisponda ad una funzione integrale U, la quale in conseguenza dell'equazione 2 sia dipendente dalle funzioni

$$X, X_1, X_2, X_3, \dots X_{m-1},$$

dovranno aver luogo le equazioni:

$$7. 0 = \frac{dV}{dx} - d \frac{dV}{dx_1} + d^2 \frac{dV}{dx_2} - d^3 \frac{dV}{dx_3} + \dots (-1)^m d^m \frac{dV}{dx_m},$$

$$X = \frac{dV}{dx_1} - d \frac{dV}{dx_2} + d^2 \frac{dV}{dx_3} - d^3 \frac{dV}{dx_4} + \dots (-1)^{m-1} d^{m-1} \frac{dV}{dx_m},$$

$$X_1 = \frac{dV}{dx_2} - d \frac{dV}{dx_3} + d^2 \frac{dV}{dx_4} - d^3 \frac{dV}{dx_5} + \dots (-1)^{m-2} d^{m-2} \frac{dV}{dx_m},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_{m-2} = \frac{dV}{dx_{m-2}} - d \frac{dV}{dx_{m-1}} + d^2 \frac{dV}{dx_m},$$

$$X_{m-1} = \frac{dV}{dx_{m-1}} - d \frac{dV}{dx_m},$$

$$X_{m-1} = \frac{dV}{dx_m},$$

la prima delle quali esprime la condizione d'integrabilità della funzione V, mentre le altre esprimono le funzioni 3 mercè derivate parziali e differenziali totali della funzione V.

101.

Continuazione.

Esaminiamo il caso in cui v rappresenti una funzione differenziale di qualsiasi ordine delle variabili x ed y . Suppo-

niamo essere v una funzione differenziale dell'ordine m^{esimo} rispetto ad x e dell'ordine n^{esimo} rispetto ad y , e cerchiamo la funzione integrale u di v , se ciò è possibile, dell'ordine $m-1$ rispetto ad x e dell'ordine $n-1$ rispetto ad y .

Ricorrendo per ragione di brevità alle equazioni

$$1. \quad x_1 = dx, \quad x_2 = dx_1, \quad x_3 = dx_2, \dots x_m = dx_{m-1}, \\ y_1 = dy, \quad y_2 = dy_1, \quad y_3 = dy_2, \dots y_n = dy_{n-1},$$

sarà v una funzione di

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_m, y_1, y_2, y_3, \dots y_n,$$

ed u una funzione di

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_{m-1}, y_1, y_2, y_3, \dots y_{n-1};$$

dimodochè la prima funzione rappresenterà il differenziale totale della seconda, ossia

$$v = du.$$

In conseguenza rappresentando il differenziale totale di u mercè l'equazione

$$2. \quad du = X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{m-1} dx_{m-1}, \\ + Y dy + Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \dots + Y_{n-1} dy_{n-1},$$

nella quale i coefficienti

$$3. \quad X, X_1, X_2, X_3, \dots X_{m-1}, \\ Y, Y_1, Y_2, Y_3, \dots Y_{n-1}$$

sono funzioni delle stesse quantità che u contiene; sarà l'equazione 2 identica coll'altra:

$$4. \quad v = Xx_1 + X_1x_2 + X_2x_3 + X_3x_4 + \dots + X_{m-1}x_m \\ + Yy_1 + Y_1y_2 + Y_2y_3 + Y_3y_4 + \dots + Y_{n-1}y_n,$$

nella quale le funzioni 3 hanno tra esse le stesse relazioni che avevano le funzioni 3 del numero precedente, che già sono state espresse nelle equazioni 5. Le quali relazioni possono essere simbolicamente rappresentate dalle tre equazioni

$$5. \quad \frac{dX_k}{dx_h} = \frac{dX_h}{dx_k}, \quad \frac{dY_k}{dy_h} = \frac{dY_h}{dy_k}, \quad \frac{dX_k}{dy_h} = \frac{dY_h}{dx_k},$$

supponendo che nella prima di esse sia $k < h$ ed h rappresenti la serie naturale dei numeri da $h=1$ fino ad $h=m-1$; nella seconda sia ancora $k < h$ ed h rappresenti la serie da $h=1$ fino ad $h=n-1$; nella terza in fine k rappresenterà la serie naturale da 0 ad $m-1$, ed h da 0 ad $n-1$, dimodochè

$$X_0 \text{ ed } X, Y_0 \text{ ed } Y, x_0 \text{ ed } x, y_0 \text{ ed } y$$

avranno lo stesso significato.

Or prendendo dall'equazione 4 il differenziale parziale rispetto ad x , si ha

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} = & \frac{dX}{dx} x_1 + \frac{dX_1}{dx} x_2 + \frac{dX_2}{dx} x_3 + \dots + \frac{dX_{m-1}}{dx} x_m \\ & + \frac{dY}{dx} y_1 + \frac{dY_1}{dx} y_2 + \frac{dY_2}{dx} y_3 + \dots + \frac{dY_{n-1}}{dx} y_n \end{aligned}$$

Ma se per quest'equazione ci serviamo della prima e terza serie delle equazioni 5 pel caso di $k=0$, essa prenderà la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} = & \frac{dX}{dx} dx + \frac{dX}{dx_1} dx_1 + \frac{dX}{dx_2} dx_2 + \dots + \frac{dX}{dx_{m-1}} dx_{m-1} \\ & + \frac{dX}{dy} dy + \frac{dX}{dy_1} dy_1 + \frac{dX}{dy_2} dy_2 + \dots + \frac{dX}{dy_{n-1}} dy_{n-1}, \end{aligned}$$

ed il secondo membro di quest'equazione rappresenta evidentemente il differenziale completo di X , ovvero è

$$\frac{dv}{dx} = X$$

Considerando la prima e seconda serie delle equazioni 5 nel caso di $k=0$, si avrà similmente dal differenziale parziale rispetto ad y , che si trae dall'equazione 4, la relazione

$$\frac{dv}{dy} = Y.$$

Procedendo nello stesso modo si perverrà alle equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx_1} &= X + dX_1, & \frac{dv}{dy_1} &= Y + dY_1, \\ \frac{dv}{dx_2} &= X_1 + dX_2, & \frac{dv}{dy_2} &= Y_1 + dY_2, \\ & \dots & \dots & \\ \frac{dv}{dx_{m-1}} &= X_{m-2} + dX_{m-1}, & \frac{dv}{dy_{n-1}} &= Y_{n-2} + dY_{n-1}, \\ \frac{dv}{dx_m} &= X_{m-1}, & \frac{dv}{dy_n} &= Y_{n-1}. \end{aligned}$$

E siccome dalle equazioni 6 del n° precedente sono stati dedotti i sistemi delle equazioni 7, nello stesso modo da quelle ora stabilite si dedurranno due sistemi di equazioni, il primo dei quali sarà rappresentato da

$$\begin{aligned} 6. \quad 0 &= \frac{dv}{dx} - d \frac{dv}{dx_1} + d^2 \frac{dv}{dx_2} - + \dots (-1)^m d^m \frac{dv}{dx_m}, \\ 0 &= \frac{dv}{dy} - d \frac{dv}{dy_1} + d^2 \frac{dv}{dy_2} - + \dots (-1)^n d^n \frac{dv}{dy_n}. \end{aligned}$$

E queste equazioni 6 rappresentano le condizioni che rendono integrabile l'equazione 2.

Dal precedente sviluppo si rileva chiaramente quale sarà la forma ed il numero delle equazioni 6, quando v sia funzione differenziale delle variabili $x, y, z, \dots$ e di ordine superiore rispetto a ciascuna variabile.

E si comprenderà ancora immediatamente che la funzione differenziale $v = d^r u$, la quale contiene x ed y coi loro differenziali, deve soddisfare non solo le condizioni

$$7. \quad \frac{dv}{dx} - d \frac{dv}{dx_1} + d^2 \frac{dv}{dx_2} - d^3 \frac{dv}{dx_3} + \dots = 0, \\ \frac{dv}{dy} - d \frac{dv}{dy_1} + d^2 \frac{dv}{dy_2} - d^3 \frac{dv}{dy_3} + \dots = 0,$$

alle quali è sottoposta per esser differenziale primo della funzione $d^{r-1}u$; ma alle equazioni ancora

$$8. \quad \frac{dv}{dx_1} - 2d \frac{dv}{dx_2} + 3d^2 \frac{dv}{dx_3} - \dots = 0 \\ \frac{dv}{dy_1} - 2d \frac{dv}{dy_2} + 3d^2 \frac{dv}{dy_3} - \dots = 0,$$

affinchè sia il differenziale secondo della funzione $d^{r-2}u$, e similmente dovranno ancora esser soddisfatte le equazioni

$$9. \quad \frac{dv}{dx_2} - 3d \frac{dv}{dx_3} + 6d^2 \frac{dv}{dx_4} - 10d^3 \frac{dv}{dx_5} + \dots = 0 \\ \frac{dv}{dy_2} - 3d \frac{dv}{dy_3} + 6d^2 \frac{dv}{dy_4} - 10d^3 \frac{dv}{dy_5} + \dots = 0,$$

affinchè $v = d^r u$ sia il differenziale terzo di $d^{r-3}u$, e così di seguito.

Esempio 1. La funzione

$$v = d^2 u = x d^2 y - y d^2 x$$

rende soddisfatte le condizioni dell'equazione 7; imperocchè si ha

$$\frac{dv}{dx} = d^2 y, \quad \frac{dv}{dx_1} = 0, \quad \frac{dv}{dx_2} = -y, \\ \frac{dv}{dy} = -d^2 x, \quad \frac{dv}{dy_1} = 0, \quad \frac{dv}{dy_2} = x;$$

la funzione proposta è dunque integrabile, e si troverà im-

mediatamente il suo integrale, cioè

$$du = x dy - y dx$$

Esempio 2. Sia data la funzione

$$v = d^2 u$$

$$= x^2 d^2 y + (a+2)x dx dy + (ay+2x) dx^2 + (axy+x^2) d^2 x.$$

Poichè

$$\frac{dv}{dx} = 2x d^2 y + (a+2) dx dy + 2 dx^2 + (ay+2x) d^2 x,$$

$$\frac{dv}{dx_1} = (a+2)x dy + 2(ay+2x) d^2 x,$$

$$\frac{dv}{dx_2} = axy + x^2,$$

quindi

$$d \frac{dv}{dx_1} = 2(ay+2x) d^2 x + (2+3a) dx dy + 4 dx^2 + (a+2)x d^2 y.$$

e

$$d^2 \frac{dv}{dx_2} = (ay+2x) d^2 x + 2a dx dy + 2 dx^2 + ax d^2 y;$$

poichè inoltre

$$\frac{dv}{dy} = a dx^2 + ax d^2 x,$$

$$\frac{dv}{dy_1} = (a+2)x dx, \quad \frac{dv}{dy_2} = x^2,$$

in conseguenza

$$d \frac{dv}{dy_1} = (a+2) dx^2 + (a+2)x d^2 x,$$

$$d^2 \frac{dv}{dy_2} = 2 dx^2 + 2x d^2 x;$$

così si troverà facilmente che la funzione proposta rende soddisfatte le equazioni 7.

Per trovarne l'integrale, rimane soltanto che dall'equazione

$$du = \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy,$$

in cui $F(x, y)$ ovvero F disegna una funzione di x, y , si prenda il differenziale totale nell'ipotesi che x, y, dx e dy siano presi come variabili. Questo differenziale è

$$d^2u = \frac{d^2F}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2F}{dx dy} dx dy + \frac{d^2F}{dy^2} dy^2 + \frac{dF}{dx} d^2x + \frac{dF}{dy} d^2y,$$

il quale, comparato alla funzione proposta, ci dà

$$\frac{dF}{dx} = axy + x^2, \quad \frac{dF}{dy} = x^2,$$

dimodochè l'integrale richiesto sarà rappresentato da

$$du = x^2 dy + (ay + x) x dx + C.$$

Similmente si troverà che la funzione

$$v = d^2u = (ax - 2y) d^2y - 2 dy^2 + 2ady dx + ay d^2x$$

risponde alle condizioni 7 ed 8, e che darà in conseguenza per secondo integrale la funzione

$$u = axy - y^2 + C.$$

Si scoviranno in fine facilmente le condizioni che renderanno integrabile la funzione differenziale generale del 2° ordine :

$$v = d^2u = P dx^2 + Q dx dy + R dy^2 + S d^2x + T d^2y,$$

P, Q, R, S, T indicando funzioni delle stesse variabili di v ; imperocchè applicando le equazioni 7 alla funzione proposta, si avranno le equazioni di condizione

$$M = \frac{dS}{dx}, \quad R = \frac{dT}{dy}, \quad Q = \frac{dT}{dx} + \frac{dS}{dy}.$$

II. EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

CAPO PRIMO.

Una variabile indipendente.

102.

Introduzione.

Nel n° 43 si è mostrato in qual modo da un'equazione

$$F(x, y, a) = 0$$

tra la variabile indipendente x , la funzione y di essa e la costante a , possa ottenersi la corrispondente equazione differenziale

$$f(x, y, y') = 0.$$

Ivi si è dimostrato ancora che mercè la formazione dell'equazione differenziale di una data equazione, da questa spariranno m costanti, ovvero che

$$1. \quad f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(m)}) = 0$$

sarà l'equazione differenziale di un'altra dalle m costanti $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$

$$2. \quad F(x, y, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m) = 0,$$

le quali sono sparite mercè una differenziazione m volte ripetuta e l'introdottavi eliminazione.

L'eliminazione delle costanti non dipendendo dalla loro grandezza, finchè esse conserveranno la funzione nel dominio della continuità, ne segue che esse costanti saranno arbitrarie.

L'obbietto dell'integrazione di un'equazione differenziale di due variabili tra esse dipendenti x ed y e della prima derivata, p. e. $f(x, y, y') = 0$, è quello di avere un'equazione tra le variabili x ed y , indipendente dalla derivata, ovvero di ricercare la natura della mutua dipendenza di esse variabili. Quindi se l'equazione differenziale è dello m^{esimo} ordine, saranno necessarie m integrazioni per eliminare dall'equazione tutte le derivate fino alla $y^{(m)}$. E poichè ogn' integrale mena seco una costante arbitraria, così l'integrale di un'equazione differenziale dell'ordine m^{esimo} dovrà contenere m costanti arbitrarie, come immediatamente rilevasi dalla formazione di essa equazione differenziale.

Quanto poi alla forma delle equazioni differenziali è da osservarsi che l'una o l'altra delle derivate potrà esservi contenuta a diverse potenze. Se un'equazione differenziale dell'ordine m^{esimo} contiene la prima potenza soltanto di ciascuna derivata $y', y'', y''', \dots y^{(m)}$, essa si dirà lineare, nel caso opposto non lineare.

Cominceremo dall'occuparci delle equazioni differenziali lineari tra due variabili.

A. Equazioni differenziali lineari.

103.

Osservazioni generali.

La forma generale di un'equazione differenziale lineare dell'ordine n^{esimo} è rappresentata dall'equazione

$$1. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = X,$$

$A_1, A_2, A_3, \dots A_n, X$ disegnando numeri costanti, o funzioni di x .

Per iscrivere l'integrale di questa equazione ritorniamo all'equ. 3 del n° 12 :

$$d(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} dx ,$$

supponendo che u e v dipendano da x e da essa soltanto. Adottiamo per la derivata di uv

$$1. \quad D(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

la forma

$$2. \quad D(uv) = (D + D_1)uv ,$$

indicando colla semplice D la derivata di u rispetto ad x e con D_1 la derivata di v rispetto ad x , ed apponendo per significare questa relazione il simbolo uv all'altro $(D + D_1)$.

Rappresentiamo ora la n^{esima} derivata dell'equazione 2 coll'espressione

$$3. \quad D^n(uv) = (D + D_1)^n uv ,$$

e consideriamo per un istante la forma $(D + D_1)^n$ come la n^{esima} potenza del binomio $D + D_1$: ne risulterà

$$(D + D_1)^n = \left\{ D^n D_1^0 + \frac{n}{1} D^{n-1} D_1^1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} D^{n-2} D_1^2 + \dots \right\} uv ,$$

ovvero, compiendo la moltiplicazione per uv col porre u dopo $D^n, D^{n-1}, \dots$ e v dopo $D_1^0, D_1^1, \dots$

$$D^n(uv) = D^n u D_1^0 v + \frac{n}{1} D^{n-1} u D_1^1 v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} D^{n-2} u D_1^2 v + \dots$$

Restituendo ora al simbolo del 2° membro di questa equazione il significato primitivo, si avrà

$$D^n u = \frac{d^n u}{dx^n}, \quad D^{n-1} u = \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}, \dots$$

$$D_1^0 = \frac{d^0 v}{dx^0} = v, \quad D_1^1 v = \frac{dv}{dx}, \dots$$

quindi

$$4. D^n(uv) = v \frac{d^n u}{dx^n} + \frac{n}{1} \frac{dv}{dx} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \dots$$

Ma questa equazione ha forma simile ed identico significato dell'ultima equazione sotto 3 del n° 12; dimodochè l'espressione simbolica dell'equ. 3 si raccomanda per la sua facilità e conformità allo scopo.

La detta maniera di scrivere offre grande vantaggio, quando la forma $D^n(uv)$ si estende ad un numero intero negativo n , e si attribuisce significato d'integrale alle derivate negative. È evidente che $D^{n-1}(uv)$ e l'integrale di $D^n(uv)dx$, quando n designa un numero intero positivo, ossia

$$\int D^n(uv)dx = D^{n-1}(uv).$$

Ritenendo lo stesso significato pei numeri negativi, si ha per $n = -1$:

$$\int D^0(uv)dx = D^{-1}(uv),$$

per $n = -2$: $\int D^{-1}(uv)dx = D^{-2}(uv)$

ovvero $\int^2 uv dx^2 = D^{-2}(uv)$,

ed in generale

$$5. \int^n uv dx^n = D^{-n}(uv).$$

Ed egli è facile a comprendersi che l'equazione 5 debba valere per ogni funzione di x , imperocchè essa dipende dalla definizione del differenziale e dell'integrale, e non già dalla forma della funzione.

Mercè l'equ. 5 l'equ. 4 prenderà un'altra forma, poichè scambiandovi n con $-n$, e considerando che in conseguenza dell'equ. 5 è

$$\frac{d^{-n}u}{dx^{-n}} = \int^n u dx^n,$$

si avrà

$$6. \quad \int^n uv dx^n = v \int^n u dx^n - n \frac{dv}{dx} \int^{n+1} u dx^{n+1} \\ + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2v}{dx^2} \int^{n+2} u dx^{n+2} - + \dots$$

La validità di questa equazione non può soggiacere a dubbio veruno, essendocchè per le equ. 3 e 4 si ha

$$\int^n uv dx^n = (D + D_1)^{-n} uv,$$

e lo sviluppo del binomio $(D + D_1)^{-n}$ darà immediatamente la stabilita forma, quando in conseguenza dell'equazione 5 si scambii

$$D^{-r} u \text{ con } \int^r u dx^r.$$

Si perverrà ancora all'equazione 6, integrando per parti $\int^n uv dx^n$, e riguardando v come prima parte ed $u dx$ come seconda. Imperocchè si avrà primieramente e con facilità per integrale di $uv dx$ l'equazione

$$\int uv dx = v \int u dx - \frac{dv}{dx} \int^2 u dx^2 + \frac{d^2v}{dx^2} \int^3 u dx^3 \\ - \frac{d^3v}{dx^3} \int^4 u dx^4 + \dots$$

Or se questa equazione sia moltiplicata per dx ed integrata in modo che l'integrazione per parti sia applicata ad ogni termine del 2° membro, si avrà tosto

$$\int^n uv dx^n = v \int^n u dx^n - 2 \frac{dv}{dx} \int^3 u dx^3 + 3 \frac{d^2v}{dx^2} \int^4 u dx^4 \\ - 4 \frac{d^3v}{dx^3} \int^5 u dx^5 + \dots$$

e da questa equazione procedendo allo stesso modo risulterà

$$\int u v dx^3 = v \int u dx^3 - 3 \frac{dv}{dx} \int u dx^4 + 6 \frac{d^2 v}{dx^2} \int u dx^5 - 10 \frac{d^3 v}{dx^3} \int u dx^6 + \dots$$

e così di seguito ; dimodochè chiara ne apparisce la legge di formazione.

Ponendo $u = 1$ nell' equazione 6 si avrà a cagione di

$$\int u dx^r = \int dx^r = \frac{x^r}{1.2.3 \dots r},$$

$$7. \int v dx^n = \frac{x^{n-1}}{1.2 \dots n-1} \left\{ \frac{x}{n} v - \frac{x^2}{n+1} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{x^3}{n+2} \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{1}{1.2.3} \frac{x^4}{n+3} \frac{d^3 v}{dx^3} + \dots \right\},$$

e per $n = 1$:

$$\int v dx = xv - \frac{x^2}{1.2} \frac{dv}{dx} + \frac{x^3}{1.2.3} \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{x^4}{1.2.3.4} \frac{d^3 v}{dx^3} + \dots$$

Questa è la serie di Bernoulli che nel n° 57 abbiamo trovata per altra via.

In fine questa scrittura simbolica che separa i simboli dell' operazione da quelli delle grandezze , trova la sua applicazione alla serie di Taylor. Ed in vero scambiando nella serie

$$F(x+h) = Fx + hF'x + \frac{h^2}{1.2} F''x + \frac{h^3}{1.2.3} F'''x + \dots$$

$F^{(n)}x$ con $D^n Fx$ e separando il simbolo D^n dalla quantità Fx , si ottiene la forma

$$F(x+h) = \left\{ 1 + \frac{hD}{1} + \frac{h^2 D^2}{1.2} + \frac{h^3 D^3}{1.2.3} + \dots \right\} Fx.$$

Ma il fattore di Fx pel n° 27 è la stessa cosa che la serie di e^x , quando si muti x in hD ; quindi

$$8. \quad F(x+h) = e^{hD} Fx.$$

In conseguenza nella forma e^{hD} riferendo il simbolo D alla derivata di Fx , potrà riaversi $F(x+h)$.

Dopo queste osservazioni ritorniamo all'equazione 1, e consideriamo primieramente il caso, in cui i coefficienti

$$A_1, A_2, A_3, \dots A_n$$

disegnino numeri costanti, mentre X rappresenterà una funzione qualunque di x .

a. Con fattori costanti.

104.

Radici disuguali.

L'equazione

$$1. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = X,$$

nella quale i coefficienti $A_1, A_2, \dots A_{n-1}, A_n$ rappresentino numeri costanti, potrà pel n° precedente ridursi alla forma

$$2. \quad (D^n + A_1 D^{n-1} + A_2 D^{n-2} + \dots A_{n-1} D + A_n) y = X,$$

ponendo che in D^r sia rappresentata la r^{esima} derivata di y rispetto ad x .

Or il fattore di y ha la forma

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots A_{n-1} z + A_n;$$

e se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ disegnino le radici dell'equazione

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} \dots + A_n = 0,$$

il polinomio del 1° membro per ogni z avrà il valore

$$(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3) \dots (z - a_n).$$

In conseguenza $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ rappresentando le radici dell'equazione

$$D^n + A_1 D^{n-1} + \dots + A_{n-1} D + A_n = 0,$$

l'equazione 2 assumerà la forma

$$3. \quad (D - a_1)(D - a_2)(D - a_3) \dots (D - a_n)y = X.$$

Dal primo membro di questa equazione 3 risulterà il primo membro dell'equazione 1, quando si moltiplichino tra essi gli n fattori in modo che nella formazione del prodotto si consideri D come grandezza e non come simbolo, aggiungendo però a ciascun D con esponente il numero y , ed avendo D^y qual derivata.

L'equazione 3 darà il valore di y , quando si potrà rappresentare il valore di $(D - a)^{-r} X$ per ogni intero r . Imperochè dividendola pel prodotto dei primi n fattori del 1° membro, si ha

$$y = \frac{X}{(D - a_1)(D - a_2)(D - a_3) \dots (D - a_n)}$$

ovvero

$$4. \quad y = (D - a_1)^{-1} (D - a_2)^{-1} (D - a_3)^{-1} \dots (D - a_n)^{-1} X.$$

Or le radici $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ potranno esser reali e disuguali.

Primieramente è da cercarsi il significato della forma $(D - a)^{-r} X$. Questo significato si ha dall'equazione 4 del n° 103, giacchè ponendovi $u = X$, $v = e^{ax}$, si troverà facilmente

$$D^n (uv) = e^{ax} \left\{ D^n X + na D^{n-1} X + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 D^{n-2} X + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 D^{n-3} X + \dots \right\},$$

ovvero, in considerazione della scrittura simbolica mentovata nello stesso numero ,

$$D^n (e^{ax} X) = e^{ax} \left\{ D^n + \frac{n}{1} a D^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 D^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 D^{n-3} + \dots \right\} X,$$

o in fine

$$5. \quad e^{-ax} D^n (e^{ax} X) = (D+a)^n X.$$

Questa equazione in conseguenza dell' equazione 5 del n° 103 valerà ancora per ogni numero negativo n . In questo caso essa ci dà

$$6. \quad (D+a)^{-n} X = e^{-ax} D^{-n} (e^{ax} X) = e^{-ax} \int e^{ax} X dx^n.$$

Quindi ponendovi $n = 1$, si avrà

$$(D+a)^{-1} X = e^{-ax} \int e^{ax} X dx.$$

Scambiando ora mercè questa equazione il fattore operativo $(D-a_1)^{-1}$ dell' equazione 4 , si ottiene

$$y = (D-a_2)^{-1} (D-a_3)^{-1} \dots (D-a_n)^{-1} e^{ax} \int e^{-ax} X dx.$$

Osservando inoltre che a ciascun integrale si appartiene una costante arbitraria , che nel caso attuale indicheremo con C_n , e ponendo per brevità

$$\int e^{-ax} X dx = e^{-ax} X , ,$$

avremo l' ultima equazione sotto la forma

$$7. \quad y = (D-a_2)^{-1} (D-a_3)^{-1} \dots (D-a_n)^{-1} (X_1 + C_n e^{a_1 x}).$$

Eliminando nello stesso modo il fattore $(D-a_2)^{-1}$, ed aggiungendo all' integrale la costante C_{n-1} , cosicchè si ottiene

$$y = (D - a_1)^{-1} \dots (D - a_n)^{-1} e^{a_1 x} \left(\int e^{-a_1 x} X_1 dx + \int C_n e^{a_1 x} \cdot e^{-a_1 x} dx + C_{n-1} \right);$$

e ponendo inoltre

$$e^{-a_1 x} X_1 \text{ in vece di } \int e^{-a_1 x} X_1 dx, \quad .$$

si avrà

$$y = (D - a_1)^{-1} \dots (D - a_n)^{-1} e^{a_1 x} \left\{ e^{-a_1 x} + \frac{C_n e^{(a_1 - a_2)x}}{a_1 - a_2} C_{n-1} \right\},$$

ovvero, moltiplicando per $e^{a_1 x}$,

$$8. \quad y = (D - a_1)^{-1} \dots (D - a_n)^{-1} \left\{ X_n + \frac{C_n e^{a_1 x}}{a_1 - a_2} + C_{n-1} e^{a_1 x} \right\}.$$

Il fattore di $e^{a_1 x}$ nelle equazioni 7 ed 8 è una quantità costante, e poichè la C_n è arbitraria, si potrà nell'equazione 8 introdurre C_n in luogo di $\frac{C_n}{a_1 - a_2}$.

Donde segue esser inutile sottoporre ad integrazione il termine $C_n e^{a_1 x}$ dell'equazione 7; e perciò l'equazione 8 prenderà la forma

$$y = (D - a_1)^{-1} \dots (D - a_n)^{-1} (X_n + C_n e^{a_1 x} + C_{n-1} e^{a_1 x}).$$

Dallo stesso principio si rileverà del pari l'inutilità di sottoporre ad integrazione, relativamente al fattore operativo $(D - a_1)^{-1}$, i termini $C_n e^{a_1 x}$, $C_{n-1} e^{a_1 x}$. Altrettanto valerà per ogni nuova integrazione e per ciascun termine che avrà una costante per fattore.

Questa conseguenza mena a dover riguardare l'equazione

$$9. \quad y = X_{n-1} + C_n e^{a_1 x} + C_{n-1} e^{a_1 x} + \dots + C_2 e^{a_{n-1} x} + C_1 e^{a_1 x}$$

qual integrale generale dell'equazione

$$1. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = X,$$

supponendo che $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ rappresentino nu-

meri costanti ; che X indichi una funzione di x ; che $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ siano le radici dell'equazione.

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0 ;$$

e che in fine X_{n-1} sia dedotta dalle equazioni

$$\int e^{-a_1 x} X dx = e^{-a_1 x} X_1, \quad \int e^{-a_2 x} X_1 dx = e^{-a_2 x} X_2, \dots$$

Si riconosce all'istante che l'equ. 1 sarà soddisfatta, se in vece di y si ponga uno dei valori $C_0 e^{a_1 x}, C_{n-1} e^{a_{n-1} x}, \dots$ o la somma di più di essi, e sia nel tempo stesso $X = 0$.

Il metodo finora esposto, quantunque semplicissimo, non è purtuttavia il solo che possa condurre all'integrale richiesto. Imperocchè egli è chiaro che mercè l'integrazione per parti si potrà dare al fattore di X nell'equ. 4, al quoziente cioè

$$\frac{1}{(D-a_1)(D-a_2)(D-a_3)\dots(D-a_n)},$$

la forma

$$\frac{M_1}{D-a_1} + \frac{M_2}{D-a_2} + \frac{M_3}{D-a_3} + \dots + \frac{M_n}{D-a_n},$$

rappresentando in conseguenza del n° 63 con M_i la relazione

$$M_i = \frac{1}{(a_1-a_n)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_{n-1})},$$

e facendo altrettanto rispetto ai numeri $M_2, M_3, \dots, M_n$; e che in conseguenza y assumerà il valore

$$y = M_1(D-a_1)^{-1}X + M_2(D-a_2)^{-1}X + \dots + M_n(D-a_n)^{-1}X,$$

ovvero, introducendo gl'integrali e per ognun di essi una costante arbitraria,

$$10. \quad y = M_1 e^{a_1 x} \left(\int e^{-a_1 x} X dx + C_1 \right) + M_2 e^{a_2 x} \left(\int e^{-a_2 x} X dx + C_2 \right) + \dots + M_n e^{a_n x} \left(\int e^{-a_n x} X dx + C_n \right).$$

E questa equazione potrà differire dall'equazione 9 soltanto per la grandezza delle singole costanti arbitrarie.

Finalmente a ciascun fattore di X nell'equazione 4 si potrà sostituire la serie corrispondente; così per $(D-a_1)^{-1}$ p. e. la serie

$$D^{-1} + a_1 D^{-2} + a_1^2 D^{-3} + a_1^3 D^{-4} + \dots$$

la quale darà valore finito nell'ipotesi soltanto che divengano nulli gl'integrali rappresentati da

$$D^{-1}X, D^{-2}X, D^{-3}X, \dots$$

come p. e. per $X = x^r$, quando r sia intero e positivo.

Esempio 1. Sia data l'equazione

$$\frac{dy}{dx} - ay = x^4.$$

Essendo qui $(D-a)y = x^4$,

si ha per l'integrale il valore

$$y = (D-a)^{-1}x^4,$$

ovvero $y = e^{ax} \int e^{-ax} x^4 dx$.

Ma avendosi in generale mercè l'integrazione per parti

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx,$$

si otterrà mercè la successiva applicazione di questa formola,

$$\int x^4 e^{-ax} dx = -e^{-ax} \left\{ \frac{x^4}{a} + \frac{4x^3}{a^2} + \frac{4 \cdot 3x^2}{a^3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2x}{a^4} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{a^5} \right\},$$

quindi

$$y = Ce^{ax} - \frac{x^4}{a} - \frac{4x^3}{a^2} - \frac{4 \cdot 3x^2}{a^3} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2x}{a^4} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{a^5}.$$

Questo valore di y risulterà ancora dalla precedente equazione

$$y = (D-a)^{-1} x^4,$$

svolvendo $(D-a)^{-1}$ in serie che sarà moltiplicata per x^4 , e prendendo le derivate indicate con D . Imperocchè essendo $(D-a)^{-1} = -(a-D)^{-1}$, ed in conseguenza

$$(D-a)^{-1} = -\left\{ \frac{1}{a} + \frac{D}{a^2} + \frac{D^2}{a^3} + \frac{D^3}{a^4} + \frac{D^4}{a^5} + \dots \right\},$$

sarà

$$(D-a)^{-1} x^4 = -\left\{ \frac{x^4}{a} + \frac{Dx^4}{a^2} + \frac{D^2x^4}{a^3} + \frac{D^3x^4}{a^4} + \frac{D^4x^4}{a^5} + \dots \right\},$$

ed a cagione di

$$Dx^4 = 4x^3, \quad D^2x^4 = 4.3x^2, \quad D^3x^4 = 4.3.2x$$

$$D^4x^4 = 4.3.2.1, \quad D^5x^4 = 0, \dots,$$

sarà

$$(D-a)^{-1} x^4 = -\left\{ \frac{x^4}{a} + \frac{4x^3}{a^2} + \frac{4.3x^2}{a^3} + \frac{4.3.2x}{a^4} + \frac{4.3.2.1}{a^5} \right\},$$

al che poi rimane ad aggiungere una costante.

Esempio 2. Essendo

$$\frac{dy}{dx} + ay = e^{mx},$$

si avrà

$$(D+a)y = e^{mx}$$

ed

$$y = (D+a)^{-1} e^{mx}.$$

Ma per l'equazione 6 è

$$\begin{aligned} (D+a)^{-1} e^{mx} &= e^{-ax} \int e^{ax} \cdot e^{mx} dx \\ &= e^{-ax} \int e^{(a+m)x} dx; \end{aligned}$$

e poichè

$$\int e^{(a+m)x} dx = \frac{e^{(a+m)x}}{a+m},$$

così è

$$y = e^{-ax} \left\{ \frac{e^{(a+m)x}}{a+m} + C \right\},$$

ovvero

$$y = \frac{e^{mx}}{a+m} + Ce^{-ax}.$$

Esempio 3. Da

$$\frac{dy}{dx} - ay = e^{mx} \cos rx$$

risulta

$$(D-a)y = e^{mx} \cos rx,$$

ed

$$y = (D-a)^{-1} e^{mx} \cos rx,$$

ovvero

$$y = e^{ax} \int e^{(m-a)x} \cos rx \, dx.$$

Ma per l'equazione 20 del n° 58 si ha

$$\int e^{(m-a)x} \cos rx \, dx = \frac{(m-a) \cos rx + r \sin rx}{(m-a)^2 + r^2} e^{(m-a)x},$$

quindi
$$y = \frac{(m-a) \cos rx + r \sin rx}{(m-a)^2 + r^2} e^{mx} + Ce^{ax}.$$

Esempio 4. Dall'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{x}{(1+x)^2}$$

risulta

$$(D^2 + 3D + 2)y = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Or dell'equazione $D^2 + 3D + 2 = 0$

sono radici $D = -1$ e $D = -2$; quindi

$$(D+1)(D+2)y = \frac{x}{(1+x)^2},$$

ovvero

$$y = (D+1)^{-1} (D+2)^{-1} \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Ma per la frazione

$$\frac{1}{(D+1)(D+2)} = \frac{M_1}{D+1} + \frac{M_2}{D+2}$$

si ha $M_1 = 1$, $M_2 = -1$, ed in conseguenza

$$y = (D+1)^{-1} \frac{x}{(1+x)^2} - (D+2)^{-1} \frac{x}{(1+x)^2},$$

ovvero
$$y = e^{-x} \int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2} - e^{-2x} \int \frac{e^{2x} x dx}{(1+x)^2}.$$

Pel primo di questi due integrali si ha

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2},$$

quindi integrando per parti risulta

$$\int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}$$

Rispetto poi al secondo integrale avremo ancora dall'integrazione per parti

$$\int \frac{e^{2x} x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^{2x}}{1+x} - \int \frac{e^{2x} dx}{1+x};$$

quindi
$$y = e^{-2x} \int \frac{e^{2x} dx}{1+x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Esempio 5. Sia data l'equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - a^2 y = -\frac{1}{2} + e^{-x} \cos z - e^{-2x} \cos 2z + e^{-3x} \cos 3z - +.$$

Indicando per brevità con $-\frac{1}{2} + \sum e^{-mx} \cos mz$ il secondo membro di questa equazione, si avrà dietro la notazione più volte rammentata, la forma

$$(D^2 - a^2) y = -\frac{1}{2} + \sum e^{-mx} \cos mz ;$$

quindi

$$y = (D-a)^{-1} (D+a)^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} + \sum e^{-mx} \cos mz \right\},$$

ovvero

$$y = (D+a)^{-1} e^{ax} \left\{ -\frac{1}{2} \int e^{-ax} dx + \int e^{-ax} \sum e^{-mx} \cos mz dx + C \right\}.$$

$$\text{Or si ha} \quad -\frac{1}{2} \int e^{-ax} dx = \frac{1}{2a} e^{-ax},$$

$$\begin{aligned} \int e^{-ax} \sum e^{-mx} \cos mz dx &= \sum \int e^{-ax} \cdot e^{-mx} \cos mz dx \\ &= \sum \frac{e^{-(a+m)x}}{-(a+m)} \cos mz ; \end{aligned}$$

in conseguenza risulterà per y il valore

$$y = (D+a)^{-1} \left\{ \frac{1}{2a} + \sum \frac{e^{-mx}}{-(a+m)} \cos mz + Ce^{ax} \right\},$$

ovvero, facendo la seconda integrazione ,

$$y = e^{-ax} \left\{ \frac{1}{2a} \int e^{ax} dx + \sum \int \frac{e^{(a+m)x}}{-(a+m)} \cos mz dx + C_1 \right\} + Ce^{ax},$$

vale a dire

$$y = e^{-ax} \left\{ \frac{e^{ax}}{2a^2} + \sum \frac{e^{(a+m)x}}{m^2 - a^2} \cos mz + C_1 \right\} + Ce^{ax},$$

o in fine

$$y = \frac{1}{2a^2} + \sum \frac{e^{-mx} \cos mz}{m^2 - a^2} + Ce^{ax} + C_1 e^{-ax}.$$

Dalla quale espressione, risolvendone il segno sommatorio, risulta l'equazione

$$y = \frac{1}{2a^2} + \frac{e^{-x} \cos x}{1^2 - a^2} - \frac{e^{-2x} \cos 2x}{2^2 - a^2} + \frac{e^{-3x} \cos 3x}{3^2 - a^2} - \dots$$

Similmente dall'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} - a^2y = -\frac{1}{2} + \cos x - \cos 2x + \cos 3x - + \dots$$

si avrà per y il valore

$$y = \frac{1}{2a} - \frac{a \cos x}{1+a^2} + \frac{a \cos 2x}{2^2+a^2} - \frac{a \cos 3x}{3^2+a^2} + \dots$$

105.

Radici eguali.

Se l'equazione

$$1. \quad z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_n = 0,$$

la quale appartiene all'equazione differenziale

$$2. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y = X,$$

abbia r radici eguali, che indichiamo con a , l'equazione 4 del n° precedente diverrà

$$3. \quad y = (D-a)^{-r} (D-a_1)^{-1} (D-a_2)^{-1} \dots (D-a_{n-r})^{-1} X,$$

$a_1, a_2, \dots, a_{n-r}$ disegnando le radici diseguali dell'equazione 1.

Ma per l'equazione 6 del n° 104 si ha

$$(D-a)^{-r} X = e^{ax} \int e^{-ax} X dx^r;$$

e se per brevità si ponga

$$\int e^{-ax} X dx = e^{-ax} X_1 + C_r,$$

si avrà, indicando con C_r la costante d'integrazione,

$$(D-a)^{-r} X = e^{ax} \int (e^{-ax} X_1 + C_r) dx^{r-1}.$$

Pongasi dinuovo

$$\int e^{-ax} X_1 dx = e^{-ax} X_2 + C_{r-1},$$

ed avremo

$$(D-a)^{-r} X = e^{ax} \int (e^{-ax} X_2 + C_{r-1} x + C_{r-2}) dx^{r-1};$$

quindi per $\int e^{-ax} X_2 dx = e^{-ax} X_3 + C_{r-2}$

si avrà l'equazione

$$(D-a)^{-r} X = e^{ax} \int e^{-ax} X_3 + C_{r-1} x^2 + C_{r-2} x + C_{r-3} dx^{r-1}.$$

L'andamento dello sviluppo dimostra come per mezzo di continuata integrazione si pervenga all'equazione

$$(D-a)^{-r} X = X_{n-r} + e^{ax} (C_r x^{r-1} + C_{r-1} x^{r-2} + \dots + C_2 x + C_1)$$

La seconda parte del 2° membro, continuandosi l'integrazione relativa ai fattori $(D-a_1)^{-1}$, $(D-a_2)^{-1}$, . . . dell'equazione 3, potrà rimanere fuori il segno integrale, in conseguenza dei motivi addotti nel n° 104; dimodochè y assumerà il valore

$$4. \quad y = X_n + e^{ax} (C_r x^{r-1} + C_{r-1} x^{r-2} + \dots + C_2 x + C_1) + e^{a_1 x} B_1 + e^{a_2 x} B_2 + \dots + e^{a_{n-r} x} B_{n-r},$$

$B_1, B_2, \dots, B_{n-r}$ indicando le costanti relative ai fattori $(D-a_1)^{-1}, (D-a_2)^{-1}, \dots, (D-a_{n-r})^{-1}$.

Ed anche qui potremo trovare il valore di y scomponendo in fratti parziali il fattore di X nell'equazione 3, ovvero svolgendo in serie il fattore $(D-a)^{-r}$

Esempio 1. Sia dato

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = x^2.$$

Questa equazione potendosi ancora esprimere con $(D-2)^2 y = x^2$,

sarà

$$y = (D-2)^{-1} x^2,$$

ovvero

$$y = (2-D)^{-1} x^2 + e^{2x} (C + C_1 x),$$

determinando le costanti a tenore dell'equazione 4. Ma poichè

$$\frac{1}{(2-D)^2} = \frac{1}{4} \left\{ 1 + D + \frac{3D^2}{4} + \frac{D^3}{2} + \dots \right\},$$

quindi

$$\begin{aligned} (2-D)^{-2} x^2 &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + D + \frac{3D^2}{4} + \frac{D^3}{2} + \dots \right\} x^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ x^2 + D(x^2) + \frac{3D^2(x^2)}{4} + \frac{D^3(x^2)}{2} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

ovvero, svolgendo le differenziazioni indicate,

$$(2-D)^{-2} x^2 = \frac{1}{4} \left\{ x^2 + 2x + \frac{3}{2} \right\};$$

così sarà

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} + e^{2x} (C + C_1 x).$$

Si poteva ancora dedurre il valore di y dall'equazione precedente per mezzo d'integrazione; imperocchè per l'equazione 6 del n° 103 si ha

$$y = (D-2)^{-2} x^2 = e^{2x} \int e^{-2x} x^2 dx,$$

ovvero, aggiungendovi le costanti,

$$y = e^{2x} \int e^{-2x} x^2 dx + e^{2x} (C + C_1 x).$$

Or in conseguenza dell'equazione generale utilizzata nell'esempio 1 del n° precedente, la quale contiene l'integrale di $x^n e^{ax} dx$, si ha

$$\int e^{-2x} x^2 dx = -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} - \frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4},$$

quindi $\int e^{-ax} x^2 dx = \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} \right\} e^{-ax}$

Esempio 2. L' equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + a^2 y = \text{sen } nx$$

ci dà $(D-a)^2 y = \text{sen } nx$,

ovvero $y = e^{ax} \int e^{-ax} \text{sen } nx dx + e^{ax} (C + C_1 x)$.

Ma per l' equ. 21 del n° 58 è

$$\int e^{-ax} \text{sen } nx dx = - \frac{a \text{sen } nx + n \cos nx}{a^2 + n^2} e^{-ax},$$

e se per abbreviazione del seguente integrale s' introduce la notazione

$$a = (a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}} \cos k, \quad n = (a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}} \text{sen } k,$$

la quale è sempre lecita, si avrà

$$\int e^{-ax} \text{sen } nx dx = - \frac{\cos k \text{sen } nx + \text{sen } k \cos nx}{(a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-ax},$$

ovvero $\int e^{-ax} \text{sen } nx dx = - \frac{\text{sen}(nx+k)}{(a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-ax}.$

Quindi rispetto al doppio integrale proposto si avrà

$$\int e^{-ax} \text{sen } nx dx = - \frac{1}{(a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}} \int e^{-ax} \text{sen}(nx+k) dx.$$

Ma lo sviluppo dei due integrali

$$\int e^{ax} \cos nx dx, \quad \int e^{ax} \text{sen } nx dx$$

mercè il metodo d' integrazione per parti dimostra, che le

note formole che ne risultano, resteranno valide, quando nx si muti in $nx + k$, dimodochè sarà

$$\int e^{-ax} \sin(nx+k) dx = - \frac{a \sin(nx+k) + n \cos(nx+k)}{a^2 + n^2} e^{-ax},$$

ovvero, ripristinando i precedenti valori di a ed n ,

$$\int e^{-ax} \sin(nx+k) dx = - \frac{\sin(nx+2k)}{(a^2+n^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-ax},$$

cosicchè sarà

$$\int_0^x e^{-ax} \sin nx dx = \frac{\sin(nx+2k)}{a^2+n^2} e^{-ax},$$

ed
$$y = \frac{\sin(nx+2k)}{a^2+n^2} + e^{ax} (C + C_1 x).$$

Esempio 3. Sia data l'equazione

$$a^n y + na^{n-1} \frac{dy}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots = X,$$

nella quale a disegni un numero positivo, ed n un numero intero positivo. È qui chiaramente

$$(a+D)^n y = X,$$

ed
$$y = (a+D)^{-n} X,$$

ovvero

$$y = e^{-ax} \int_0^x e^{ax} X dx^n + e^{-ax} (C + C_1 x + \dots + C_{n-1} x^{n-1}).$$

L'integrale n^{upio} si potrà ottenere o pel n° 70, o per mezzo di ripetuta integrazione per parti, o mediante lo sviluppo di $(a+D)^{-n}$ e della differenziazione che ne segue.

Supponendo $X = e^{mx}$, ne risulta

$$y = \frac{e^{(a+m)x}}{(a+m)^n} + e^{-ax} (C + C_1 x + \dots + C_{n-1} x^{n-1}).$$

Radici Immaginarie.

Se sono immaginarie alcune delle radici dell'equazione

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_n = 0,$$

appartenente all'equazione differenziale

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y = X,$$

allora il metodo d'integrare l'equazione verrà in generale a modificarsi. Imperocchè disegnino α , ed α , due radici immaginarie conjugate, cosicchè sia

$$a_1 = \alpha + i\beta, \quad a_2 = \alpha - i\beta;$$

i fattori di X corrispondenti a queste radici ci daranno l'equazione

$$\begin{aligned} (D - a_1)^{-1} (D - a_2)^{-1} X &= (D - a_2)^{-1} e^{a_1 x} \left(\int e^{-a_1 x} X dx + C_1 \right) \\ &= (D - a_2)^{-1} e^{\alpha x + i\beta x} \left(\int e^{-\alpha x - i\beta x} X dx + C_1 \right); \end{aligned}$$

e se l'indicato integrale $\int e^{-\alpha x - i\beta x} X dx$ si rappresenti con $e^{-\alpha x - i\beta x} X_1$, si avrà

$$(D - a_1)^{-1} (D - a_2)^{-1} X = (D - a_2)^{-1} (X_1 + C_1 e^{\alpha x + i\beta x}).$$

Ma egli è facile a vedersi che il fattore variabile non sarà alterato dalla costante C_1 di questa equazione, quando verrà sottoposto a novella integrazione. In conseguenza si avrà

$$1. \quad (D - a_1)^{-1} (D - a_2)^{-1} X = (D - a_2)^{-1} X_1 + C_1 e^{\alpha x + i\beta x}.$$

Or si ha

$$(D-a_2)^{-1} X_1 = e^{x_1-i\beta_1} \int e^{-\alpha x+i\beta_1} X_1 dx + C_2 e^{x_1-i\beta_1} \\ = X_2 + C_2 e^{x_1-i\beta_1},$$

rappresentando con $e^{-\alpha x+i\beta_1} X_2$ l'indicato integrale. Da ciò risulta l'equazione

$$2. \quad (D-a_1)^{-1}(D-a_2)^{-1} X = X_2 + C_1 e^{x_1+i\beta_1} + C_2 e^{x_1-i\beta_1}.$$

Dai fattori delle costanti C_1 e C_2 si potranno eliminare le quantità esponenziali. Imperocchè si ha immediatamente

$$C_1 e^{x_1+i\beta_1} = C_1 e^{x_1} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ C_2 e^{x_1-i\beta_1} = C_2 e^{x_1} (\cos \beta x - i \sin \beta x),$$

quindi, se si ponga

$$C_1 + C_2 = A, \quad i(C_1 - C_2) = B,$$

risulterà

$$C_1 e^{x_1+i\beta_1} + C_2 e^{x_1-i\beta_1} = e^{x_1} A \cos \beta x + e^{x_1} B \sin \beta x.$$

Or è sempre possibile far dipendere le costanti A e B da due altre, C e k , in modo che restino soddisfatte le condizioni

$$A = C \cos k, \quad B = -C \sin k,$$

e così si avrà

$$C_1 e^{x_1+i\beta_1} + C_2 e^{x_1-i\beta_1} = C e^{x_1} (\cos \beta x \cos k - \sin \beta x \sin k),$$

e

$$3. \quad (D-a_1)^{-1}(D-a_2)^{-1} X = X_2 + C e^{x_1} \cos(\beta x + k)$$

Esempio 1. L'equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = \cos n x,$$

ovvero

$$(D^2 + a^2) y = \cos n x$$

ci dà

$$y = (D+ai)^{-1}(D-ai)^{-1} \cos n x,$$

in conseguenza

$$y = (D-ai)^{-1} e^{-aix} \int e^{nix} \cos nx \, dx + C_1 e^{-aix},$$

ovvero, trasformando $\cos nx$ in una quantità esponenziale,

$$y = (D-ai)^{-1} e^{-aix} \int e^{nix} \frac{e^{nix} + e^{-nix}}{2} dx + C_1 e^{-aix}.$$

L'integrazione eseguita menerà all'equazione

$$y = (D-ai)^{-1} e^{-aix} \left\{ \frac{e^{(n+a)ix}}{2(n+a)i} - \frac{e^{-(n-a)ix}}{2(n-a)i} \right\} + C_1 e^{-aix},$$

la quale semplificata diviene

$$y = (D-ai)^{-1} \left\{ \frac{e^{nix}}{2(n+a)i} - \frac{e^{-nix}}{2(n-a)i} \right\} + C_1 e^{-aix}.$$

Donde mercè l'integrazione relativa al fattore $(D-ai)^{-1}$ risulta

$$y = e^{aix} \int e^{-aix} \left\{ \frac{e^{nix}}{2(n+a)i} - \frac{e^{-nix}}{2(n-a)i} \right\} dx + C_1 e^{aix} + C_2 e^{-aix},$$

ovvero, eseguendo l'integrazione indicata,

$$y = e^{aix} \left\{ \frac{e^{(n-a)ix}}{-2(n^2-a^2)} + \frac{e^{-(n+a)ix}}{-2(n^2-a^2)} \right\} + C_1 e^{aix} + C_2 e^{-aix}.$$

Attuando in fine la moltiplicazione per e^{aix} ed eliminando le esponenziali immaginarie, si avrà, considerando l'equazione 3,

$$y = -\frac{\cos nx}{n^2-a^2} + C \cos(ax+k).$$

Esempio 2. L'equazione

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6y = \sin nx$$

mena alla relazione

$$(D^2 + 3)(D^2 + 2)y = \sin nx$$

ovvero, ponendo per semplicità di notazione $3=k^2$, $2=n^2$,

$$(D+ki)(D-ki)(D+hi)(D-hi)y = \sin x;$$

donde risulta per y il valore

$$y = (D+ki)^{-1} (D-ki)^{-1} (D+hi)^{-1} (D-hi)^{-1} \sin nx.$$

Perciò, trasformando $\sin nx$ in esponenziali immaginarie, si ottiene rispetto al fattore $(D+ki)^{-1}$ la forma

$$\begin{aligned} (D+ki)^{-1} \sin nx &= e^{-ikx} \int e^{ikx} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} + C_1 e^{-ikx} \\ &= e^{-ikx} \left\{ -\frac{e^{(k+n)ix}}{2(k+n)} + \frac{e^{(k-n)ix}}{2(k-n)} \right\} + C_1 e^{-ikx}, \end{aligned}$$

ovvero, riducendo all'espressione più semplice,

$$(D+ki)^{-1} \sin nx = -\frac{e^{inx}}{2(k+n)} + \frac{e^{-inx}}{2(k-n)} + C_1 e^{-ikx};$$

così il valore di y si trasformerà in

$$y = (D-ki)^{-1} (D+hi)^{-1} (D-hi)^{-1} \left\{ -\frac{e^{inx}}{2(k+n)} + \frac{e^{-inx}}{2(k-n)} \right\} + C_1 e^{-ikx}.$$

Da questa equazione si avrà rispetto al fattore $(D-ik)^{-1}$

$$\begin{aligned} (D-ki)^{-1} \left\{ -\frac{e^{inx}}{2(k+n)} + \frac{e^{-inx}}{2(k-n)} \right\} &= e^{ikx} \int e^{-ikx} \left\{ -\frac{e^{inx}}{2(k+n)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-inx}}{2(k-n)} \right\} dx + C_2 e^{ikx} \\ &= e^{ikx} \frac{e^{-(k-n)ix}}{2(k^2-n^2)i} - \frac{e^{-(k+n)ix}}{2(k^2-n^2)i} + C_2 e^{ikx}, \end{aligned}$$

ovvero più semplicemente

$$(D-ki)^{-1} \left\{ -\frac{e^{inx}}{2(k+n)} + \frac{e^{-inx}}{2(k-n)} \right\} \\ = \frac{e^{inx}}{2(k^2-n^2)i} - \frac{e^{-inx}}{2(k^2-n^2)i} + C_1 e^{ikx};$$

e se si consideri che i primi due termini del 2° membro contengono il seno di nx , si troverà

$$(D+ki)^{-1}(D-ki)^{-1} \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen} nx}{k^2-n^2} + C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} \\ = \frac{\operatorname{sen} nx}{k^2-n^2} + B \{\cos(kx+K)\}.$$

Da ciò si concluderà che dovrà aver luogo l'equazione

$$(D+hi)^{-1}(D-hi)^{-1} \frac{\operatorname{sen} nx}{k^2-n^2} = \frac{\operatorname{sen} nx}{(k^2-n^2)(h^2-n^2)} + A \cos(hx+H),$$

quando si consideri che $B \cos(kx+K)$ non deve sottoporsi ad ulteriore integrazione, e che le costanti arbitrarie K ed H , B ed A sono da determinarsi nel modo indicato dall'equazione 3.

Dopo ciò si avrà per y il valore

$$y = \frac{\operatorname{sen} nx}{(k^2-n^2)(h^2-n^2)} + A \cos(hx+H) + B \cos(kx+K),$$

ovvero, restituendo ad h e k i loro valori,

$$y = \frac{\operatorname{sen} nx}{6-5n^2+n^4} + A \cos(2^{\frac{1}{2}}x+H) + B \cos(3^{\frac{1}{2}}x+K).$$

Nello stesso modo dall'equazione

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - a^4 y = x^3$$

si avrà per y il valore

$$y = -\frac{x^3}{a^4} + C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos(ax+k).$$

Esempio 3. Sia data l'equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = x^n.$$

Ne abbiamo immediatamente per y il valore

$$y = (D^2 + 1)^{-1} x^n.$$

Ed in vece di scomporre $(D^2 + 1)$ in fattori, eseguiamo la soluzione ponendo

$$(1 + D^2)^{-1} = 1 - D^2 + D^4 - D^6 + \dots$$

cosicchè avremo

$$y = x^n - D^2 x^n + D^4 x^n - D^6 x^n + \dots,$$

ovvero, attuando le differenziazioni ed introducendo le costanti $C \cos x + C_1 \sin x$,

$$y = x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \dots + C \cos x + C_1 \sin x,$$

equazione che dà lo stesso valore di y che si sarebbe ottenuto cercandolo col metodo seguito negli esempi precedenti.

Esempio 4. L'equazione

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a^4 y = \cos x$$

assume la forma $(D^2 + a^2)^2 y = \cos x$,

e quindi si ha per y il valore

$$y = (D^2 + a^2)^{-2} \cos x = (D + ia)^{-2} (D - ia)^{-2} \cos x.$$

Or si ha

$$\begin{aligned} (D + ia)^{-2} \cos x &= e^{-iax} \int e^{aix} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx \\ &= e^{-iax} \left\{ \frac{e^{(a+1)ix}}{2(a+1)i} + \frac{e^{(a-1)ix}}{2(a-1)i} + C_1 \right\} dx, \end{aligned}$$

ovvero, eseguendo l'integrazione del 2° membro,

$$(D+ia)^{-2} \cos x = e^{-iax} \left\{ -\frac{e^{(a+1)ix}}{2(a+1)^2} - \frac{e^{(a-1)ix}}{2(a+1)^2} + C_1 x + C \right\}$$

$$= -\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2(a+1)^2} + (C + C_1 x) e^{-aix},$$

ed eliminando gl' immaginari del 1° termine,

$$(D+ia)^{-2} \cos x = -\frac{\cos x}{(a+1)^2} + (C + C_1 x) e^{-aix};$$

quindi

$$y = (D-ai)^{-2} \left\{ -\frac{\cos x}{(a+1)^2} \right\} + (C + C_1 x) e^{-aix}.$$

Or mutando nella penultima equazione

$$a \text{ in } -a, \text{ e } \cos x \text{ in } -\frac{\cos x}{(a+1)^2},$$

ed introducendo questi valori nell'ultima equazione con aver riguardo alle costanti d'integrazione, si avrà

$$y = \frac{\cos x}{(a^2-1)^2} + (B + B_1 x) e^{aix} + (C + C_1 x) e^{-aix},$$

ovvero, eliminando le esponenziali,

$$y = \frac{\cos x}{(a^2-1)^2} + (M + M_1 x) \cos ax + (N + N_1 x) \sin ax,$$

M, M_1, N, N_1 indicando le nuove costanti che risultano nel dedurre le grandezze trigonometriche $\cos ax$ e $\sin ax$ dalle costanti B, B_1, C, C_1 .

Similmente dall'equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{d^4 y}{dx^4} + 5 \frac{d^6 y}{dx^6} - 10 \frac{d^8 y}{dx^8} - 36 \frac{dy}{dx} + 72y = e^{nx}$$

si avrà l'espressione

$$(D-2)^2(D+2)(D^2+9)y = e^{nx},$$

la quale mena all' integrale

$$y = \frac{e^{nx}}{(n-2)^2(n+2)(n^2+9)} + (C + C_1x)e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos(3x+k);$$

e nello stesso modo dall' equazione differenziale

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 15y = x^2$$

si avrà l' integrale

$$y = \frac{x^2}{15} + \frac{2x}{15^2} - \frac{28}{15^3} + (C\cos 2x + C_1\sin 2x)e^x + C_2e^{-x}.$$

107.

Aggiunta.

Dal n° 104 al 106 si è supposto che nell' equazione

$$1. \quad \frac{d^ny}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_ny = X$$

la quantità X fosse una funzione della variabile indipendente x .

Ma la cosa non va sempre così. Che anzi il più delle volte X può disegnare un numero costante A , od anche essere eguale a zero.

1. Poniamo X costante ossia $X = A$, e rappresenti a una delle radici diseguali dell' equazione

$$2. \quad z^n + A_1z^{n-1} + A_2z^{n-2} + \dots + A_{n-1}z + A_n = 0.$$

L' espressione $(D-a)^{-1}X$ si trasformerà in

$$\begin{aligned} (D-a)^{-1}A &= e^{ax} \int Ae^{-ax} dx + Ce^{ax} \\ &= e^{ax} \cdot \frac{A}{a} e^{-ax} + Ce^{ax}, \end{aligned}$$

ovvero

$$3. \quad (D-a)^{-r} A = \frac{\Lambda}{a} + C e^{ax},$$

indipendentemente dall'esser reale o immaginaria la radice indicata da a . Nel qual ultimo caso il numero immaginario e^{ax} può, dietro le osservazioni fatte nel n° 106, trasformarsi in coseno e seno.

Ma se a è radice r^{upla} dell'equazione 2, allora sarà

$$(D-a)^{-r} X = (D-a)^{-r} A = e^{ax} \int^r A e^{-ax} dx^r \\ + (C + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{r-1} x^{r-1}) e^{ax}.$$

Or egli è facile a trovarsi che

$$e^{ax} \int^r A e^{-ax} dx^r = (-1)^{r-1} \frac{\Lambda}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r a^r};$$

sarà dunque

$$4. \quad (D-a)^{-r} A = (-1)^{r-1} \frac{\Lambda}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r a^r} \\ + (C + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{r-1} x^{r-1}) e^{ax}.$$

2. Ponendo $X=0$, si avrà dall'equazione 3 per la radice diseguale a ;

$$5. \quad (D-a)^{-1} 0 = C e^{ax};$$

quindi se a ed a_1 rappresentano due radici immaginarie conjugate dell'equazione 2, sarà

$$(D-a)^{-1} (D-a_1)^{-1} 0 = C e^{ax} + C_1 e^{a_1 x},$$

ovvero, pel n° 106,

$$6. \quad (D-a)^{-1} (D-a_1)^{-1} 0 = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x),$$

facendo $a = \alpha + i\beta$, $a_1 = \alpha - i\beta$.

Supponendo infine che l'equazione 2 ammetta r radici e-

guali ad a , si trova

$$7. (D-a)^{-r} 0 = e^{ax} (C + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{r-1} x^{r-1}).$$

Quindi se l'equazione

$$8. \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_n y = 0$$

ha coefficienti costanti, e radici disuguali $a_1, a_2, \dots, a_n$, il suo integrale generale sarà

$$9. y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} + C_3 e^{a_3 x} + \dots + C_n e^{a_n x}.$$

Introducendo nell'equazione 8 e^{ax} in vece di y , si avrà immediatamente l'equazione 9. Ed in vero, essendo

$$\frac{d^r y}{dx^r} = a^r e^{ax},$$

l'equazione 8 si trasformerà in

$$a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + A_3 a^{n-3} + \dots + A_n = 0.$$

E questa equazione fa conoscere di esser soddisfatta dagli n diversi valori di a , vale a dire a_1, a_2, a_3, a_n .

Essa dimostra ancora di esser soddisfatta dal valore $E e^{ax}$ messo in luogo di y , come ancora da ogni radice a_r sotto la forma $e^{a_r x}$ ed accompagnata dalla costante C_r ; ed infine che qualsiasi somma dei termini

$$C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} + C_3 e^{a_3 x} + \dots$$

sostituita ad y nell'equazione 8, dovrà renderla soddisfatta. Donde segue che il valore di y , indicato nell'equazione 9, dovrà renderla soddisfatta, e che nessun altro valore, composto di maggior numero di termini, potrà fare altrettanto.

Esempio. L'equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0$$

conduce a

$$(D^n + n^n)y = 0, \text{ ovvero } y = (D^n + n^n)^{-1} 0.$$

L'integrale di essa è chiaro per l'equazione 6. Cerchiamone ancora la soluzione per altra via.

La forma del valore di y rimarrà alterata, se lo moltiplicheremo e divideremo per D^n : avremo così

$$y = (1 + n^n D^{-n})^{-1} D^{-n} 0.$$

Or per comprendere il significato della forma $D^{-n} 0$, rammentiamoci che in virtù dell'equ. 5 del n° 103 ha luogo l'equazione identica

$$D^{-n}(u) = \int^n u dx^n + C + C_1 x,$$

C_1 disegnando la costante della prima integrazione e C quella della seconda. Or poniamo $u = 0$, ed avremo

$$D^{-n}(0) = C + C_1 x,$$

ed
$$y = (1 + n^n D^{-n})^{-1} (C + C_1 x),$$

ovvero, trasformando in serie il fattore $(1 + n^n D^{-n})^{-1}$,

$$y = (1 - n^n D^{-n} + n^{2n} D^{-2n} - n^{3n} D^{-3n} + \dots)(C + C_1 x).$$

Rimane soltanto, a fin di semplificare la forma del valore di y , a moltiplicare il primo fattore per C e $C_1 x$, ed a scambiare i simboli $D^{-n}C$, $D^{-1}C$, $D^{-2}C$, . . . $D^{-n}C_1 x$, $D^{-1}C_1 x$, $D^{-2}C_1 x$, . . . nei corrispondenti integrali, che sono della forma

$$C \int^n dx^n, \quad C_1 \int^n dx^n.$$

A ciascuno dei non quali è necessario aggiungere una costante per ogni integrazione, dapoichè una semplice riflessione basta a dimostrare che le somme di queste costanti darebbero una serie eguale alle due di cui si compone y . Mercè queste costanti d'integrazione verranno alterate C e C_1 , ma non già le forme delle serie di cui componesi y .

*

Avendo riguardo a queste considerazioni si avrà per y il valore

$$y = C \left\{ 1 - \frac{n^2 x^2}{1.2} + \frac{n^4 x^4}{1.2.3.4} - \frac{n^6 x^6}{1.2..6} + - \dots \right\} \\ + C_1 \left\{ x - \frac{n^2 x^3}{1.2} + \frac{n^4 x^5}{1.2.3.4} - \frac{n^6 x^7}{1.2..6} + - \dots \right\}.$$

La prima di queste due serie è quella di $\cos nx$ e la seconda è quella di $\frac{1}{n} \sin nx$; sarà dunque

$$y = C \cos nx + \frac{C_1}{n} \sin nx,$$

ovvero $y = C \cos nx + B \sin nx$.

ponendo $B = \frac{C_1}{n}$.

La nostra equazione differenziale può ancora risolversi con un terzo metodo. Si ponga in essa

$$e^{ax} = y;$$

ne otterremo la relazione

$$a^2 + n^2 = 0,$$

ed in conseguenza $a = ni$ ed $a = -ni$. Laonde per le considerazioni fatte verso la fine del nostro n° dovrà y avere il valore

$$y = b e^{ni} + c e^{-ni},$$

ovvero

$$y = b(\cos nx + i \sin nx) + c(\cos nx - i \sin nx),$$

b e c indicando le costanti d'integrazione. Or si faccia

$$b + c = C, \quad i(b - c) = B,$$

e si avrà, come sopra,

$$y = C \cos nx + B \sin nx.$$

Continuazione.

L'espressione $(D-a)^{-1}X$, in conseguenza di speciali proprietà della funzione X , può dare un valore numerico infinitamente grande. Ed in vero, ponendo $X=e^{ax}$ nell'equazione identica

$$1. \quad (D-a)^{-1}X = e^{ax} \int e^{-ax} X dx,$$

ne risulterà

$$(D-a)^{-1}e^{ax} = e^{ax} \int e^{(n-a)x} dx,$$

ossia

$$(D-a)^{-1}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{n-a};$$

quindi nel caso di $n=a$ si avrà l'equazione

$$2. \quad (D-a)^{-1}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a-a} = \infty.$$

Intanto non è giusto conchiuderne che nell'ipotesi di $X=e^{ax}$ la forma $(D-a)^{-1}$ perda la sua validità. È da dirsi piuttosto che l'integrale indicato dalla forma $(D-a)^{-1}e^{ax}$ non possa più presentarsi qual grandezza esponenziale, come avviene nell'ipotesi di $X=e^{ax}$; non altrimenti di quel che avviene all'equazione

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

nell'ipotesi di $m=-1$, e di cui si è trattato nel n° 53.

Or per iscovrire il vero valore dell'integrale dell'equazione 2, qui si dovrà, come in quel luogo, ricorrere alla costante arbitraria, ovvero trasformare la funzione differenziale prima di svolgerne l'integrale. Nel primo caso il valore dell'integrale assumerà la forma $\frac{0}{0}$.

Esempio 1. Sia data l'equazione

$$\frac{dy}{dx} - ay = e^{ax}.$$

Prendendo l'integrale di essa dall'equazione generale

$$\frac{dy}{dx} - ay = e^{ax}$$

e dopo l'integrazione scambiandovi n con a , avremo per y il valore

$$\begin{aligned} y &= (D-a)^{-1} e^{ax} \\ &= e^{ax} \int e^{(a-a)x} dx + Ce^{ax}, \end{aligned}$$

o più semplicemente

$$y = \frac{e^{ax}}{n-a} + Ce^{ax}.$$

Or essendo C una costante arbitraria, potremo darle la forma

$$C_1 = \frac{1}{n-a},$$

dimodochè y apparirà sotto la forma

$$y = \frac{e^{ax} - e^{ax}}{n-a} + C_1 e^{ax}.$$

Ed il primo termine di questo valore diverrà $\frac{0}{0}$ nell'ipotesi di $n=a$. Ma differenziando numeratore e denominatore della frazione rispetto ad n per ottenerne il vero valore, si avrà xe^{ax} nell'ipotesi di $n=a$; quindi risulterà per y il valore

$$y = xe^{ax} + Ce^{ax}.$$

Questo valore potrà aversi ancora immediatamente dall'equazione proposta

$$\frac{dy}{dx} - ay = e^{ax}.$$

Imperocchè prendendo essa la forma

$$(D-a)y = e^{ax},$$

ne risulta $y = (D-a)^{-1} e^{ax},$

ovvero $y = e^{ax} \int e^{-ax} \cdot e^{ax} dx + Ce^{ax},$

o più semplicemente

$$y = xe^{ax} + Ce^{ax}.$$

Esempio 2. Per trattare l'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \cos nx,$$

risolviamo l'equazione più generale

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \cos nx.$$

Questa è stata già considerata nell'esempio 1 n° 106, e si è trovata l'equazione integrale

$$y = \frac{\cos nx}{a^2 - n^2} + C \cos ax + C_1 \sin ax.$$

Or ponendo in questa equazione

$$C = \frac{1}{a^2 - n^2} \text{ in vece di } C,$$

si avrà

$$y = \frac{\cos nx - \cos ax}{a^2 - n^2} + C \cos ax + C_1 \sin ax.$$

Ma nell'ipotesi di $a = n$, si ha

$$\frac{\cos nx - \cos ax}{a^2 - n^2} = \frac{x \sin nx}{2n};$$

sarà dunque

$$y = \frac{x \operatorname{sen} nx}{2n} + C \cos nx + C_1 \operatorname{sen} nx$$

l'equazione integrale di

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = \cos nx.$$

Volendo risolvere direttamente questa equazione, si avrà da essa immediatamente

$$(D^2 + n^2) y = \cos nx,$$

ed
$$y = (D^2 + n^2)^{-1} \cos nx,$$

ovvero, per essere $\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$,

$$y = (D + in)^{-1} e^{inx} \int_0^{-inx} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx,$$

vale a dire

$$y = (D + in)^{-1} e^{inx} \left\{ \frac{x}{2} - \frac{e^{-inx}}{4in} \right\},$$

ovvero
$$y = (D + in)^{-1} \left\{ \frac{x e^{inx}}{2} - \frac{e^{-inx}}{4in} \right\}.$$

Eseguendo la seconda integrazione, ne risulterà

$$y = e^{-inx} \int e^{inx} \left\{ \frac{x e^{inx}}{4in} - \frac{e^{-inx}}{4in} \right\} dx,$$

ovvero
$$y = \frac{x e^{inx} - x e^{-inx}}{4in} + \frac{e^{inx}}{8n^2},$$

ed aggiungendovi le costanti, finora non considerate, si otterrà

$$y = \frac{x(e^{inx} - e^{-inx})}{4in} + \frac{e^{inx}}{8n^2} + C e^{inx} + C_1 e^{-inx}.$$

La prima parte del valore di y contiene $\operatorname{sen} nx$, le tre ri-

manenti possono mutarsi in $A \cos nx + B \sin nx$, quindi

$$y = \frac{x \sin nx}{2n} + A \cos nx + B \sin nx.$$

Esempio 3. I metodi precedenti d'integrazione delle equazioni differenziali lineari con fattori costanti, esposti nei n° da 103 a 108, possono utilizzarsi per trovare i valori di certe serie, facendo in modo che per mezzo di differenziazione o trasformazione della serie, si ottenga quella stessa ch'erasi proposta. Sia p. e. da trovarsi il valore della serie semplice:

$$y = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2...6} + \dots$$

Mercè differenziazione due volte ripetuta si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1 + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2...6} - \dots,$$

vale a dire $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$ ovvero $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.

L'integrale di questa equazione è rappresentato da

$$y = C \cos x + C_1 \sin x,$$

di cui rimane soltanto a determinare le costanti C e C_1 . Or la serie rimanendo inalterata, quando vi si muti x in $-x$, dovrebbe perciò risultare dell'ultima equazione

$$y = C \cos x - C_1 \sin x.$$

Sarà dunque $C_1 = 0$. Inoltre essendo $y = 1$ nell'ipotesi di $x = 0$, dovrà essere $C = 1$. La serie proposta rappresenterà dunque $\cos x$, com'è già noto.

b. Con fattori variabili.

109.

Equazione generale.

La forma generale delle equazioni differenziali lineari con due variabili è

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + P_n y = X,$$

che qui dobbiamo considerare nell'ipotesi che $P_1, P_2, \dots, P_n, X$, siano funzioni di x ed y .

Dimandando l'integrale di questa equazione, noi supponiamo una dipendenza di y dalla variabile indipendente x , espressa in forma di un'equazione

$$y = fx,$$

in modo che y si presenti in forma finita, e sia in conseguenza una funzione algebrica o trascendente. Ma il numero delle funzioni trascendenti conosciute è assai piccolo, e per questo motivo la risolubilità della precedente equazione differenziale sarà sicuramente unita a talune condizioni. E nel tempo stesso si ponga mente alla circostanza, che, come dimostrano i numeri da 104 a 108, la risoluzione delle equazioni con fattori costanti, vale a dire la specie più semplice delle equazioni differenziali lineari, dipende dalla conoscenza della funzione esponenziale e^{ax} ; è quindi verisimile che le equazioni con fattori variabili suppongano funzioni trascendenti superiori, le cui proprietà siano restate finora incognite.

È quindi chiara la ragione, per la quale noi rinunciamo ad una generale risoluzione delle equazioni differenziali lineari i cui termini hanno fattori variabili, e dobbiamo in vece contentarci di risolverne alcune famiglie e

con metodi speciali. A questi metodi si appartengono specialmente quelli che riconducono un'equazione dell'ordine n^{mo} ad n equazioni del 1° ordine coll'ajuto di n integrali particolari, ovvero ad $n - m$ equazioni dell'ordine m^{mo} mercè $n - m$ integrali particolari, o pure che riducono un'equazione con fattori variabili ad un'altra che abbia fattori costanti, o infine che trasformano l'equazione data in due funzioni differenziali, l'una delle quali dipenda dalla sola y e l'altra dalla sola x .

110.

Integrali particolari.

Nell'equazione

$$1. \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = X$$

siano $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n, X$ altrettante funzioni di x . L'integrale di questa equazione dovrà contenere n costanti arbitrarie, essendochè essa è risultata mercè l'eliminazione di altrettante costanti arbitrarie dall'equazione primitiva e dalle prime n derivate. L'integrale

$$2. \quad F(x, y, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0$$

che contiene queste n costanti, quali grandezze arbitrarie, costituisce l'integrale completo dell'equazione 1.

Ma dietro le considerazioni esposte nel n° precedente non sarà sempre possibile dedurre dall'equazione 1 la forma generale dell'equazione 2. Si potrà invece trovare un'equazione

$$3. \quad \varphi(x, y, A_1, A_2) = 0,$$

la quale contenga una od alcune, ma non tutte le n costanti arbitrarie, e che non solamente renda soddisfatta

l'equazione 1, ma sia ancora contenuta nell'equazione 2. L'equazione 3 dicesi un integrale particolare dell'equazione 1.

Tra l'integrale completo e gli n integrali particolari dell'equazione 1 ha luogo la seguente relazione:

L'integrale completo dell'equazione 1 potrà sempre esser trovato, quando si conoscano n integrali particolari di essa $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ che rendano soddisfatta l'equazione:

$$4. \quad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0.$$

Per la dimostrazione di questa proposizione noi scegliamo per brevità l'equazione di 2° ordine

$$5. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = X,$$

stantchè le seguenti considerazioni si lasciano facilmente applicare alle equazioni di qualsiasi ordine; e supponiamo che Y_1, Y_2 , siano due valori speciali di y che rendano soddisfatta l'equazione

$$6. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = 0.$$

L'integrale dell'equazione 5 avrà perciò la forma

$$7. \quad y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2,$$

nella quale A_1 ed A_2 non rappresentano quantità costanti, ma funzioni di x la cui natura è da determinarsi.

Per trovare queste indeterminate funzioni di x , differenziamo l'equazione 7: avremo così

$$8. \quad \frac{dy}{dx} = A_1 \frac{dY_1}{dx} + A_2 \frac{dY_2}{dx} + Y_1 \frac{dA_1}{dx} + Y_2 \frac{dA_2}{dx}.$$

Or essendo arbitrarie le funzioni A_1 ed A_2 , potremo sottoporle alla condizione

$$9. \quad Y_1 \frac{dA_1}{dx} + Y_2 \frac{dA_2}{dx} = 0,$$

mercè la quale l'equazione 8 si trasforma in

$$10. \quad \frac{dy}{dx} = A_1 \frac{dY_1}{dx} + A_2 \frac{dY_2}{dx}$$

La derivata di quest'ultima equazione è

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A_1 \frac{d^2Y_1}{dx^2} + A_2 \frac{d^2Y_2}{dx^2} + \frac{dY_1}{dx} \frac{dA_1}{dx} + \frac{dY_2}{dx} \frac{dA_2}{dx};$$

alla quale si può aggiungere la condizione

$$11. \quad \frac{dY_1}{dx} \frac{dA_1}{dx} + \frac{dY_2}{dx} \frac{dA_2}{dx} = 0,$$

dimodochè la derivata 2^a dell'integrale completo dell'equazione 7 si riduce a

$$12. \quad \frac{d^2y}{dx^2} = A_1 \frac{d^2Y_1}{dx^2} + A_2 \frac{d^2Y_2}{dx^2}.$$

Introducendo nella data equazione differenziale 5 i valori di

$$Y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2},$$

che sono rispettivamente contenuti nelle equazioni 7, 10 e 12, si ha la relazione

$$13. \quad A_1 \left\{ \frac{d^2Y_1}{dx^2} + P_1 \frac{dY_1}{dx} + P_2 Y_1 \right\} + A_2 \left\{ \frac{d^2Y_2}{dx^2} + P_1 \frac{dY_2}{dx} + P_2 Y_2 \right\} \\ + \frac{dY_1}{dx} \frac{dA_1}{dx} + \frac{dY_2}{dx} \frac{dA_2}{dx} = X.$$

Ma poichè i valori Y_1, Y_2 , quali integrali particolari debbono soddisfare l'equazione 6, è necessario che i fattori,

donde sono affetti A_1 ed A_2 , siano nulli; e perciò l'ultima equazione diverrà

$$14. \quad \frac{dY_1}{dx} \frac{dA_1}{dx} + \frac{dY_2}{dx} \frac{dA_2}{dx} = X.$$

Quindi se il valore di y dato dall'equazione

$$y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2$$

deve rappresentare l'integrale completo di

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = X,$$

le due funzioni A_1 , A_2 dovranno esser determinate in modo da soddisfare alle condizioni

$$15. \quad Y_1 \frac{dA_1}{dx} + Y_2 \frac{dA_2}{dx} = 0,$$

$$\frac{dY_1}{dx} \frac{dA_1}{dx} + \frac{dY_2}{dx} \frac{dA_2}{dx} = X.$$

Ciò è sempre possibile, poichè le quantità $\frac{dA_1}{dx}$, $\frac{dA_2}{dx}$ si possono coi metodi algebrici svolgere dalle equazioni 15, e si avranno equazioni della forma

$$\frac{dA_1}{dx} = V_1, \quad \frac{dA_2}{dx} = V_2,$$

V_1 e V_2 disegnando funzioni di x ; quindi

$$A_1 = \int V_1 dx + C_1, \quad A_2 = \int V_2 dx + C_2,$$

e con ciò

$$y = Y_1(\int V_1 dx + C_1) + Y_2(\int V_2 dx + C_2)$$

sarà l'integrale completo dell'equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = X.$$



Da tutto ciò egli è facile rilevare le condizioni cui dovranno soddisfare le funzioni $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, se l'equazione

$$y = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + \dots + A_n Y_n$$

debba soddisfare all'equazione 1, e se $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ siano integrali particolari della stessa.

È facile ancora a comprendersi che queste condizioni rimarranno valide nel caso che i fattori $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ dell'equazione 1 disegnino numeri costanti.

Esempio 1. Nell'equazione generale del 2° ordine

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = X$$

disegnino P_1 e P_2 dei numeri costanti, e sia X una funzione di x .

Le radici dell'equazione

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + P_1 \frac{dz}{dx} + P_2 z = 0$$

sono da cercarsi pel n° 107 nell'equazione quadratica

$$z^2 + P_1 z + P_2 = 0;$$

ed indicando con α_1 ed α_2 queste radici, l'integrale completo dell'equazione proposta sarà espresso da

$$y = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x};$$

ed in conseguenza $e^{\alpha_1 x}$ ed $e^{\alpha_2 x}$ ne saranno integrali particolari.

Per le cose anzidette le costanti indeterminate A_1 ed A_2 dovranno soddisfare le due condizioni

$$\frac{dA_1}{dx} e^{\alpha_1 x} + \frac{dA_2}{dx} e^{\alpha_2 x} = 0,$$

$$\frac{dA_1}{dx} \alpha_1 e^{\alpha_1 x} + \frac{dA_2}{dx} \alpha_2 e^{\alpha_2 x} = X,$$

le quali per mezzo di eliminazione conducono alle equazioni

$$\frac{dA_1}{dx} = -\frac{Xe^{-\alpha_1 x}}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad \frac{dA_2}{dx} = \frac{Xe^{-\alpha_2 x}}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

ovvero

$$A_1 = -\frac{C_1 + \int Xe^{-\alpha_1 x} dx}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad A_2 = \frac{C_2 + \int Xe^{-\alpha_2 x} dx}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

C_1 e C_2 indicando le costanti d'integrazione. È dunque

$$y = -e^{\alpha_1 x} \frac{C_1 + \int Xe^{-\alpha_1 x} dx}{\alpha_2 - \alpha_1} + e^{\alpha_2 x} \frac{C_2 + \int Xe^{-\alpha_2 x} dx}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Se poi le radici dell'equazione

$$z^2 + P_1 z + P_2 = 0$$

fossero immaginarie e quindi comprese nella forma $z = \alpha \pm i\beta$, l'integrale completo si presenterebbe sotto la forma

$$y = A_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + A_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Così le quantità A_1 ed A_2 saranno sottoposte alle condizioni

$$\frac{dA_1}{dx} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{dA_2}{dx} e^{\alpha x} \sin \beta x = 0,$$

$$\frac{dA_1}{dx} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + \frac{dA_2}{dx} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) = Xe^{-\alpha x};$$

e per determinarle si avranno le equazioni

$$\frac{dA_1}{dx} = -\frac{Xe^{-\alpha x} \sin \beta x}{\beta}, \quad \frac{dA_2}{dx} = \frac{Xe^{-\alpha x} \cos \beta x}{\beta},$$

che integrate ci daranno

$$A_1 = \frac{C_1 - \int Xe^{-\alpha x} \sin \beta x dx}{\beta}, \quad A_2 = \frac{C_2 - \int Xe^{-\alpha x} \cos \beta x dx}{\beta}.$$

Pel caso in fine che le radici α_2 ed α_1 dell'equazione

$$z^2 + P_1 z + P_2 = 0$$

fossero eguali, il suindicato valore di y , cioè

$$y = -e^{\alpha_1 x} \frac{C_1 \int X e^{-\alpha_1 x} dx}{\alpha_2 - \alpha_1} + e^{\alpha_2 x} \frac{C_2 + \int X e^{-\alpha_2 x} dx}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

assumerebbe la forma $\frac{0}{0}$, il cui vero valore, com'è noto, si troverà differenziando numeratore e denominatore rispetto ad α_2 o α_1 . Differenziando rispetto ad α_2 , e ponendo $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$, si troverà

$$y = -e^{\alpha x} \int x X e^{-\alpha x} dx + x e^{\alpha x} (C_2 + \int X e^{-\alpha x} dx),$$

ovvero, aggiungendo anche una costante al primo integrale,

$$y = -e^{\alpha x} (C_1 + \int x X e^{-\alpha x} dx) + x e^{\alpha x} (C_2 + \int X e^{-\alpha x} dx).$$

Del resto questi valori di y coincidono con quelli che facilmente si deducono dalle equazioni generali dei n° 104, 105 e 106.

Esempio 2. Dell'equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 = X,$$

nella quale P_1 e P_2 disegnano numeri costanti, ovvero funzioni di x , sia noto un integrale particolare, cioè

$$y = A e^{\alpha x};$$

mercè la differenziazione di questa equazione si avrà per la determinazione di A

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A e^{\alpha x} + \frac{dA}{dx} e^{\alpha x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha^2 A e^{\alpha x} + 2\alpha \frac{dA}{dx} e^{\alpha x} + \frac{d^2 A}{dx^2} e^{\alpha x};$$

FRANKE CALC. INTEG.

e l'equazione proposta prenderà in conseguenza la forma

$$\frac{d^2 A}{dx^2} e^{\alpha x} + 2\alpha \frac{dA}{dx} e^{\alpha x} + \alpha^2 A e^{\alpha x} \\ + P_1 \frac{dA}{dx} e^{\alpha x} + \alpha P_1 A e^{\alpha x} + P_2 A e^{\alpha x} = X.$$

E poichè in virtù dell'integrale particolare dato è

$$\alpha^2 A e^{\alpha x} + \alpha P_1 A e^{\alpha x} + P_2 A e^{\alpha x} = 0,$$

l'equazione precedente prenderà la forma più semplice

$$\frac{d^2 A}{dx^2} e^{\alpha x} + 2\alpha \frac{dA}{dx} e^{\alpha x} + P_2 A e^{\alpha x} = X,$$

nella quale ponendo

$$\frac{dA}{dx} = C, \text{ quindi } \frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{dC}{dx},$$

si ha
$$\frac{dC}{dx} + 2\alpha C = X e^{-\alpha x} - P_2,$$

che risolta menerà all'integrale generale.

Esempio 3. Dell'equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

sia noto l'integrale particolare $y = \frac{\text{sen } nx}{x}$. Per iscovrire l'integrale completo pongasi

$$y = A \frac{\text{sen } nx}{x};$$

mercè differenziazione si avrà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dA}{dx} \frac{\text{sen } nx}{x} + \frac{A n \cos nx}{x} - \frac{A \text{sen } nx}{x^2}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \frac{\text{sen } nx}{x} + 2 \frac{dA}{dx} \left\{ \frac{n \cos nx}{x} - \frac{\text{sen } nx}{x^2} \right\} \\ + A \left\{ -\frac{n^2 \text{sen } nx}{x} - \frac{2n \cos nx}{x^2} + \frac{2 \text{sen } nx}{x^3} \right\};$$

e se questi valori s'introducano nella data equazione differenziale, ne risulterà dietro facili riduzioni

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + 2n \frac{dA}{dx} \cot g nx = 0.$$

Ponendovi $\frac{dA}{dx} = C$, quindi $\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{dC}{dx}$,

si ha $\frac{dC}{dx} + 2n C \cot g nx = 0$,

ovvero $\frac{dC}{C} + 2n \cot g nx dx = 0$,

donde per integrazione

$$\log C + 2 \log \operatorname{sen} nx = \log C_1, \text{ ovvero } C = \frac{C_1}{\operatorname{sen}^2 nx};$$

dimodochè sarà $A = C' + C'' \cot g nx$

mercè le costanti arbitrarie C' e C'' ; e quindi si perverrà all'integrale generale

$$y = \frac{C' \operatorname{sen} nx}{x} + \frac{C'' \cos nx}{x}.$$

111.

Equazioni del primo ordine.

La forma generale delle equazioni lineari del primo ordine è

$$1. \quad \frac{dy}{dx} + Py = X.$$

nella quale supponiamo che P ed X siano funzioni di x .

Introducendo in questa equazione la nuova variabile t , definita dalla relazione

$$t = \int P dx, \text{ ovvero } dt = P dx, *$$

ne risulterà

$$2. \quad \frac{dy}{dt} + y = \frac{x}{p},$$

equazione contenente fattori costanti nel 2° membro. Il suo integrale è pel n° 104

$$y = e^{-t} \int \frac{x}{p} e^t dt + Ce^{-t},$$

ovvero, restituendo il valore di t

$$3. \quad y = e^{-\int p dx} \int dx X e^{\int p dx} + Ce^{-\int p dx}.$$

Esempio 1. Nell'equazione

$$(1-x^2) \frac{dy}{dx} + xy = ax$$

si ha $P dx = \frac{x dx}{1-x^2}$, quindi $\int P dx = -\frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

e perciò

$$y = e^{K(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}} \int \frac{ax dx e^{-\frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}}{1-x^2} + Ce^{\frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}},$$

ovvero

$$y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} a \int x dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + C (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Or si ha $\int x dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}};$

quindi $y = a + C (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$

Nella stessa guisa dall'equazione

$$dy + y dx = ax^2 dx$$

risulta l'integrale

$$y = Ce^{-x} + x (x^2 - 3x^2 + 6x - 6),$$

già trovato col metodo di risoluzione delle equazioni con fattori costanti, come dimostra il simile esempio 1 del n° 104.

Esempio 2. Sia data l'equazione

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + ny = a(1+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

ovvero
$$\frac{dy}{dx} + \frac{ny}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = a.$$

Abbiamo qui

$$Pdx = \frac{ndx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ quindi } \int Pdx = l[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x]^n.$$

Laonde scambiando $(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x$ con z , si avrà per y l'equazione

$$y = az^{-n} \int z^n dx + Cz^{-n},$$

della quale espressione rimane a determinare l'integrale di $z^n dx$. Da

$$z = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x$$

risulta

$$dz = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx, \text{ cioè } dz = \frac{z dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ovvero
$$dx = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z} = \frac{z-x}{z} dz,$$

cosicchè si avrà

$$\int z^n dx = \int z^n dz - \int xz^{n-1} dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} - \int xz^{n-1} dz.$$

Ma
$$\int xz^{n-1} dz = \frac{xz^n}{n} - \frac{1}{n} \int z^n dx;$$

dunque
$$\int z^n dx = \frac{z^{n+1}}{n+1} - \frac{xz^n}{n} + \frac{1}{n} \int z^n dx,$$

ovvero

$$\int z^n dx = \frac{nz^{n+1}}{n^2-1} - \frac{xz^n}{n-1} = \frac{z^n}{n-1} \left\{ \frac{nz}{n+1} - x \right\}.$$

Quindi si ha per y il valore

$$y = \frac{a}{n-1} \left\{ \frac{nx}{n+1} - x \right\} + Cz^{-n},$$

ovvero

$$y = \frac{a}{n-1} \left\{ z - x - \frac{x}{n+1} \right\} + Cz^{-n},$$

e restituendo a z il suo valore ,

$$y = \frac{a}{n-1} (1+x^n)^{\frac{1}{n}} - \frac{a}{n^2-1} [(1+x^n)^{\frac{1}{n}} + x] + C[(1+x^n)^{\frac{1}{n}} - x]^n$$

Similmente dell' equazione

$$\frac{dy}{dx} + ny = a[1+x^n+x(1+x^n)^{\frac{1}{n}}]$$

si avrà la soluzione

$$y = \frac{1}{2(n+1)} [(1+x^n)^{\frac{1}{n}} + x] + \frac{1}{2(n-1)} [(1+x^n)^{\frac{1}{n}} - x] + C[(1+x^n)^{\frac{1}{n}} - x]^n.$$

Esempio 3. L' equazione

$$\frac{dy}{dx} + \frac{ay}{1-x^2} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

ci dà $Pdx = \frac{adx}{1-x^2}$, ed $\int Pdx = \frac{a}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Ponendovi $\frac{1+x}{1-x} = z$, si avrà per y il valore

$$y = z^{-\frac{a}{2}} \int z^{\frac{a}{2}} \cdot \frac{1+x}{(1-x)^2} dx + Cz^{-\frac{a}{2}}.$$

Ma si ha tosto

$$d \frac{1+x}{1-x} = \frac{2dx}{(1-x)^2} = dz ,$$

ovvero $\frac{1}{2} z dz = \frac{1+x}{(1-x)^2} dx$;

ed in conseguenza

$$\int z^{\frac{a}{2}} \cdot \frac{1+x}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{2} \int z^{\frac{a+2}{2}} dz = \frac{z^{\frac{a+4}{2}}}{\frac{a+4}{2}};$$

quindi
$$y = \frac{z^{\frac{a}{2}}}{a+4} + Cz^{-\frac{a}{2}},$$

ovvero
$$y = \frac{1}{a+4} \left\{ \frac{1+x}{1-x} \right\}^{\frac{a}{2}} + C \left\{ \frac{1-x}{1+x} \right\}^{\frac{a}{2}}.$$

Similmente dall'equazione

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} - ny = x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

si avrà
$$y = - \frac{nx(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + 1-2x^2}{4+n^2} + Ce^{\arcsen x}.$$

112.

Continuazione.

Alla forma dell'equazione 1 del n° precedente si possono ridurre altre famiglie di equazioni del 1° ordine. Primieramente si appartiene alla stessa l'equazione di Bernoulli

1.
$$\frac{dy}{dx} + Py = Xy^{n+1},$$

nella quale, del pari che nel n° 111, P ed X disegnano funzioni di x . Introducendo in questa equazione una nuova variabile u in vece di y^{-n} , si avrà

$$-ny^{-n-1}dy = du, \text{ e } dy = -\frac{1}{n}y^{n+1}du;$$

quindi l'equazione 1 si trasforma in

$$\frac{du}{dx} - nPu = -nX,$$

il cui integrale pel n° precedente è

$$2. \quad u = y^{-n} = -n e^{n \int P dx} \int e^{-n \int P dx} X dx + C e^{n \int P dx}.$$

Esempio 1. Pongasi $u = y^{-1}$ nell'equazione

$$dy + y dx = xy^2 dx,$$

dimodochè sarà $du = -y^{-2} dy$, ovvero $dy = -y^2 du$; si avrà così

$$\frac{du}{dx} - u = -x,$$

ed
$$u = -x \int e^{-x} dx + C e^x,$$

ovvero,
$$u = x + 1 + C e^x = \frac{1}{y}.$$

Esempio 2. L'equazione

$$dy + \frac{xy dx}{1-x^2} = xy^{\frac{1}{2}} dx,$$

ponendovi $u = y^{\frac{1}{2}}$, quindi $du = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy$ ovvero $dy = 2y^{\frac{1}{2}} du$, si trasforma in

$$\frac{du}{dx} + \frac{xu}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2},$$

cosicchè sarà

$$\int P dx = \int \frac{x dx}{2(1-x^2)} = -\frac{1}{4} \ln(1-x^2),$$

ed

$$u = y^{\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{\frac{1}{4}} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{2} dx + C(1-x^2)^{\frac{1}{4}},$$

ovvero
$$u = y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} (1-x^2) + C(1-x^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Esempio 3. Dall'equazione

$$aydy - by^2dx = cxdx$$

si ha immediatamente

$$dy - \frac{b}{a} ydx = \frac{cx}{ay} dx,$$

e per $u = y^a$, donde $dy = \frac{du}{2y}$, si ottiene

$$\frac{du}{dx} - \frac{2bu}{a} = \frac{2cx}{a},$$

$$\text{quindi } u = y^a = \frac{c}{a} e^{\frac{2bx}{a}} \int e^{-\frac{2bx}{a}} 2x dx + Ce^{\frac{2bx}{a}},$$

$$\text{ovvero } y^a = -\frac{cx}{b} - \frac{ac}{2b^2} + Ce^{\frac{2bx}{a}}$$

Esempio 4.

1. Introducasi nell'equazione

$$xy^2dy + y^2dx = \frac{a^2dx}{x}.$$

la relazione $u = y^3$, sarà

$$u = y^3 = \frac{3a^2}{2x} + \frac{C}{x^2}.$$

2. Facciasi $u = y^3$ in

$$ydy - \frac{ay^2dx}{x^2} = \frac{b}{x^2},$$

$$\text{si avrà } u = y^3 = \frac{b}{2a^2} - \frac{b}{ax} + Ce^{-\frac{2a}{x}}.$$

3. Facendo $x = \frac{1}{u}$, l'equazione

$$dx - xydy = x^2y^2dy$$

$$\text{trasformasi in } \frac{du}{dy} + yu = -y^3,$$

a cui appartiene l'integrale

$$\frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

11°.

Eliminazione dei fattori variabili.

Nel n° 111 sono state indicate le condizioni per le quali un'equazione differenziale lineare con fattori variabili potrà ridursi ad un'altra di ordine inferiore. Or se per le date condizioni sia possibile dedurre dall'equazione data un'equazione differenziale di 1° ordine, allora i n° 111 e 112 somministreranno i caratteri che dovrà possedere la nuova equazione per esser integrabile.

Ma non ogni equazione differenziale di 1° ordine possiede questi caratteri, che anzi non è sempre possibile ridurre una data equazione differenziale ad una tale di 1° ordine. In questo sfavorevole caso non altro rimane che a far dipendere la variabile indipendente da una nuova variabile da introdursi. E ciò potendo avvenire in modo che i fattori variabili dei singoli termini divengano costanti, allora l'equazione diverrà integrabile. Alcuni esempi verranno a mettere in chiaro il processo, da dirigersi secondo la forma dell'equazione, e che non può esser sommerso a veruna legge generale.

Esempio 1. Sia data l'equazione

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^m.$$

Facciasi y dipendente da un'altra variabile t , per la quale abbia luogo la relazione $x = e^t$; così in forza delle equazioni 1 e 2 del n° 14 si avrà;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} : e^t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \left\{ \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \right\} : \left\{ \frac{dx}{dt} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} e^t - \frac{dy}{dt} e^t \right\} : e^{2t}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right\} : e^{2t}.$$

e così l'equazione data si trasformerà nella seguente

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = e^{2t}.$$

Ma pel modo di notazione mentovato nel n° 104, questa equazione assumerà la forma

$$(D^2 - 1)y = e^{2t}, \text{ ovvero } y = (D^2 - 1)^{-1} e^{2t},$$

alla quale appartiene l'integrale

$$y = \frac{e^{2t}}{m^2 - 1} + Ce^t + C_1 e^{-t},$$

vale a dire, ripristinandovi la x ,

$$y = \frac{x^m}{m^2 - 1} + Cx + \frac{C_1}{x}.$$

Nello stesso modo dall'equazione

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = (1-x^2)^{-2},$$

ponendovi $x = e^t$, si avrà

$$(D+1)^2 y = (1-e^t)^{-2},$$

ed

$$y = \frac{1}{x} \ln \frac{x}{1-x} + \frac{1}{x} (C + C_1 \ln x).$$

Esempio 2. Nell'equazione

$$(1+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (1+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3(1+x) \frac{dy}{dx} - 8y = \frac{7x}{1+x}$$

introducendo $1+x=e^t$, quindi $t=l(1+x)$, $dt = \frac{dx}{1+x}$,
 si avrà pel n° citato nel precedente esempio

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y \right\} : e^{2t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right\} : e^{2t},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : e^t.$$

Così l'equazione proposta si trasformerà nell'altra:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + 4y - 8y = e^{-\frac{t}{2}}(e^t - 1),$$

la quale prenderà in conseguenza la forma

$$(D-2)(D+2i)(D-2i)y = e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}},$$

donde si otterrà l'integrale

$$y = -\frac{8e^{\frac{t}{2}}}{51} + \frac{8e^{-\frac{t}{2}}}{83} + Ce^{2t} + C_1e^{2it} + C_2e^{-2it},$$

ovvero, restituendo x ed eliminando gl'immaginarii,

$$y = \frac{8}{83} \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{8}{51} (1+x)^{\frac{1}{2}} + C(1+x)^2 \\ + A_1 \cos l(1+x)^2 + A_2 \sin l(1+x)^2.$$

La forma più generale dell'equazione differenziale

$$(a+bx)^n \frac{d^2y}{dx^2} + A_1 (a+bx)^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots \\ + A_{n-1} (a+bx) \frac{dy}{dx} + A_n y = X,$$

nella quale X dinota una funzione di x ed $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ sono numeri costanti, si risolverà in modo egualmente

facile che le equazioni speciali di questo numero e del precedente, tostochè vi si ponga $a + b x = e^t$.

Esempio 3. Sia data l'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0,$$

che moltiplicata per x diviene

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - a^2 xy = 0.$$

Ma i due primi termini di questa nuova equazione risultano dalla differenziazione di xy rispetto ad x ; imperocchè si ha

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2} = x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx}.$$

Con ciò l'equazione proposta prenderà la forma

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2} - a^2(xy) = 0,$$

ovvero scrivendo z in vece di xy ,

$$\frac{d^2z}{dx^2} - a^2 z = 0.$$

L'integrale di questa equazione è pel n° 107:

$$z = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax},$$

ovvero

$$y = \frac{1}{x} (C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}).$$

Esempio. 4. L'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left\{ n^2 - \frac{2}{x^2} \right\} y = 0$$

diviene integrabile, considerando che

$$\frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = D \left\{ \frac{2y}{x} \right\},$$

e che in conseguenza

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = D \left\{ \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} \right\}.$$

Perciò l'equazione proposta si trasforma in

$$D \left\{ \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} \right\} + n^2 y = 0,$$

ovvero in
$$D \left\{ D + \frac{2}{x} \right\} y + n^2 y = 0.$$

Or integrando questa equazione, o che vale lo stesso, moltiplicandola per D^{-1} , ne risulta

$$\left\{ D + \frac{2}{x} \right\} y + n^2 D^{-1} y = C,$$

che moltiplicata poi per x ci dà

$$(xD + 2)y + n^2 x D^{-1} y = Cx.$$

Ma la forma $x D^{-1} y$, o l'equivalente forma $x \int y dx$ è strettamente congiunta alla forma $(xD + 2)y$, imperocchè differenziando due volte la prima rispetto ad x , si ha

$$D^2 (x \int y dx) = y + y + x \frac{dy}{dx} = (xD + 2)y.$$

Se quindi si faccia $z = x \int y dx$, non rimarrà che ad integrare l'equazione

$$\frac{d^2z}{dx^2} + n^2 z = Cx, \text{ ovvero } (D^2 + n^2) z = Cx,$$

in cui si è trasformata l'equazione precedente. Or l'ultima per l'esempio 1 del n° 106 ci dà

$$z = \frac{Cx}{n^2} + C_1 \cos(nx + k);$$

e per ritornare ad y mercè questo valore di z osserviamo

che da $z = x \int y dx$ risulta

$$\frac{z}{x} = \int y dx, \text{ e } D\left\{\frac{z}{x}\right\} = y.$$

Ma
$$D\left\{\frac{z}{x}\right\} = \left\{x \frac{dz}{dx} - z\right\} : x^2,$$

e così mercè il calcolo di questo valore si avrà in fine

$$y = -\frac{C_1 n}{x} \operatorname{sen}(nx + k) - \frac{C_2}{x^2} \cos(nx + k).$$

114.

Separazione delle variabili.

Se nell'equazione differenziale

1.
$$P dx + Q dy = 0$$

P e Q disegnino funzioni omogenee di x ed y del grado n^{esimo} , si potranno separare in modo le due variabili x ed y , che il primo membro dell'equazione 1 risulti composto di due parti, di cui la prima dipenda dalla sola x e l'altra da una nuova variabile. Ed in vero se P e Q sono omogenee al medesimo grado, si potrà sempre porre

$$P = x^n \varphi\left\{\frac{y}{x}\right\}, \quad Q = x^n \psi\left\{\frac{y}{x}\right\}.$$

dimodochè, introducendo questi valori nell'equazione 1, ne risulta

$$\varphi\left\{\frac{y}{x}\right\} dx + \psi\left\{\frac{y}{x}\right\} dy = 0.$$

Or indicando con z una nuova funzione di x , tale che sia $y = zx$, avremo $dy = z dx + x dz$; quindi l'ultima equazione diverrà

$$[\varphi z + z \psi z] dx + x \psi z dz = 0,$$

che divisa per $x(\varphi z + z\psi z)$ si trasforma in

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi z dz}{\varphi z + z\psi z} = 0 ;$$

e così le due variabili x e z si mostrano separate.

Esempio 1. L'equazione

$$(x^2y + y^3)dx = 3xy^2dy$$

è omogenea rispetto ai fattori di dx e dy . Ponendovi $y = zx$ e riducendo si avrà

$$(1 - 2z^2)dx = 3xzdz , \text{ ovvero } \frac{dx}{x} = \frac{3zdz}{1 - 2z^2} ,$$

il cui integrale è

$$\log x = -\frac{3}{4} \log(1 - 2z^2) , \text{ ovvero } c^4 x^4 = (1 - 2z^2)^{-3} ,$$

indicando con lc la costante dell' integrazione. Introducendovi in fine il valore di z , si otterrà

$$c^4 x^4 = \frac{x^4}{(x^2 - 2y^2)^3} ,$$

ovvero , se scrivasi C in vece di c^{-4} ,

$$Cx^2 = (x^2 - 2y^2)^3 .$$

Similmente per $y = zx$, si avrà da

$$xdy - ydx = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

l'equazione
$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 ,$$

donde risulta l'integrale

$$x = C[z + (1+z^2)^{\frac{1}{2}}] = (2Cy + C^2)^{\frac{1}{2}}$$

Nello stesso modo l'equazione

$$y^2 dx + (xy + x^2) dy = 0$$

mercè la relazione $x = yz$ divieno

$$\frac{dy}{y} + \frac{dz}{2z + z^2} = 0,$$

il cui integrale è

$$Cy = \left\{ \frac{2y + x}{x} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

e mercè la stessa relazione $y = zx$ dall'equazione

$$x dx + y dy = n (x dy - y dx)$$

si avrà l'integrale

$$\log(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = n \arctg \frac{y}{x} + C.$$

Esempio 2. Nell'equazione

$$xy dy - y^2 dx - (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx$$

fatta $y = zx$, quindi $dy = x dz + z dx$, si avrà in conseguenza di riduzione

$$\frac{dx}{x} = \frac{ze^z dz}{(1+z)^2}, \text{ donde } \log x = \int \frac{ze^z dz}{(1+z)^2}.$$

Ma l'integrale del 2° membro è noto per l'esempio 4 del n° 104, cioè

$$\int \frac{ze^z dz}{(1+z)^2} = \frac{e^z}{1+z};$$

quindi

$$\log z = \frac{e^z}{1+z},$$

ovvero, restituendo il valore di z ,

$$(x+y) \log x = x e^{\frac{y}{x}}.$$

Nello stesso modo dall'equazione

$$y' dy + 3xy' dx + 2x' dx = 0$$

si ha l'integrale

$$y^2 + 2x^2 = c (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}};$$

dall'equazione $(1+x^2) dy - xy dx = ax dx$

si avrà similmente l'integrale

$$y - ax = c \sqrt{1+x^2};$$

e da $(x^2 + xy - 2y^2) dx + (y^2 - 3x^2) dy = 0$

risulta l'integrale

$$\ln x + \int \frac{(x^2-3)dx}{x^3-2x^2-2x+1} = \ln C,$$

ovvero

$$\frac{(x^3-3x^2y+xy^2)^{\frac{1}{10}}}{(x+y)^{\frac{2}{5}}} \cdot \left\{ \frac{2y-(3-\sqrt{5})x}{2y-(3+\sqrt{5})x} \right\}^{\frac{1}{2\sqrt{5}}} = C.$$

Esempio 3. L'equazione

$$x dx + y dy = ay dx,$$

ponendovi $y = xz$, diviene

$$\frac{dx}{x} + \frac{z dz}{1-az+z^2} = 0,$$

od anche

$$\frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \frac{(2z-a)dz}{1-az+z^2} + \frac{1}{2} \frac{a dz}{1-az+z^2} = 0;$$

e quindi

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln(1-az+z^2) + \frac{a}{2} \int \frac{dz}{1-az+z^2} = 0.$$

E questo integrale otterrà valori diversi, come dimostrano

le equazioni 9, 10, 11 del n° 55, secondochè sarà $a > 2$, $a < 2$, $a = 2$.

Quando sia $a > 2$, il trinomio $1 - az + z^2$ potrà risolversi in due fattori della forma $(z - k)(z - k^{-1})$, e sarà

$$\int \frac{adz}{1-az+z^2} = \frac{k^2+1}{k^2-1} \int \frac{z-k}{z-k^{-1}};$$

quindi

$$\int x + \frac{1}{2} \int (1-az+z^2) + \frac{1}{2} \frac{k^2+1}{k^2-1} \int \frac{z-k}{z-k^{-1}} = C,$$

e se vi s'introduce il valore di z ,

$$\int (x^2 - axy + y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{k^2+1}{k^2-1} \int \frac{ky - k^2x}{ky - x} = C.$$

Se poi $a < 2$, allora ponendo $a = 2 \cos \alpha$, si avrà quanto all'integrale precedente

$$\int \frac{dz}{1-2 \cos \alpha z + z^2} = \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arctg} \frac{z \sin \alpha}{1-z \cos \alpha},$$

ed in conseguenza

$$\int (x^2 - axy + y^2)^{\frac{1}{2}} + \cot \alpha \operatorname{arctg} \frac{y \sin \alpha}{x - y \cos \alpha} = C.$$

Sia in fine $a = 2$; sarà

$$\int \frac{dz}{(1-z)^2} = - \frac{1}{1-z},$$

e l'integrale richiesto sarà

$$\int (x-y) = C - \frac{x}{x-y}.$$

Esempio 4. L'equazione

$$(mx + ny + p) dx + (ax + by + c) dy = 0$$

non è omogenea rispetto ad x ed y ; ma intanto è possi-

bile trasformarla in un'altra omogenea. Imperocchè ponendo

$$mx + ny + p = u, \quad ax + by + c = v,$$

quindi

$$mdx + ndy = du, \quad adx + bdy = dv,$$

si avranno di dx e dy i valori

$$dx = \frac{n dv - b du}{an - bm}, \quad dy = \frac{a du - m dv}{an - bm};$$

così l'equazione proposta si trasforma in

$$(nu - mv) dv + (av - bu) du = 0,$$

equazione omogenea rispetto ad u e v , e che in conseguenza potrà integrarsi.

Ponendovi $v = uy$ si perviene all'equazione

$$\frac{dy}{b + (a+n)y + my^2} = \frac{du}{nu - mu^2}.$$

Se nell'equazione proposta fosse $na = mb$, i precedenti valori di dx e dy in funzione di u e v diverrebbero infiniti. L'esposto metodo di trasformazione non è dunque da usarsi. Ma non è neppur necessario alla separazione delle variabili. Ed in vero, eliminando m dalla proposta mercè la relazione $na = mb$, essa prenderà la forma

$$b(c dy + p dx) + (ax + by)(b dy + n dx) = 0,$$

nella quale ponendo $ax + by = z$, ed in conseguenza $adx + bdy = dz$, si ha

$$[ac - dp + (a-n)z] dx = (c+z) dz,$$

equazione che rende separate le variabili.

Equazione di Riccati.

Si può non di rado rendere omogenea e quindi integrabile un'equazione differenziale, come già si è visto nell'esempio 4 del n° precedente. A questa specie appartiene l'equazione

$$1. \quad dy + b^*y^*dx = a^*x^m dx,$$

data la prima volta da Riccati.

Escludiamone primieramente il caso di $m = 0$, poichè in esso le variabili sarebbero immediatamente separate, essendochè da

$$dy + b^*y^*dx = a^*dx$$

risulta
$$dx = \frac{dy}{a^* - b^*y^*},$$

il cui integrale trovasi nella relazione

$$Ce^{aby} = \frac{a - by}{a + by}.$$

L'equazione 1. sotto certe condizioni potrà rendersi omogenea per ogni valore di m , diverso da zero.

1. Facendo $y = z^r$ nell'equazione 1, questa diverrà

$$2. \quad rz^{r-1}dz + b^*z^{ar}dx = a^*x^m dx.$$

E perchè ciò renda omogenea l'equazione, è necessario e sufficiente che sia

$$r - 1 = 2r = m, \text{ e quindi } m = -2, r = -1;$$

dimodochè resta semplicemente a risolvere l'equazione

$$-\frac{dz}{z^2} + b^* \frac{dx}{x^2} = a^* \frac{dx}{x^2}.$$

Il cui integrale si troverà, come si è visto nel n° preceden-

te, essendo omogenea l'equazione rispetto ad x e z , e propriamente del 2° grado.

2. Non essendo $m=2$, si ponga

$$y = Ax^p + x^q z :$$

con ciò l'equazione 1 prenderà la forma

$$3. \quad x^q dz + (qx^{q-1} + 2b^* Ax^{p+q} + b^* x^{2q}) z dx \\ + (pAx^{p-1} + b^* A^* x^{q+p}) dx = a^* x^m dx.$$

La determinazione delle tre costanti arbitrarie A , p , q potrà servire a rendere omogenea l'equazione 3, ed a ridurla a tre termini. La qual cosa sarà possibile, quando nel 1° membro spariscano e il terzo termine e la somma $qx^{q-1} + 2b^* Ax^{p+q}$ del secondo. Or perchè sia

$$pAx^{p-1} + b^* A^* x^{q+p} = 0,$$

basterà che si abbia

$$p-1 = 2p \text{ e } pA + b^* A^* = 0;$$

e se dovrà essere

$$qx^{q-1} + 2b^* Ax^{p+q} = 0,$$

è d'uopo che siano

$$q-1 = p+q \text{ e } q + 2b^* A = 0.$$

Le condizioni

$$p-1 = 2p \text{ e } q-1 = p+q$$

sono soddisfatte dall'equazione $p = -1$, e le due altre lo sono dalle equazioni

$$A = \frac{1}{b^*}, \quad q = -2;$$

dimodochè il valore di y da introdursi nell'equazione 1 sarà

$$4. \quad y = \frac{1}{b^2 x} + \frac{z}{x^2},$$

e con ciò l'equazione 1 ovvero l'equazione 3 diverrà

$$5. \quad dz + b^2 z^2 \frac{dx}{x^2} = a^2 x^{m+2} dx.$$

Questa equazione 5 rinchiede il caso in cui le variabili si mostrano separate, cioè il caso di $m = -4$; essendochè allora si avrà

$$dz + \frac{b^2 z^2}{x^2} dx = \frac{a^2}{x^2} dx, \text{ ovvero } \frac{dz}{a^2 - b^2 z^2} = \frac{dx}{x^2};$$

e per integrazione

$$I \frac{a+bz}{a-bz} + IC = -\frac{2ab}{x}, \text{ ovvero } \frac{a-bz}{a+bz} = Ce^{\frac{2ab}{x}}.$$

Il quale integrale si trasforma in

$$\frac{ab+x-b^2 x^2 y}{ab-x+b^2 x^2 y} = Ce^{\frac{2ab}{x}}$$

mercè la sostituzione del valore di z tolto dall'equazione 4.

Ma se nell'equazione 5 non si abbia $m = -4$, vi si porrà $z = u^{-1}$. Così si avrà l'equazione

$$du + a^2 u^2 x^{m+2} dx = \frac{b^2}{x^2} dx,$$

la quale assumerà una forma più trattabile, quando vi si ponga

$$(m+3)x^{m+2} dx = dv, \text{ ovvero } x^{m+2} = v,$$

e si faccia per brevità

$$\frac{a^2}{m+3} = B^2, \quad \frac{b^2}{m+3} = A^2, \quad \frac{m+4}{m+3} = -n.$$

Fatte le riduzioni , si avrà l' equazione

$$6. \quad du + B^* u^n dv = A^* v^n dv ,$$

la quale ha la stessa forma dell' equazione 1 , e quindi per la conclusione precedente diverrà integrabile , quando sia

$$n = -4 , \text{ vale a dire } m = -\frac{8}{3} .$$

Ma se non fosse $n = -4$, allora mercè nuove sostituzioni per u e v , simili alle precedenti per x ed y , si avrebbe in vece della 6 una nuova equazione della forma

$$du_1 + B_1^* u_1^n dv_1 = A_1^* v_1^n dv_1 ,$$

supponendo che sia

$$p = -\frac{n+4}{n+3} ;$$

dimodochè l' equazione sarà integrabile nell' ipotesi di $p = -2$ e $p = -4$.

E se p avesse valore diverso da -2 e -4 , allora colla ripetuta applicazione dello stesso metodo si avrebbe per esponente della variabile del secondo membro la serie di valori

$$m , n = -\frac{m+4}{m+3} , p = -\frac{n+4}{n+3} , q = -\frac{p+4}{p+3} , \dots$$

ovvero , esprimendo p e q in funzione di m ,

$$m , n = -\frac{m+4}{m+3} , p = -\frac{3m+8}{2m+5} , q = -\frac{5m+12}{3m+7} , \dots$$

quozienti che possono comprendersi nella forma generale

$$-\frac{(2r-1)m+4r}{rm+2r+1} .$$

Or essendo l' equazione 5 integrabile nel caso di $m = -4$, è chiaro che la possibilità d' integrare l' equazione 1 starà nell' esistenza dell' equazione

$$-\frac{4(r+1)}{2r+1} = m, \text{ ovvero } -\frac{4r}{2r-1} = m.$$

3. L'equazione 1 somministra ancora un'altra serie di valori di m , i quali ne rendono possibile l'integrazione. Ed in vero ponendovi $y = \frac{1}{u}$, essa prende la forma

$$du + a^2 u^2 x^m dx = b^2 dx,$$

e questa, mercè le sostituzioni

$$x^{m+1} = v, \quad \frac{a^2}{m+1} = B^2, \quad \frac{b^2}{m+1} = A^2, \quad \frac{m}{m+1} = -n,$$

passa nell'equazione

$$dv + B^2 v^n dv = A^2 v^n dv,$$

la quale ha la stessa forma dell'equazione 1.

Non potendosi risolvere immediatamente questa equazione, vi si dovranno ripetere quelle stesse sostituzioni fatte nei n° 2 e 3, dimodochè rispetto all'esponente della variabile del 2° membro dell'equazione 1 si avrà la relazione

$$n = -\frac{m}{m+1} = -\frac{4r}{2r-1}, \text{ ovvero } m = -\frac{4r}{2r+1}.$$

Riunendo tutte queste deduzioni, egli è chiaro che l'equazione sarà integrabile, quando con r intero e positivo, m disegni uno dei valori

$$0, -2, -4, -\frac{4r}{2r-1}, -\frac{4r}{2r+1};$$

e che le sostituzioni dovranno farsi secondo il numero 2, quando $m = -\frac{4r}{2r-1}$, ed al contrario la prima sostituzione dovrà farsi secondo il n° 3 nell'ipotesi di $m = -\frac{4r}{2r+1}$.

Esempio 1. L'equazione

$$dy - y^2 dx = x^{-\frac{8}{3}} dx$$

comparata all' equazione 1 indica $m = -\frac{8}{3}$, dimodochè m appartiene alla forma generale $-\frac{4r}{2r-1}$ del n° 2. Quindi per l' equazione 4 dovremo introdurre per y il valore

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{z}{x^2}, \text{ donde } dy = \frac{dx}{x^2} + \frac{dz}{x^2} - \frac{2zdx}{x^3},$$

e con questi valori l' equazione proposta diverrà

$$du + 2u^2 x^{-\frac{8}{3}} dx = -x^{-2} dx.$$

La quale sarà semplificata, se dietro le già fatte osservazioni, vi s' introduca

$$\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = dv, \text{ ovvero } x^{\frac{1}{3}} = v,$$

quindi $dx = 3x^{\frac{2}{3}} dv = 3v^2 dv,$

per la qual cosa essa prenderà la forma

$$du + 6u^2 dv = -3v^{-4} dv.$$

Ma le variabili di questa equazione non si possono ancora separare; e perciò noi porremo in vece di u un valore simile a quello sostituito ad y , cioè

$$u = \frac{1}{6v} + \frac{t}{v^2};$$

cosicchè sarà

$$du = -\frac{1}{6} v^{-2} dv + v^{-2} dt - 2v^{-3} t dv.$$

Da questa ultima equazione risulterà

$$dt + 6t^2 v^{-2} dv = -3v^{-2} dv,$$

ossia
$$\frac{dt}{1+2t^2} = -3 \frac{dv}{v^2},$$

equazione che presenta separate le due variabili t e v . L'integrale n'è

$$\operatorname{arctg} t\sqrt{2} = 3\sqrt{2}v^{-1} + C,$$

ovvero
$$\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sqrt{2}}{6}(6uv^2-v)\right\} = 3\sqrt{2}v^{-1} + C,$$

avendovi introdotto il valore di t tolto dall'equazione

$$u = \frac{1}{6}v^{-1} + tv^{-2}.$$

Ed in fine essendosi fatto

$$v = x^{\frac{1}{2}}, u = \frac{1}{x}, y = -\frac{1}{x} + \frac{z}{x^2},$$

quindi $z = x^2y + x$ ed $u = \frac{1}{x^2y + x},$

si avrà, qual integrale dell'equazione proposta,

$$\operatorname{arctg}\left\{\frac{6-x^{\frac{1}{2}}y-x^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}(1+xy)}\right\} = \frac{3\sqrt{2}}{x^{\frac{1}{2}}} + C.$$

Esempio 2. Nell'equazione

$$dy + y^2dx = x^{-\frac{4}{3}}dx$$

si ha $m = -\frac{4}{3}$, o in generale $m = -\frac{4r}{2r+1}$; in conseguenza è da trattarsi secondo le osservazioni del n° 3.

Ponendovi $y = u^{-1}$, essa prende la forma

$$du - 3u^2dv = -3v^{-2}dv,$$

e se in questa facciamo

$$u = -\frac{1}{3}v^{-1} + zv^{-2}, \text{ quindi } du = \frac{1}{3}v^{-2}dv - 2zv^{-3}dv + v^{-2}dz$$

l'equazione proposta assumerà la forma

$$v^2 dz - 3z^2 dv = -3dv,$$

ovvero
$$\frac{dz}{1-z^2} = -3 \frac{dv}{v^2}.$$

L'integrale di questa è

$$\ln \frac{1+z}{1-z} - 1C = 3v^{-1},$$

che si trasforma in

$$\ln \frac{3+3uv^2-v}{3-3uv^2+v} - 1C = \frac{3}{v}$$

per essere
$$z = \frac{3uv^2-v}{3};$$

o in fine, a cagione di $u = y^{-1}$, $v = x^{-\frac{1}{2}}$,

$$\ln \frac{(3x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}})y + 3}{(3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}})y - 3} - 1C = 3x^{\frac{1}{2}}.$$

B. Equazioni differenziali non lineari.

a. Del primo ordine.

116.

Forma e risoluzione generali.

Secondo la definizione delle equazioni differenziali non lineari data nel n° 102, sarà

$$1. \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^n + P_1 \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^{n-1} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n = 0$$

la forma generale di questa specie di equazioni; $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ disegnano funzioni di x ed y .

Supponiamo che questa equazione, risolta rispetto a $\frac{dy}{dx}$ contenga le radici $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$, le quali saranno funzioni di x ed y ; e che in conseguenza ciascuno dei valori

$$2. \frac{dy}{dx} = u_1, \frac{dy}{dx} = u_2, \dots, \frac{dy}{dx} = u_{n-1}, \frac{dy}{dx} = u_n$$

renda soddisfatta l'equazione 1. Ognuna di queste ultime equazioni conterrà ancora un integrale dell'equazione 1, la quale sarà identica al prodotto

$$3. \left\{ \frac{dy}{dx} - u_1 \right\} \left\{ \frac{dy}{dx} - u_2 \right\} \dots \left\{ \frac{dy}{dx} - u_{n-1} \right\} \left\{ \frac{dy}{dx} - u_n \right\} = 0;$$

ed il prodotto di due qualunque, di tre ecc. od anche di tutti gl' integrali delle equazioni 2 renderà soddisfatta l'equazione 1, vale a dire che

$$U_1 + c_1 = 0, U_2 + c_2 = 0, \dots, U_{n-1} + c_{n-1} = 0, U_n + c_n = 0$$

disegnando i rispettivi integrali delle equazioni 2, il prodotto

$$4. (U_1 + c_1)(U_2 + c_2) \dots (U_{n-1} + c_{n-1})(U_n + c_n) = 0,$$

ovvero, ponendo $c_1 = c_2 = c_3 \dots = c_{n-1} = c_n = c$, il prodotto

$$5. (U_1 + c)(U_2 + c) \dots (U_{n-1} + c)(U_n + c) = 0$$

sarà l'integrale generale dell'equazione 1.

Esempio 1. Sia data l'equazione

$$\left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^n - a^n = 0.$$

Abbiamo qui $\frac{dy}{dx} = a$, $\frac{dy}{dx} = -a$. Quindi

$$dy = a dx, \quad dy = -a dx$$

ed $y = ax + c_1$, $y = -ax + c_2$;

dimodochè l'integrale generale sarà

$$(y - ax - c_1)(y + ax - c_2) = 0,$$

ovvero, se sia $c_1 = c_2$,

$$(y - c_1)^2 - a^2 x^2 = 0.$$

Nello stesso modo dall'equazione

$$y^2 \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 - 4a^2 = 0$$

risultano $y^2 = 4ax + c_1$, $y^2 = -4ax + c_2$;

quindi $(y^2 - 4ax - c_1)(y^2 + 4ax - c_2) = 0$

ovvero, nell'ipotesi di $c_1 = c_2$,

$$(y^2 - c_1)^2 = 16a^2 x^2$$

n'esprimerà l'integrale generale.

Esempio 2. L'equazione

$$y \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 + 2x \frac{dy}{dx} = y, \quad \text{ovvero} \quad \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 + 2 \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = 1$$

ci dà $\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$,

donde $\frac{y dy + x dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm dx$,

in conseguenza

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = x + c_1, \quad (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = -x - c_2,$$

$$\text{ed } [(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - x - c_1][(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + x + c_1] = 0,$$

ovvero, per $c_1 = c_1$,

$$y^2 = 2c_1x + c_1^2.$$

Similmente dall'equazione

$$\left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2 - (x^2 + xy + y^2)\left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2 + (x'y + x^2y' + xy'')\frac{dy}{dx} - x'y' = 0$$

risultano mercè la relazione

$$\left\{\frac{dy}{dx} - x^2\right\}\left\{\frac{dy}{dx} - xy\right\}\left\{\frac{dy}{dx} - y^2\right\} = 0.$$

gl' integrali

$$y = \frac{1}{3}x^3 + c_1, \quad y = e^{\frac{x^2}{2}} + c_1, \quad y = -\frac{1}{x} + c_1;$$

quindi l'integrale generale sarà

$$\left\{y - \frac{1}{3}x^3 - c_1\right\}\left\{y - e^{\frac{x^2}{2}} - c_1\right\}\left\{y + \frac{1}{x} - c_1\right\} = 0.$$

Esempio 3. Dall'equazione

$$(a^2 - x^2)\left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2 + bx(a^2 - x^2)\left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2 - \frac{dy}{dx} - bx = 0,$$

ponendovi $(a^2 - x^2)^{-1} = n$ e $\frac{dy}{dx} = p$, si ha la relazione

$$p^2 + bxp^2 - np - bnx = 0,$$

ovvero $(p + bx)(p^2 - n) = 0$.

Quindi si hanno gl' integrali

$$y - c_1 = \frac{bx^2}{2}, \quad y - c_1 = \arcsen \frac{x}{a}, \quad y - c_1 = -\arcsen \frac{x}{a},$$

ed in fine l'integrale generale

$$(y - c_1)^2 = -\frac{bx^2}{2} \arcsen \frac{x}{a}.$$

Casi speciali.

Il metodo di risoluzione delle equazioni differenziali, esposto nel n° precedente, si appoggia alla possibilità di trovare le radici dell'equazione 1 rispetto all'incognita $\frac{dy}{dx}$. Il metodo suppone in conseguenza che l'equazione sia di natura algebrica, e che sia possibile trovarne le radici, le quali non dipendono dall'incognita, ma dalle quantità variabili. Quindi se l'equazione non sia algebrica, o che non se ne possano rappresentar le radici, allora bisognerà per la soluzione dell'equazione data escogitare altri mezzi, i quali come metodi speciali portano seco più o meno il carattere di artificio.

Due specie di equazioni differenziali del 1° ordine si lasciano risolvere in conseguenza di principii generali, e sono le equazioni omogenee rispetto ad x ed y , e le equazioni della forma $y = \varphi\left\{x, \frac{dy}{dx}\right\}$.

Rispetto alle equazioni omogenee si potrà eliminare la variabile dalla data equazione differenziale, e dall'altra, $y = ux$ o $x = uy$, formata in conseguenza dell'omogeneità, e ristabilire una relazione tra u e $\frac{dy}{dx}$ ovvero tra u ed x , la quale somministri il mezzo per tornare all'equazione tra x ed y . Ed in vero differenziando l'equazione $y = ux$, e nel differenziale

$$dy = u dx + x du$$

ponendo per brevità $\frac{dy}{dx} = p$, si ottiene

$$p = u + x \frac{du}{dx}, \text{ ovvero } \frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u},$$

quindi

$$1. \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{p-u}.$$

Introducendo in questa equazione il valore di p , si avrà una relazione tra x ed u , ovvero tra x ed y .

Esempio 1. L'equazione

$$y dx = x \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ci dà per mezzo della divisione per $x dx$

$$\frac{y}{x} = \left[1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ ovvero } u = (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \text{ e } p = (u^2-1)^{\frac{1}{2}};$$

dimodochè l'equazione 1 assume la forma

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{(u^2-1)^{\frac{1}{2}}-u} = - \int du (u + [u^2-1]^{\frac{1}{2}});$$

donde per integrazione risulta

$$lx - \frac{1}{2} lc = - \frac{1}{2} u^2 - \int (u^2-1)^{\frac{1}{2}} du.$$

Ma per l'equazione 6 del n° 58 si ha

$$\int du (u^2-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{u}{2} (u^2-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} l(u + [u^2-1]^{\frac{1}{2}});$$

quindi

$$lx - \frac{1}{2} lc = - \frac{1}{2} u^2 - \frac{u}{2} (u^2-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} l(u + [u^2-1]^{\frac{1}{2}}),$$

e restituendovi il valore di u

$$l(x^2) = - \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x^2} (y^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + l \frac{y + (y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + lc,$$

o, ciò ch'è lo stesso,

$$\frac{y}{x^2} + [y^2 - x^2]^{\frac{1}{2}} = 1 \frac{y + (y^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2} + 1c.$$

Esempio 2. Se nell'equazione

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{x dy + y dx}{\sqrt{2xy}}$$

si ponga $\frac{dy}{dx} = p$ ed $y = ux$, si avrà

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{p+u}{\sqrt{2u}}, \text{ ovvero } \sqrt{2u(1+p^2)} = p+u.$$

Da questa equazione, quadratica rispetto a p , si ha

$$p = \frac{-u \mp (1-u)\sqrt{2u}}{1-2u}.$$

Quanto al risultamento poi è indifferente quale dei due valori di $p-u$ si utilizzi. Noi scegliamo il segno inferiore, e così avremo

$$p-u = \frac{2u^2-2u+(1-u)\sqrt{2u}}{1-2u} = \frac{(1-u)\sqrt{2u}}{1+\sqrt{2u}};$$

$$\text{dimodochè sarà } \int \frac{du}{p-u} = \int \frac{du(1+\sqrt{2u})}{\sqrt{2u}(1-u)},$$

$$\text{ovvero } \int \frac{du}{p-u} = \int \frac{du}{\sqrt{2u}(1-u)} + \int \frac{du}{1-u}.$$

Il secondo integrale a destra è noto esser $-\log(1-u)$; e quanto al primo, ponendovi $u=t^2$, avremo

$$\int \frac{du}{(1-u)\sqrt{2u}} = \sqrt{2} \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1-t}{1+t}.$$

In conseguenza l'equazione 1 ci dà

$$lx = lc - l(1-u) + \frac{1}{\sqrt{2}} l \frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}},$$

e ritornando al valore di u si avrà

$$x - y = C \left[\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right]^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Esempio 3. Dall'equazione

$$y \frac{dy}{dx} + nx = \left[1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} (y^2 + nx^2)^{\frac{1}{2}}$$

si avrà mercè le precedenti sostituzioni di p ed u ,

$$up + n = (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} (u^2 + n)^{\frac{1}{2}},$$

ovvero, elevando a quadrato questa equazione e contraendo,

$$p - u = \left\{ \frac{n-1}{n} u^2 + (n-1) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

quando non si abbia riguardo al segno del 2° membro.

In conseguenza l'equazione 1 somministra la relazione

$$l \frac{x}{c} = \int \frac{du}{\left\{ \frac{n-1}{n} u^2 + (n-1) \right\}^{\frac{1}{2}}} = \left\{ \frac{n}{n-1} \right\}^{\frac{1}{2}} l \left[\frac{u}{n^{\frac{1}{2}}} + \left\{ \frac{u^2}{n} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \right],$$

e restituendovi il valore di u ,

$$l \frac{x}{c} = \left\{ \frac{n}{n-1} \right\}^{\frac{1}{2}} l \frac{y + (y^2 + nx^2)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}} x}.$$

Esempio 4. L'equazione

$$ydx - xdy = nx (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

mercè l'introduzione di u e p conduce a

$$u = p + n(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ ovvero } p - u = -n(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Donde per differenziazione si ha

$$du = dp + n(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} p dp,$$

e quindi dall' equazione 1 risulta

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{n} \int \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \int \frac{2p dp}{1+p^2},$$

donde per integrazione si ha

$$lx = -\frac{1}{n} l(p + [1+p^2]^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} l(1+p^2) + C,$$

e ponendo la in vece di C ed eliminando i logaritmi, si otterrà

$$x = \frac{a}{(p + [1+p^2]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{n}} (1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} (-p + [1+p^2]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{n}}.$$

Ma dall' equazione

$$u = p + n(1+p^2)^{\frac{1}{2}},$$

risulta
$$p = \frac{u}{1-n^2} \pm \frac{n}{1-n^2} (u^2 + [1-n^2])^{\frac{1}{2}},$$

cosicchè introducendovi il valore di u , si ottiene per x l' equazione

$$\frac{(y^2 + [1-n^2]x^2)^{\frac{1}{2}} - ny}{1-n^2} = a \left\{ \frac{(y^2 + [1-n^2]x^2)^{\frac{1}{2}} - y}{(1-n)x} \right\}^{\frac{1}{n}}.$$

Ponendo $n = \pm 1$ si ha $p = \frac{n^2-1}{2u}$, quindi

$$x^2 + y^2 = 2ax \text{ per } n = +1$$

$$x(x^2 + y^2) = 2ay^2 \text{ per } n = -1.$$

Soluzione singolare.

L'equazione

$$1. \quad y = \varphi(x, p) \text{ supponendo } p = \frac{dy}{dx},$$

mentovata nel principio del n° precedente, si lascia integrare col differenziarla primieramente rispetto ad x . Imperocchè essendo

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dp} \frac{dp}{dx} = p,$$

si avrà in questa un'equazione differenziale di 1° ordine tra x e p . Il suo integrale darà in conseguenza un'altra relazione tra x e p , dalla quale eliminando p mercè l'equazione 1 si avrà un'equazione tra x ed y .

1. Se l'equazione 1 ha la forma

$$y = Mx + N,$$

M ed N disegnando funzioni di p , il suo differenziale sarà

$$dy = Mdx + x dM + dN,$$

ovvero

$$3. \quad (M - p) dx + x dM + dN = 0,$$

$$e \quad dx + x \frac{dM}{M - p} + \frac{dN}{M - p} = 0.$$

Or l'integrale di quest'ultima equazione è pel n° 111 :

$$x + e^{\int \frac{dM}{M-p}} \left\{ \int e^{\int \frac{dM}{M-p}} \frac{dN}{M-p} + C \right\} = 0.$$

Quindi rimane soltanto ad eliminare p da questo integrale e dall'equazione 1.

2. L'equazione più semplice

$$y = px + f(p),$$

in cui è $M = p$, trasforma l'equazione 3 in

$$4. \quad (x + fp) dp = 0,$$

la quale è soddisfatta da

$$5. \quad dp = 0 \text{ e } x + fp = 0.$$

Ma da $dp = 0$ risulta

$$p = c \text{ ed } y = cx + c_1,$$

e quest'ultima equazione, comparata all'equazione 1, ci dà $c_1 = fc$; quindi

$$6. \quad y = cx + fc.$$

La seconda poi delle equazioni 5 mena alla relazione $p = px$, e quindi dall'equazione 1 si ha la nuova equazione

$$7. \quad y = xpx + f(px).$$

Le equazioni 6 e 7 differiscono soltanto in ciò, che la costante arbitraria c dell'equazione 6 è sostituita da una certa funzione di x nell'equazione 7. Quindi è che sebbene l'equazione 7 renda soddisfatta l'equazione 3, purtuttavia essa non è contenuta nell'integrale generale dell'equazione 6. Perciò l'equazione 7 dicesi soluzione singolare dell'equazione 3.

Esempio 1. Differenziando l'equazione

$$y = px + n(1+p)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{si ha} \quad 0 = (x + n[1+p]^{-\frac{1}{2}}p)dp.$$

Da $dp = 0$ segue $y = cx + c_1$, dimodochè

$$y = cx + n(1+c)^{\frac{1}{2}}$$

sarà l'integrale generale dell'equazione proposta.

Ma se p si elimini dalle equazioni

$$y = px + n(1+p')^{\frac{1}{2}} \text{ ed } x + n(1+p')^{-\frac{1}{2}} p = 0,$$

si avrà la soluzione singolare

$$y^2 + x^2 = n^2.$$

Similmente dell'equazione

$$y = px + p - p^2$$

si ha l'integrale generale in

$$y = c(x + 1 - c),$$

e la soluzione singolare in

$$4y = (1+x)^2.$$

Esempio 2. L'equazione

$$y = px + a(1-p')^{\frac{1}{2}}$$

dà per mezzo di differenziazione

$$0 = (x + ap'[1-p']^{-\frac{1}{2}}) dp,$$

quindi da $dp = 0$ si avrà

$$y = cx + c, \quad c, = a(1-c')^{\frac{1}{2}};$$

e perciò l'integrale generale è

$$y = cx + a(1-c')^{\frac{1}{2}}.$$

Da $x + ap'(1-p')^{-\frac{1}{2}} = 0$ si ottiene mercè l'eliminazione di p la soluzione singolare

$$y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}.$$

Eguale si troverà appartenere all'equazione

$$y = px - ap(1 + p^2)^{-\frac{1}{2}}$$

l'integrale generale

$$y = c(x - a[1 + c^2]^{-\frac{1}{2}})$$

e la soluzione singolare

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

119.

Continuazione.

Le soluzioni singolari, di cui si è fatta parola nel n° precedente all'occasione delle equazioni della forma

$$y = \varphi \left\{ x, \frac{dy}{dx} \right\}$$

meritano speciale considerazione a fin di poterle dedurre dall'equazioni differenziali o dagl'integrali completi.

Se un'equazione differenziale del primo ordine tra due variabili

$$1. \quad f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

venga con qualsiasi metodo integrata, nell'equazione integrale, quando questa siasi ottenuta colla possibile generalità, dovrà comparire una costante indeterminata, la quale non esisteva nell'equazione differenziale. Indicando con

$$2. \quad F(x, y, a) = 0$$

questa equazione integrale, ne segue che l'eliminazione della costante arbitraria dall'equazione 2 e dal suo differenziale

$$3. \quad \frac{dF(x, y)}{dx} dx + \frac{dF(x, y)}{dy} dy = 0.$$

dovrà ricondurre all'equazione differenziale 1.

Finchè la costante a resterà indeterminata nell'equazione 2, questa si dirà integrale completo dell'equazione 1, e dando ad a un valore speciale qualunque, si avrà un integrale particolare della stessa equazione 1. Infine ogni valore di y che renderà soddisfatta l'equazione 1, ne sarà una soluzione speciale o singolare.

Dietro queste definizioni l'integrale particolare e la soluzione singolare hanno di comune la proprietà di rendere soddisfatta l'equazione differenziale; ma essi differiscono in questo che l'integrale particolare soddisfa ancora l'integrale completo, mentre ciò non può farsi dalla soluzione singolare.

Per poter dedurre la soluzione singolare dall'integrale completo, consideriamo a come quantità variabile. Avremo così come differenziale dell'equazione 2 l'espressione

$$4. \quad \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{da} da = 0,$$

scrivendo per brevità dF in vece di $dF(x, y, a)$. Questa equazione 4 riconurrà egualmente all'equazione 3, sia ponendo a costante e quindi $da = 0$, sia riguardando a come una variabile per la quale si abbia $\frac{dF}{da} = 0$. Questo valore variabile di a risulterà dunque dall'equazione

$$5. \quad \frac{dF}{da} = 0.$$

Or se il valore di a , divenuto variabile, si trasporti dall'equazione 5 nella equazione 2, si avrà egualmente un integrale dell'equazione 1, il quale ne sarà una soluzione singolare, quando il risultamento dell'eliminazione di a dalle equazioni 2 e 5 non potesse ancora ottenersi dall'introduzione di un valore costante di a nell'equazione 2.

Quindi risulta la seguente regola per dedurre una solu-

zione singolare di una data equazione differenziale dal suo integrale generale.

Si differenzierà questo integrale generale rispetto alla costante indeterminata, riguardando x ed y come quantità determinate; indi si eliminerà la detta costante dall'ottenuto differenziale e dall'integrale generale. L'equazione finale sarà una soluzione speciale, quando essa non possa dedursi dall'integrale generale mercè di un certo valore dato alla costante che vi è contenuta.

Questa regola diviene impraticabile, quando l'integrale generale dell'equazione 2 sia portato alla forma esplicita

$$6. \quad \varphi(x, y) = a,$$

dimodochè a non si trovi nel 1° membro. In questo caso bisognerà ricondurre l'equazione 6 alla forma implicitità dell'equazione 2.

L'esposto metodo per trovare una soluzione singolare dell'equazione differenziale 1, suppone la conoscenza dell'integrale completo di essa.

Ma egli è possibile dedurre dalla stessa equazione differenziale la soluzione singolare, quando in generale questa possibile.

Ed in vero, differenziando l'equazione 2, e prendendo dall'equazione che ne risulta, il valore di a , che sarà rappresentato dall'equazione

$$7. \quad a = \psi(x, y, p) \text{ supponendo } p = \frac{dy}{dx},$$

l'equazione 2 assumerà la forma

$$F(x, y, \psi(x, y, p)) = 0,$$

o più brevemente

$$F(x, y, \psi) = 0.$$

Questa equazione o dovrà esser di accordo coll'equazione dif-

ferenziale 1, o differirne per un fattore M che potrà contenere x , y e p . Quindi poniamo

$$f(x, y, p) = M \cdot F(x, y, \psi);$$

e ne risulterà

$$8. \quad df(x, y, p) = M dF(x, y, \psi) + F(x, y, \psi) dM.$$

Ma è

$$9. \quad dF(x, y, \psi) = \frac{dF(x, y, \psi)}{dx} dx + \frac{dF(x, y, \psi)}{dy} dy + \frac{dF(x, y, \psi)}{d\psi} d\psi,$$

nella quale equazione le derivate parziali

$$\frac{dF(x, y, \psi)}{dx}, \quad \frac{dF(x, y, \psi)}{dy}$$

sono da prendersi nello stesso senso delle derivate parziali dell'equazione 3

$$\frac{dF(x, y)}{dx}, \quad \frac{dF(x, y)}{dy}$$

dalle quali differiscono soltanto in ciò che si è in quelle introdotto il valore di a , tolto dall'equazione 7, cosicchè sarà nulla la somma

$$\frac{dF(x, y, \psi)}{dx} dx + \frac{dF(x, y, \psi)}{dy} dy,$$

e dovrà essere

$$dF(x, y, \psi) = \frac{dF(x, y, \psi)}{d\psi} d\psi.$$

Quindi dalle equazioni 8 e 9 segue che

$$df(x, y, p) = M \frac{dF(x, y, \psi)}{d\psi} d\psi + \frac{dM}{M} f(x, y, p).$$

Ma il primo membro di questa equazione, egualmente che il secondo termine del 2° membro, è nullo in forza dell'equazione 1; dunque

$$10. \quad \frac{dF(x, y, \psi)}{d\psi} = 0.$$

Se al contrario si differenzia parzialmente rispetto a p la precedente equazione

$$f(x, y, p) = MF(x, y, \psi),$$

si avrà

$$\frac{df(x, y, p)}{dp} = M \frac{dF(x, y, \psi)}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dp} + \frac{dM}{dp} \cdot \frac{f(x, y, p)}{M},$$

ovvero, avendo in considerazione le equazioni 10 ed 1,

$$11. \quad \frac{df(x, y, p)}{dp} = 0;$$

e poichè

$$df(x, y, p) = \frac{df(x, y, p)}{dx} dx + \frac{df(x, y, p)}{dy} dy + \frac{df(x, y, p)}{dp} dp,$$

sarà

$$12. \quad \frac{df(x, y, p)}{dx} + \frac{df(x, y, p)}{dy} p = 0.$$

Le equazioni 10, 11 e 12 hanno lo stesso significato. Quindi eliminare p da una delle equazioni 11 e 12 e dall'equazione 1 sarà lo stesso che eseguire la stessa operazione sull'equazione 10 e l'equazione $F(x, y, \psi) = 0$, ovvero eliminare ψ da queste due equazioni, essendochè p si presenta soltanto in ψ ossia $\psi(x, y, p)$. Ma così facendo risulterà la stessa equazione che si avrebbe eliminando a dalle equazioni 5 e 2. In conseguenza cacciando p dalle equazioni 11 ed 1, o 12 ed 1, si avrà una soluzione singolare dell'equazione 1, quando essa esista. Per iscovrire que-

sta esistenza, bisognerà eseguire nel tempo stesso le due eliminazioni.

Esempio 1. L'equazione differenziale

$$dy^2 - x dx dy + y dx^2 = 0,$$

risolta rispetto a $\frac{dy}{dx}$, dà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + (x^2 - 4y)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

ovvero

$$\frac{x dx - 2 dy}{(x^2 - 4y)^{\frac{1}{2}}} + dx = 0,$$

il cui completo integrale è

$$(x^2 - 4y)^{\frac{1}{2}} + x + a = 0,$$

ovvero

$$4y + 2ax + a^2 = 0,$$

a indicando la costante arbitraria.

Differenziando rispetto ad a quest'ultima equazione, si trova

$$2x + 2a = 0, \text{ ossia } a = -x;$$

e questo valore di a introdotto nell'integrale completo, lo trasforma in

$$y - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = 0, \text{ ossia } x^2 - 4y = 0$$

ch'è una soluzione singolare della data equazione differenziale.

Finalmente facciamoci a ricercare la soluzione singolare dalla stessa equazione differenziale data. Scrivendo p in vece di $\frac{dy}{dx}$, essa prende la forma

$$p^2 - px + y = 0.$$

Differenziando questa equazione rispetto ad x ed y , si

avrà per l'equazione 12 :

$$-p + p = 0 ,$$

dimodochè essa non può servire all'eliminazione di p . Ma se la stessa equazione , come dice l'equazione 11 , sia differenziata rispetto a p , si avrà

$$2p - x = 0 ,$$

la quale , congiunta alla relazione

$$p^2 - xp + y = 0 ,$$

conduce alla soluzione singolare

$$x^2 - 4y = 0.$$

b. Del secondo ordine.

120.

Equazioni omogenee.

Un'equazione differenziale del 2° ordine contiene x , y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Or ponendo che le variabili x ed y abbiano una dimensione , $\frac{dy}{dx}$ sarà di dimensione zero e $\frac{d^2y}{dx^2}$ avrà la dimensione — 1. Ciò posto , un'equazione si dirà omogenea quando abbia egual somma di dimensioni in tutti i termini. Dietro questo schiarimento l'equazione

$$x^2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

è omogenea , poichè i fattori del primo termine hanno ordinatamente i numeri di dimensioni 2 , 0 , —1 la cui som-

ma è 1, e la stessa quantità di dimensioni si trova nel secondo e terzo termine.

Un'equazione differenziale omogenea del 2° ordine si potrà integrare, ponendovi

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v}{x}, \quad y = ux;$$

essendochè per mezzo di queste sostituzioni potrà eliminarsi x ed ottenersi una relazione tra u , p e v . Ed in vero dal differenziale

$$dy = udx + xdu$$

di $y = ux$ si ha $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u},$

e questa equazione, essendo

$$dp = \frac{d^2y}{dx^2} dx = \frac{v}{x} dx, \quad \text{ossia} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{v},$$

mena alla relazione

1. $\frac{dp}{v} = \frac{du}{p-u}, \quad \text{ovvero} \quad vdu = (p-u)dp.$

Or se da questa equazione 1 coll'ajuto della proposta equazione differenziale si elimini v , si avrà un'equazione del 1° ordine tra p ed u , il cui integrale rappresenta la dipendenza delle variabili p ed u , cosicchè introdotto il valore di p nell'equazione

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u},$$

questa si trasformerà in un'altra equazione differenziale di primo ordine che conterrà separate le variabili u ed x .

Esempio 1. L'equazione

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ y - x \frac{dy}{dx} \right\}^2$$

è omogenea del 2° grado. Introducendovi $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = p$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v}{x}$, si avrà $v = (u-p)^2$; valore, che introdotto
 nell'equazione 1, dà la relazione

$$\frac{dp}{du} - p = u.$$

L'integrale di quest'ultima equazione è pel n° 111,

$$p = -e^u \int e^{-u} u du = u + 1 + ce^u;$$

cosicchè l'equazione tra x ed u ci dà la relazione

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{1+ce^u} = \frac{e^{-u} du}{e^{-u}+c},$$

ossia $lx - lc' = -l(e^{-u} + c),$

e quindi l'equazione finale

$$y = -xl \frac{e' - ex}{x}.$$

Esempio 2. Se nell'equazione

$$3y dx^2 - 3x dx dy + 4y^2 d^2y = 0,$$

vale a dire nell'equazione

$$3y - 3x \frac{dy}{dx} + 4y^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

s' introducano le suddette variabili, si avrà la relazione

$$v = \frac{3(p-u)}{4u^2},$$

la quale, unita all'equazione 1, ci dà

$$\frac{3 du}{u^2} = 4 dp, \text{ ossia } p = c - \frac{3}{4u}.$$

Quindi l'equazione tra u ed x assumerà la forma

$$\frac{dx}{x} = \frac{-4u du}{3-4cu+4u^2}.$$

Or siano $a+2u$ e $b+2u$ i fattori del trinomio $3-4cu+4u^2$; si avrà

$$\frac{dx}{x} = \frac{-4u du}{(a+2u)(b+2u)} = -\frac{2a du}{(a-b)(a+2u)} + \frac{2b du}{(a-b)(b+2u)},$$

donde per integrazione

$$lx - lc' = -\frac{a}{a-b} l(a+2u) + \frac{b}{a-b} l(b+2u),$$

ovvero, mutando i segni,

$$\frac{c'}{x} = (a+2u)^{\frac{a}{a-b}} = (b+2u)^{-\frac{a}{a-b}},$$

ed in fine per cangiamento della costante c' ,

$$C'(bx+2y)^b = (ax+2y)^a.$$

121.

Equazioni senza x o senza y .

Le equazioni del 2° ordine conducono ad una facile risoluzione, quando in esse manca una delle variabili x ed y .

1. Se manca la variabile y , allora ponendo $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ si avrà un'equazione differenziale di primo ordine tra x e p , il cui integrale rappresenterà una relazione tra x e p . E da questo integrale si avrà un'equazione tra x ed y , ricorrendo all'equazione

$$y = \int p dx = px - \int x dp.$$

2. Se poi manca la variabile x , allora ponendo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} = p \frac{dp}{dy}$$

si avrà un'equazione tra p ed y , la quale coll'aiuto dell'equazione $y = p dx$ condurrà ad una relazione tra x ed y .

Esempio 1. L'equazione.

$$(1+x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + 1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 = 0,$$

ponendovi $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ ci dà la relazione tra p ed x

$$(1+x) \frac{dp}{dx} + 1 + p^2 = 0,$$

ovvero
$$\frac{dp}{1+p^2} = - \frac{dx}{1+x^2}.$$

Da ciò risulta l'integrale

$$\operatorname{arctg} p = - \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} c = \operatorname{arctg} \frac{c-x}{1+cx},$$

dimodochè per y si avrà l'integrale

$$y = \int \frac{c-x}{1+cx} dx = \frac{1+c^2}{c^2} \log(1+cx) - \frac{1}{c^2} (1+cx) + C,$$

ovvero l'equazione, cambiando la costante C ,

$$c^2 y = (1+c^2) \log(1+cx) - cx + c'.$$

Esempio 2. Dall'equazione

$$(x+a) \frac{d^2y}{dx^2} + x \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 = \frac{dy}{dx},$$

ovvero da
$$(x+a) \frac{dp}{dx} + x p^2 = p,$$

ponendovi $p = \frac{1}{z}$, si avrà l'equazione differenziale

$$(x+a) \frac{dz}{dx} + z = x, \text{ ovvero } \frac{dz}{dx} + \frac{z}{x+a} = \frac{x}{x+a},$$

il cui integrale è pel n° 111

$$z = \frac{x^2}{2} (x+a)^{-1} - \frac{c^2}{2} (x+a)^{-1},$$

indicando la costante con $\frac{c^2}{2}$. Da ciò si ha

$$p = \frac{2(x+a)}{x^2 - c^2}$$

$$e \quad \int p dx = \int \frac{2x dx}{x^2 - c^2} + \int \frac{2a dx}{x^2 - c^2},$$

$$y \ln(x^2 - c^2) - \frac{a}{c} \ln \frac{x+c}{x-c}.$$

Esempio 5. L'equazione

$$\left\{ y \frac{dy}{dx} + 1 \right\} \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 \right] \frac{dy}{dx}$$

non contenendo x , vi porremo $\frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$, e così l'avremo trasformata in

$$(py + 1) \frac{dp}{dy} = 1 + p^2,$$

$$\text{ovvero in} \quad dy - y \frac{p dp}{1+p^2} = \frac{dp}{1+p^2}.$$

L'integrale di questa equazione è pel n° 111,

$$y = (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \int (1+p^2)^{-\frac{1}{2}} dp + c (1+p^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{ovvero} \quad y = p + c(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$$

Inoltre essendo $p dx = dy$, sarà

$$x = \int \frac{dy}{p} = \ln p + c \ln(p + [1+p^2]^{\frac{1}{2}}) + c'.$$

*

Ed in fine si avrà la relazione di x ad y , eliminando p dalle due ultime equazioni.

Esempio 4. L'equazione

$$\left\{\frac{dy}{dx}\right\}^n - y \frac{d^2y}{dx^2} = n \left[\left\{\frac{dy}{dx}\right\}^n + a^2 \left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}^n \right]^{\frac{1}{n}},$$

ponendovi $\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$, si trasforma in

$$p - y \frac{dp}{dy} = n \left[1 + a^2 \left\{\frac{dp}{dy}\right\}^n \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Questa equazione, avendo la forma dell'equazione 4 del n° 118, avrà per integrale generale

$$p = cy + n(1 + a^2 c^n)^{\frac{1}{n}},$$

dove si troverà per x il valore

$$Cx + C' = 1 (cy + n[1 + a^2 c^n]^{\frac{1}{n}}).$$

La soluzione singolare ci dà la relazione

$$ap = (n^2 a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

e tra x ed y l'equazione

$$y = n a s e n \frac{c+x}{a}.$$

c. Di ogni ordine.

122.

Soluzione singolare.

Siasi trovato il primo integrale dell'equazione differenziale dello n^{esimo} ordine:

$$1. \quad f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

in cui le quantità $y', y'', \dots, y^{(n)}$ esprimono ordinatamente le derivate $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$; questo integrale conterrà le derivate $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ insieme ad una costante arbitraria a , dimodochè avrà la forma:

$$2. \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, a).$$

Or in conseguenza delle generali determinazioni del n° 119 l'equazione

$$3. \quad \frac{dF}{da} = 0$$

somministrerà la soluzione singolare dell'equazione 1, quando s'impieghi ad eliminare la costante arbitraria dall'equazione 2.

Questa soluzione singolare conterrà dunque le variabili

$$x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)},$$

e starà alla data equazione differenziale 1 ed al primo integrale completo dell'equazione 2 nel medesimo rapporto, in cui la soluzione singolare dell'equazione differenziale del primo ordine è a questa equazione ed al suo completo integrale. Or nel n° 119 si è dimostrato che si avrà la soluzione singolare dell'equazione del primo ordine, eliminando p ossia y' dalle due equazioni

$$f(x, y, y') = 0 \text{ e } \frac{df(x, y, y')}{dy'} = 0.$$

Si potrà quindi conchiudere che si avrà la soluzione singolare dell'equazione 1, eliminando $y^{(n)}$ dalle due

$$4. \quad f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ e } \frac{df(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})}{dy^{(n)}} = 0.$$

Ma la soluzione singolare così trovata apparterrà soltanto al primo integrale completo. Perchè essa corrisponda a ciascuno degli m primi integrali dell'equazione 1, dovranno esser soddisfatte le condizioni

$$5. \quad \frac{df}{dy^{(n)}} = 0, \quad \frac{df}{dy^{(n-1)}} = 0, \dots, \frac{df}{dy^{(n-m+1)}} = 0,$$

$f = 0$ indicando l'equazione 1, la quale dovrà essere precedentemente trasformata in una funzione intera e razionale di x ed y .

Per indicare l'andamento della ricerca che farà di questa proposizione una verità, noi scegliamo l'equazione del 2° ordine. Sia

$$6. \quad F(x, y, a, b) = 0$$

il completo integrale secondo dell'equazione differenziale

$$7. \quad f(x, y, y', y'') = 0,$$

a e b indicando le costanti apportate dalla duplice integrazione: si avranno i due primi integrali, quando saranno l'una dopo l'altra eliminate le costanti a e b dall'equazione 6 e dalla sua derivata

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0,$$

a cui vogliamo dare la forma

$$8. \quad \varphi(x, y, y', a, b) = 0.$$

Questa eliminazione menerà a due equazioni,

$$9. \quad L(x, y, y', a) = 0, \quad M(x, y, y', b) = 0,$$

che saranno integrali singolari dell'equazione 4. Posto che si tratti di trovare la soluzione singolare indicata con L .

Lo stesso risultamento si avrà, quando a e b siano eliminate dalle equazioni 6 e 8 e loro derivate prese rispetto

ad a , considerando b qual funzione di a . Queste derivate sono

$$\frac{dF}{da} + \frac{dF}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0, \quad \frac{d\varphi}{da} + \frac{d\varphi}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0.$$

Eliminando dalle due $\frac{db}{da}$, si avrà la relazione

$$10. \quad \frac{dF}{db} \cdot \frac{d\varphi}{da} - \frac{dF}{da} \cdot \frac{d\varphi}{db} = 0.$$

La richiesta soluzione singolare risulterà dunque dalle equazioni 6, 8 e 10, quando vengano eliminate a e b . Ma l'equazione 7 resterà inalterata, scambiandovi a con b : quindi non si avrà che una sola soluzione singolare.

Dal fin qui esposto si rileverà facilmente la via da seguirsi per giungere allo stesso teorema rispetto ad un'equazione differenziale di ordine superiore.

Esempio 1. L'equazione

$$x(y')^2 - 2y'y'' + x = 0$$

ha per primo integrale

$$11. \quad x^2 - 2ay' + a^2 = 0.$$

In conseguenza dell'equazione 3 differenziando l'ultima rispetto ad a , e pareggiando il differenziale a zero, si avrà

$$a = y^2;$$

valore che introdotto nell'equazione 11 ci dà la soluzione singolare

$$y' = \pm x.$$

Integrando dinuovo l'equazione

$$x^2 - 2ay' + a^2 = 0,$$

si avrà $\frac{1}{3}x^3 - 2ay + a^2x + b = 0,$

b indicando una nuova costante.

L'eliminazione di a dalle due ultime equazioni ci dà

$$12. \quad 4x^2(y-xy')^2 - 4\left\{b - \frac{2x^2}{3}\right\}(y-xy')y' + \left\{b - \frac{2x^2}{3}\right\}^2 = 0,$$

qual integrale del primo ordine dell'equazione data.

Or se questa equazione si differenzia rispetto a b , si troverà

$$-4(y-xy')y' + 2\left\{b - \frac{2x^2}{3}\right\} = 0,$$

quindi
$$b = \frac{2x^2}{3} + 2(y-xy')y'.$$

Questo valore di b trasforma l'equazione 12 in

$$4(y-xy')^2(x^2-y'^2) = 0.$$

Ma $y-xy' = 0$ non soddisfacendo alla proposta equazione differenziale, si avrà, come per lo innanzi

$$x^2 - y'^2 = 0, \text{ ossia } y' = \pm x.$$

Esempio 2. Dall'equazione

$$x \left\{ \frac{d^2y}{dx^2} \right\}^2 - 2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} + x = 0,$$

ovvero
$$x(y'')^2 - 2y'y'' + x = 0,$$

si ha in conseguenza della seconda delle equazioni 4:

$$\frac{df}{dy''} = 2(xy'' - y') = 0, \text{ quindi } y'' = \frac{y'}{x}.$$

Introducendo questo valore di y'' nella data equazione differenziale, si avrà per soluzione singolare

$$(y')^2 - x^2 = 0.$$

Ma poichè questa soluzione non rende soddisfatta l'equazione

$$\frac{df}{dy'} = 2y'' = 0,$$

così l'equazione $(y')^2 = x^2$

potrà essere una soluzione singolare del secondo integrale.

Per la stessa via si troverà che l'equazione del 3° ordine

$$(1 + y'')^2 - 4(x + y')(y')^2 = 0$$

ha per soluzione singolare l'equazione

$$y'' + x = 0,$$

la quale parimenti appartiene soltanto al primo integrale.

Esempio 3. Rispetto all'equazione

$$(2xyy'' - yy' + x[y']^2)(1 - xy) + (y + xy')(y')^2xy = 0$$

si ha $\frac{df}{dy'} = 2xy(1 - xy)$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dy'} = 2(1 - xy)(2xyy'' - yy' + x[y']^2)(2xy' - y) \\ + 2xyy'(y + xy')(y + 2xy''). \end{aligned}$$

Dalla prima di queste due equazioni risulta

$$1 - xy = 0.$$

Con ciò sparisce la prima parte della seconda equazione, e la seconda parte si riduce a

$$2y'(y + xy')(y + 2xy'').$$

Ma quest'ultima espressione è ancora nulla, imperocchè differenziando l'equazione

$$1 - xy = 0$$

si ha la relazione

$$x dy + y dx = 0, \text{ ossia } xy' + y = 0.$$

Laonde l'equazione $1 - xy = 0$, non contenendo nè y'' nè y' , sarà una soluzione singolare dell'ultimo integrale della proposta equazione di 3° ordine.

Integrazione per serie.

Sia $y = Fx$ una funzione continua di x tra certi dati limiti, tra quali vi sia compreso $x = 0$, e siano ordinatamente

$$A, A_1, A_2, \dots, A_n$$

i valori di $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$,

ossia di $Fx, F'x, F''x, \dots, F^{(n)}x$

per $x = 0$; la serie di Stirling darà per y il valore

$$1. \quad y = A + A_1 x + \frac{A_2}{2} x^2 + \frac{A_3}{2.3} x^3 + \frac{A_4}{2.3.4} x^4 + \dots$$

Or se y sia data non in forma di equazione finita, ma in quella di una equazione differenziale e propriamente del primo ordine $f(x, y, y') = 0$, e disegnino

$$y' = \Phi(x, y), \quad y'' = \Psi(x, y, y'), \quad y''' = X(x, y, y', y''), \dots$$

le equazioni esprimenti le derivate $y', y'', y''', \dots$ di y ; si potrà mercè queste equazioni eliminare

$$y' \text{ da } y'' = \Psi(x, y, y')$$

$$y'' \text{ da } y''' = X(x, y, y', y''), \dots$$

e così avere $y', y'', y''', \dots$ espresse in funzione di x ed y soltanto, dimodochè nell'ipotesi di $x=0$ e quindi di $y=A$, queste derivate prendano ordinatamente i valori $A_1, A_2, A_3, \dots$. In tutto questo A resterà indeterminata, qual costante arbitraria.

Se l'equazione differenziale è del secondo ordine, cioè $f(x, y, y', y'') = 0$, si formeranno ancora equazioni della forma

$$y' = \Phi(x, y, y''), \quad y'' = \Psi(x, y, y', y''), \dots$$

e dalla loro unione potranno le derivate y'' , y''' , ... essere espresse in x , y , y' , dimodochè nell'ipotesi di $x=0$ la funzione y si trasformerà in A , y' in A_1 , y'' in A_2 , y''' in A_3 , e le funzioni A ed A_1 resteranno indeterminate quali costanti arbitrarie.

Con questo modo di deduzione si perviene alla conseguenza che per l'equazione di 3° ordine $f(x, y, y', y'', y''')=0$ le derivate y'' , y''' , ... si potranno rappresentare con x, y, y', y'' e che facendo $x=0$, le funzioni y, y', y'', y''', y'''' , ... diverranno ordinatamente $A, A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ e che l'equazione 1 applicata a questo caso, conterrà tre costanti arbitrarie A, A_1, A_2 .

Continuando in questo modo di ragionamento si troverà che rispetto all'equazione generale

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

sarà possibile rinvenire il valore di y in forma di serie, e che questo valore dipenderà da n costanti arbitrarie $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$.

Parimenti si potrebbe in vece dell'equazione 1 far uso della serie di Taylor, nell'ipotesi che le derivate di y dall'equazione $y = fx$ restino continue per valori determinati di x ed $x+h$.

Imperocchè se per $x=a$, i valori di

$$Fx, F'x, F''x, F'''x, \dots, F^{(n)}x$$

si mutano ordinatamente in

$$B, B_1, B_2, B_3, \dots, B_n,$$

la serie di Taylor darà

$$F(a+h) = B + B_1 h + \frac{B_2}{2} h^2 + \frac{B_3}{2 \cdot 3} h^3 + \frac{B_4}{2 \cdot 3 \cdot 4} h^4 + \dots$$

ovvero per $h = x - a$,

$$2. \quad Fx=y=B+B_1(x-a)+\frac{B_2}{2}(x-a)^2+\frac{B_3}{2.3}(x-a)^3+\dots$$

Esempio 1. Sia data l'equazione

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + n^2xy = 0.$$

Differenziando questa equazione si avrà

$$x \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} + n^2x \frac{dy}{dx} + n^2y = 0,$$

$$x \frac{d^4y}{dx^4} + 4 \frac{d^3y}{dx^3} + n^2x \frac{d^2y}{dx^2} + 2n^2 \frac{dy}{dx} = 0,$$

.....

$$x \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + (m+1) \frac{d^m y}{dx^m} + n^2x \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (m-1)n^2 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = 0.$$

Ponendo $x=0$, si avranno dall'equazione data e da queste derivate i valori

$$A_1=0, \quad A_2=-\frac{1}{3}n^2A, \quad A_3=0, \quad A_4=+\frac{1}{5}n^4A,$$

ed in generale $A_m=0$ per m impari

$$A_m = \pm \frac{n^m A}{m+1} \text{ per } m \text{ pari},$$

e propriamente si avrà il segno $+$ quando m sia divisibile per 4, ed il segno $-$ nel caso opposto.

Dopo ciò introducendo questi valori nell'equazione 1 si ha

$$y = A \left\{ 1 - \frac{n^2x^2}{2.3} + \frac{n^4x^4}{2.3.4.5} - \frac{n^6x^6}{2.3...7} + \dots \right\},$$

ovvero, avendo riguardo all'equazione 3 n° 26,

$$y = \frac{A \operatorname{sen} nx}{nx} = \frac{C \operatorname{sen} nx}{x}.$$

Questa equazione avendo una sola costante, è un integrale particolare della data equazione differenziale di 2° ordine. La determinazione della costante C menerà pel n° 110 all' integrale completo, il quale, come dimostra l' esempio 2 del n° 110, avrà la forma

$$y = \frac{C' \operatorname{sen} nx}{x} + \frac{C'' \operatorname{sen} nx}{x}.$$

Esempio 2. L' equazione

$$\frac{dy}{dx} = mx^n - y$$

$$\text{dà } \frac{d^2y}{dx^2} = mn x^{n-1} - \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = mn(n-1)x^{n-2} - \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = mn(n-1) \dots (n-m+1)x^{n-m} - \frac{d^m y}{dx^m};$$

perciò si avrà nell' ipotesi di $x=a$,

$$B_1 = ma^n - B,$$

$$B_2 = mna^{n-1} - ma^n + B,$$

$$B_3 = mn(n-1)a^{n-2} - mna^{n-1} + ma^n - B,$$

ecc.

ecc.

quindi dall' equazione 2 risulta

$$y = B + (ma^n - B)(x-a) + (mna^{n-1} - ma^n + B) \frac{(x-a)^2}{2} \\ + (mn[n-1]a^{n-2} - mna^{n-1} + ma^n - B) \frac{(x-a)^3}{2.3} + \dots$$

Continuazione.

Non si può sempre utilizzare la serie di Stirling o quella di Taylor per l'integrazione di un'equazione differenziale, giacchè non è sempre possibile determinare i limiti, tra quali la richiesta funzione $y = Fx$ rimarrà continua.

In questo caso si porrà l'integrale richiesto sotto forma di una serie ordinata secondo le potenze crescenti di x , cioè

$$1. \quad y = A_1 x^\alpha + A_2 x^\beta + A_3 x^\gamma + A_4 x^\delta + \dots$$

e si determineranno i coefficienti $A_1, A_2, A_3, \dots$ a norma della data equazione differenziale

Esempio 1. Risolviamo l'equazione dell'esempio 1 del n° precedente

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + n^2 xy = 0,$$

ovvero
$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0.$$

Introduciamo in essa il valore di y dell'equazione 1, e così avremo

$$n^2 y = n^2 A_1 x^\alpha + n^2 A_2 x^\beta + n^2 A_3 x^\gamma + n^2 A_4 x^\delta + \dots$$

$$\frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = 2A_1 \alpha x^{\alpha-1} + 2A_2 \beta x^{\beta-1} + 2A_3 \gamma x^{\gamma-1} + \dots$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = A_1 \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + A_2 \beta(\beta-1)x^{\beta-2} + A_3 \gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \dots$$

La somma dei primi membri di queste equazioni essendo nulla, tale dovrà essere ancora quella dei secondi membri. Quindi se i termini della somma di questi secondi membri siano ordinati per le potenze di x , il coefficiente di questa variabile dovrà esser nullo in ogni termine.

Il più basso esponente di x essendo $\alpha - 2$, ed $\alpha(\alpha + 1)$

il suo fattore, com'è facile a vedersi, dovrà essere $\alpha(\alpha+1)=0$; equazione egualmente soddisfatta da $\alpha=-1$ che da $\alpha=0$. Poniamo in conseguenza:

1. $\alpha=-1$. Il termine $n^{\alpha} A_{\alpha} x^{\alpha}$ non potendo da se stesso sparire, ciò dovrà avvenire per mezzo di altri termini aventi lo stesso esponente; quindi α non potrà esser minore di $\beta-2$. Or poniamo $\beta-2 < \alpha$; sarà $\beta(\beta+1)=0$, e con ciò sparirà il fattore di $x^{\beta-2}$. Sarà dunque $\beta=0$, poichè è $\beta > \alpha$. Da ciò segue che sarà

$$\gamma-2=\alpha, \delta-2=\beta.$$

E poichè dovrà essere

$$A_{\gamma} \gamma(\gamma+1) + n^{\alpha} A_{\alpha} = 0, \quad A_{\delta} \delta(\delta+1) + n^{\beta} A_{\beta} = 0, \dots$$

ne segue

$$\alpha=-1, \beta=0, \gamma=1, \delta=2, \dots$$

$$A_1 = \frac{A_0 n^{\alpha}}{1.2}, \quad A_2 = \frac{A_1 n^{\alpha}}{1.2.3.4}$$

$$A_3 = -\frac{A_2 n^{\alpha}}{1.2.3}, \quad A_4 = -\frac{A_3 n^{\alpha}}{1.2.3.4.5}, \dots$$

Si avrà dunque dalla supposta equazione per y la doppia serie

$$y = A_1 \left\{ \frac{1}{x} - \frac{n^{\alpha} x}{1.2} + \frac{n^{\alpha} x^2}{1.2.3.4} - \frac{n^{\alpha} x^3}{1.2.3.4.5.6} + \dots \right\} \\ + A_2 \left\{ 1 - \frac{n^{\alpha} x^2}{1.2.3} + \frac{n^{\alpha} x^4}{1.2.3.4.5} - \frac{n^{\alpha} x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots \right\},$$

ossia
$$y = \frac{A_1 \cos nx}{x} + \frac{A_2 \sin nx}{nx},$$

valore eguale a quello trovato nell'esempio 2 del n° precedente.

Questo risultamento si è ottenuto nell'ipotesi che sia $\beta-2 < \alpha$. Ma è ancora possibile la supposizione di $\beta-2=\alpha$.

Ed il ragionamento poggiato su questa supposizione mena all'equazione

$$y = \frac{A_1 \cos nx}{x},$$

la quale contiene un integrale particolare dell'equazione proposta, e dal quale si potrebbe ottenere l'integrale completo dietro le cose dette nel n° 110.

2. Sia $\alpha = 0$. In questo caso il fattore di $x^{\beta-2}$, ossia $\beta(\beta+1)$, non potrà esser nullo, poichè $\beta > \alpha$; ed in conseguenza neppure potrà essere $\beta - 2 < \alpha$. Porremo in conseguenza $\beta - 2 = x$; donde $\gamma - 2 = \beta$, ... Quindi gli esponenti riceveranno i valori

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \dots$$

e quelli dei coefficienti saranno

$$A_2 = -\frac{A_1 n^2}{1.2.3}, \quad A_4 = \frac{A_1 n^4}{1.2.3.4.5}, \dots$$

Quindi risulterà per y il valore

$$y = \frac{A_1 \sec nx}{x},$$

vale a dire un altro integrale particolare, il quale unito al precedente darà l'integrale completo.

Esempio 2. Sia data l'equazione

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

A questa equazione si potranno applicare entrambi i metodi, tanto quello del numero precedente, che quello di questo numero.

Mercè ripetuta differenziazione essa ci dà

$$x \frac{d^{n+2} y}{dx^{n+2}} + (n+1) \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} + \frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

e perciò nell' ipotesi di $x = 0$ si avrà dall' equazione 1.

$$2. \quad y = A \left\{ 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{x^3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{x^4}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} - + \dots \right\},$$

vale a dire un integrale particolare dell'equazione data. L' integrale completo ne verrà dedotto secondo il n° 110. Ma poichè questo integrale particolare, che indichiamo con v , è dato in forma di serie, il calcolo ne diverrebbe assai lungo. Per renderlo più breve, si potrà col metodo di Eulero porre per integrale generale

$$y = u + v \log cx,$$

supponendo che v , come si è detto, indichi l' ottenuto integrale particolare, c una costante ed u una funzione di x , espressa dall' equazione

$$u = C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \dots$$

nella quale C , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , ... disegnano coefficienti tuttavia indeterminati.

La supposta equazione per y somministra mercè differenziazione i valori

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \log cx + \frac{v}{x}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dx^2} \log cx + \frac{2dv}{x dx} - \frac{v}{x^2}, \end{aligned}$$

mercè i quali la data equazione differenziale assume la forma

$$\begin{aligned} &x \frac{d^2 v}{dx^2} \log cx + \frac{dv}{dx} \log cx + v \log cx \\ &+ x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + 2 \frac{dv}{dx} + u = 0. \end{aligned}$$

Ma v essendo un integrale particolare dell' equazione data, dovrà essere

$$\left\{ x \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} + v \right\} \log cx = 0;$$

dimodochè per u si avrà l'equazione

$$u = 2A \left\{ x - \frac{3x^2}{2^1} + \frac{11x^3}{2^1 \cdot 3^1} - \frac{50x^4}{2^1 \cdot 3^1 \cdot 4^1} + \dots \right\} \\ + C \left\{ 1 - \frac{x}{1^1} + \frac{x^2}{1^1 \cdot 2^1} - \frac{x^3}{1^1 \cdot 2^1 \cdot 3^1} + \frac{x^4}{1^1 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot 4^1} - \dots \right\},$$

cioè

$$u = 2A \left\{ x - \frac{3x^2}{2^1} + \frac{11x^3}{2^1 \cdot 3^1} - \frac{50x^4}{2^1 \cdot 3^1 \cdot 4^1} + \dots \right\} + \frac{C}{A} v;$$

quindi risulterà per y il valore

$$y = 2A \left\{ x - \frac{3x^2}{2^1} + \frac{11x^3}{2^1 \cdot 3^1} - \frac{50x^4}{2^1 \cdot 3^1 \cdot 4^1} + \dots \right\} \\ + \left\{ 1 - \frac{x}{1^1} + \frac{x^2}{1^1 \cdot 2^1} - \frac{x^3}{1^1 \cdot 2^1 \cdot 3^1} + \frac{x^4}{1^1 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot 4^1} - \dots \right\} \log C'x,$$

comprendendo in $\log C'$ la costante $\frac{C}{A}$.

CAPO SECONDO.

Più variabili indipendenti.

125.

Introduzione.

Ogni funzione u di più variabili indipendenti $x, y, z, \dots$ può dar luogo ad un differenziale totale o parziale, secondochè verrà differenziata rispetto a tutte, o ad una delle variabili indipendenti. Quindi le equazioni differenziali, che contengono più di una variabile indipendente, debbono andar distinte in totali e parziali. Queste, cioè le parziali, sono di maggior importanza come quelle che vengono fre-

quentemente adoperate nelle ricerche di Geometria , Fisica e Meccanica.

Equazioni differenziali parziali.

126.

Osservazioni generali.

Se il concetto di equazione differenziale parziale si renda più generale di quello che si è formato nel n° 125 per opposizione al differenziale totale , si comprenderà sotto quel nome ogni equazione la quale esprima una relazione tra alcune o tutte le derivate parziali di una funzione di più variabili , purchè questa relazione non rappresenti il differenziale totale.

Consideriamo una funzione z di due sole variabili indipendenti x ed y , e sia l'equazione differenziale parziale dello n^{esimo} ordine rappresentata da

$$1. F\left\{x, y, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^n z}{dx^n}, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^n z}{dy^n}, \frac{d^2 z}{dx dy}, \dots, \frac{d^n z}{dx^n dy^n}\right\} = 0,$$

si potrà da questa dedurre la n^{esima} derivata rispetto ad x . Sia data questa derivata nell'equazione

$$2. \frac{d^n z}{dx^n} = f\left\{x, y, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^n z}{dy^n}, \frac{d^2 z}{dx dy}, \dots, \frac{d^n z}{dx^n dy^n}\right\}.$$

Differenziando questa equazione rispetto ad x , ne risulteranno le funzioni

$$\frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2} z}{dx^{n+2}}, \dots$$

le quali mercè le precedenti derivate si potranno rappresentare come funzioni di quella variabile soltanto da cui di-

pende $\frac{d^n z}{dx^n}$, come si è praticato negli esempi del n° 123.

Or supponiamo che per $x=0$ le funzioni

$$z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$$

divengano ordinatamente

$$Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1},$$

e quindi funzioni della sola variabile y , in questa ipotesi di $x=0$ avremo dall'equazione 2:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = f\left\{y, Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, \frac{dY}{dy}, \dots, \frac{dY_1}{dy}, \dots, \frac{d^n Y_p}{dy^n}\right\},$$

dimodochè $\frac{d^n z}{dx^n}$, ed in conseguenza anche $\frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2} z}{dx^{n+2}}, \dots$ diverranno funzioni di $Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$.

Sia inoltre $\varphi(x, y, z) = 0$ l'integrale dell'equazione 1, e da esso siano dedotte $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$. Queste funzioni per $x=0$ diverranno identiche alle altre già menovate $Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$. Se dunque si svolga z , qual funzione di x , colla serie di Stirling, si avrà

$$\begin{aligned} 3. \quad z = & Y + \frac{x}{1} Y_1 + \frac{x^2}{1.2} Y_2 + \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\dots n-1} Y_{n-1} \\ & + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} f(y, Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}) + \dots \end{aligned}$$

Ma in questo valore di z sono indeterminate le funzioni $Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$; il valore di z dipenderà dunque da n funzioni arbitrarie.

Se z indicasse una funzione di m variabili indipendenti $x, y, t, v, \dots$ il ragionamento precedente non dovrebbe modificarsi, soltanto le funzioni $Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ non

sarebbero dipendenti dalla sola y , ma da tutte le variabili all'infuori di x . Quindi si ha il teorema:

Un'equazione differenziale parziale dello n^{esimo} ordine di due o più variabili, integrata rispetto ad una di esse, porterà seco n funzioni arbitrarie delle altre variabili indipendenti.

Come pel caso delle equazioni differenziali tra due variabili, noi distingueremo qui quelle che contengono fattori costanti dalle altre che li hanno variabili, imperocchè le prime, quando sono lineari, sono sempre risolubili, mentre le seconde non sempre lo sono. Noi cominciamo l'esame dalle equazioni differenziali lineari con fattori costanti.

a. Con fattori costanti.

127.

Coll'ultimo termine costante.

Nell'equazione di n^{esimo} ordine

$$1. \frac{d^n z}{dx^n} + A_1 \frac{d^n z}{dx^{n-1} dy} + A_2 \frac{d^n z}{dx^{n-2} dy^2} + \dots + B_1 \frac{d^{n-m} z}{dx^{n-m}} + \dots + B_m z = c,$$

in cui insieme alla derivata dell'ordine n^{esimo} può contenersi ciascuna delle derivate di ordine inferiore, ed $A_1, A_2, \dots B_1, \dots B_m$ rappresentano fattori costanti, come costante è ancora il termine finale c . Ponendo che sia nullo il primo membro ed introducendovi per z il valore e^{mx+ny} , si avrà un'equazione tra $m, n, A_1, A_2, \dots B_1, \dots B_m$, il cui primo membro si lascerà scomporre in un prodotto di fattori binomii, vale a dire che il primo membro si trasformerà in prodotto della forma

$$(D_1 + a_1 D)(D_1 + a_2 D)(D_1 + a_3 D) \dots (D_1 + a_n D)z,$$

supponendo che il simbolo D , si rapporti alla derivata di x rispetto ad x , e che D si riferisca alla derivata di x rispetto ad y , e che nell'attuazione di questo prodotto le potenze di D , e D siano trasformate in derivate del medesimo ordine, come si è fatto nel n° 103.

Donde segue che il valore di z si comporrà di una somma di valori della forma

$$M(D_1 + aD)^{-1}c,$$

M disegnando il fattore costante che appartiene alla corrispondente frazione parziale, che nella scomposizione del fattore di c risulta dall'equazione

$$(D_1 + a_1D)(D_1 + a_2D) \dots (D_1 + a_nD)z = c,$$

ovvero

$$2. \quad z = (D_1 + a_1D)^{-1}(D_1 + a_2D)^{-1} \dots (D_1 + a_nD)^{-1}c.$$

Scrivendo dunque per ogni integrale parziale di z :

$$z = (D_1 + aD)^{-1}c,$$

e significando con questa equazione un integrale preso rispetto ad x , avremo pel n° 103 l'equazione

$$3. \quad z = e^{-axD} \left(\int e^{axD} c dx + C \right),$$

ovvero, considerando che pel n° 126 la costante C deve trasformarsi in una funzione arbitraria di y che indichiamo con φy , l'equazione

$$z = e^{-axD} \left(\int e^{axD} c dx + \varphi y \right),$$

cioè

$$4. \quad z = e^{-axD} \int e^{axD} c dx + e^{-axD} \varphi y.$$

Secondo l'equazione 8 del n° 103 vale per la forma $e^{-axD} \varphi y$ l'equazione

$$e^{-axD} \varphi y = \varphi(y - ax),$$

e per la forma $e^{axD} c$ l'altra:

$$\begin{aligned} e^{axD} c &= \left\{ 1 + axD + \frac{a^2 x^2}{2} D^2 + \frac{a^3 x^3}{2 \cdot 3} D^3 + \dots \right\} c \\ &= c + ax Dc + \frac{a^2 x^2}{2} D^2 c + \frac{a^3 x^3}{2 \cdot 3} D^3 c + \dots \end{aligned}$$

Dc , $D^2 c$, $D^3 c$, ... indicando le derivate di c rispetto ad y . Ma c è una costante; dunque tutte queste derivate sono nulle, ed in conseguenza sarà

$$e^{axD} c = c.$$

Nella stessa guisa si troverà facilmente dover essere

$$e^{-axD} c = c.$$

Quindi

$$5. \quad \int e^{axD} c dx = cx, \text{ ed } e^{-axD} \int e^{axD} c dx = cx.$$

Riunendo tutte queste osservazioni otterremo dall'equazione 4:

$$6. \quad z = cx + \varphi(y - ax)$$

come un unico valore di z che rende soddisfatta l'equazione 1.

L'integrale rappresentato nell'equazione 4 può rinvenirsi ancora considerando in e^{axD} il simbolo D come grandezza. Imperocchè dietro questa supposizione si ha

$$\int e^{axD} c dx = \frac{c}{aD} e^{axD} = D^{-1}(a^{-1} c e^{axD}).$$

Or il simbolo D significa derivata rispetto ad y , mentre per l'equazione 5 del n° 103 si ha

$$D^{-1}(uv) = \int uv dx,$$

quando la differenziazione, donde proviene il simbolo D ,

sia avvenuta rispetto ad x . Sarà dunque

$$D^{-1}(a^{-1}c e^{axD}) = \int \frac{c}{a} e^{axD} dy = \frac{c}{a} y e^{axD},$$

e perciò
$$e^{-axD} \int c e^{axD} c dx = \frac{c}{a} y,$$

quindi sarà

7.
$$z = \frac{cy}{a} + \varphi(y-ax).$$

Il risultamento espresso dall'equazione 7 è diverso da quello dell'equazione 6, e soltanto nell'ipotesi di $c=0$ sarà il primo identico al secondo. Pertuttavia questa differenza non è che apparente. Imperocchè l'equazione data:

$$z = (D_x + aD)^{-1} c$$

risulta da

$$(D_x + aD)z = c, \text{ ovvero da } \frac{dz}{dx} + a \frac{dz}{dy} = c,$$

donde
$$\frac{dz}{dy} + \frac{1}{a} \frac{dz}{dx} = \frac{c}{a},$$

ovvero, ritenendo il significato dei simboli D e D_x ,

$$\left\{ D + \frac{1}{a} D_x \right\} z = \frac{c}{a},$$

cioè
$$z = \left\{ D + \frac{1}{a} D_x \right\}^{-1} \frac{c}{a} = e^{-\frac{x}{a} D_x} \int \frac{c}{a} e^{\frac{x}{a} D_x} c dx + \varphi y.$$

Ma se questa equazione si tratti collo stesso metodo che ha condotto all'equazione 6, si perverrà all'equazione 7, quando in questa si scambii $\varphi(y-ax)$ con $\varphi\left\{y - \frac{x}{a}\right\}$, ciò che sarà sempre ammissibile per essere arbitraria la funzione φ .

L'apparente differenza viene dunque dall'essersi fatta costante l'una o l'altra delle variabili indipendenti, mentre

l'integrale è stato sempre trattato allo stesso modo. Del resto egli è facile a convincersi della permissibilità delle due forme, considerando che la suddetta equazione

$$\frac{dz}{dx} + a \frac{dz}{dy} = c$$

risulterà da ciascuna delle equazioni 6 e 7, quando pel n° 44 si elimini la funzione arbitraria.

Esempio 1. L'equazione

$$\frac{d^2z}{dx^2} - a^2 \frac{d^2z}{dy^2} = c$$

secondo la nostra notazione prende la forma

$$(D_x - aD)(D_x + aD)z = c,$$

donde $z = (D_x - aD)^{-1} (D_x + aD)^{-1} c.$

Rimettendo ora a poco a poco i fattori operativi del primo membro nell'integrale, ne risulterà

$$z = (D_x - aD)^{-1} e^{-axD} \left(\int e^{axD} c dx + \varphi y \right)$$

$$z = (D_x - aD)^{-1} e^{-axD} \left\{ \frac{ce^{axD}}{aD} + \varphi y \right\},$$

vale a dire

$$z = (D_x - aD)^{-1} \left\{ D^{-1} \frac{c}{a} + \varphi (y - ax) \right\}.$$

Il segno D si rapporta alla variabile y; quindi

$$D^{-1} \frac{c}{a} = \int \frac{c}{a} dy = \frac{cy}{a},$$

cosichè sarà

$$z = (D_x - aD)^{-1} \left\{ \frac{cy}{a} + \varphi (y - ax) \right\},$$

e perciò

$$z = e^{axD} \left\{ \int e^{-axD} \frac{cy}{a} dx + \psi y \right\} + \varphi(y - ax),$$

quando si consideri che la funzione arbitraria $\varphi(y - ax)$ per le osservazioni del n° 104 non è obbligata di andare sotto il segno integrale, imperocchè se ciò avvenisse, si otterrebbe la forma

$$e^{axD} \int e^{-axD} \varphi(y - ax) dz = e^{axD} \int \varphi(y - 2ax) dx.$$

Ma l'indicato integrale è una funzione arbitraria di $y - 2ax$, la quale quando sia espressa con $\Phi(y - 2ax)$, produrrà l'equazione

$$e^{axD} \int \varphi(y - ax) dx = e^{axD} \Phi(y - ax)$$

il cui secondo membro per l'equazione 8 del n° 103 si trasforma in $\varphi(y - ax)$, quindi in una funzione arbitraria di $y - ax$, già rappresentata in $\varphi(y - ax)$.

Avendo riguardo a queste osservazioni si ottiene il valore

$$z = -\frac{cy}{a^2 D} + \psi(y + ax) + \varphi(y - ax),$$

$$\text{ovvero } z = -\frac{cy^2}{2a^2} + \psi(y + ax) + \varphi(y - ax),$$

essendochè si ha

$$\frac{cy}{a^2 D} = D^{-1} \frac{cy}{a^2} = \frac{c}{a^2} \int y dy.$$

Egli è facile convincersi che questo valore di z menerà alla data equazione differenziale, quando siano eliminate le due funzioni arbitrarie dalle derivate parziali del 2° ordine.

Esempio 2. La scomposizione del primo membro dell'equazione

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + 2ab \frac{dz}{dx} + 2a^2 b \frac{dz}{dy} = c$$

ci dà $(D_1 + aD)(D_1 - [aD - 2ab])z = c$,
quindi $z = (D_1 + aD)^{-1} (D_1 - [aD - 2ab])^{-1} c$,
e scambiando il secondo fattore coll' integrale, si ha

$$z = (D_1 + aD)^{-1} e^{axD-2abx} \left(\int e^{-axD+2abx} c dx + \varphi y \right),$$

ovvero

$$z = (D_1 + aD)^{-1} \frac{c}{2ab - aD} + e^{-2abx} \varphi(y + ax).$$

In quest' ultima equazione il fattore operativo $(D_1 + aD)^{-1}$ non è unito alla funzione arbitraria. E ciò si poteva fare, giacchè, come si è dimostrato nel precedente esempio, da una tale relazione sarebbe risultata ancora una funzione arbitraria di $y + ax$. Or pel n° 103 si ha

$$\frac{c}{2ab - aD} = -\frac{1}{a} (D - 2b)^{-1} c = \frac{cy}{2ab};$$

$$\text{quindi } z = (D_1 + aD)^{-1} \frac{cy}{2ab} + e^{-2abx} \varphi(y + ax).$$

$$\text{Ma } (D_1 + aD)^{-1} \frac{cy}{2ab} = e^{axD} \int e^{-axD} \frac{cy dx}{2ab} = \frac{cxy}{2ab},$$

$$\text{dunque } z = \frac{cxy}{2ab} + \psi(y - ax) + e^{-2abx} \varphi(y + ax).$$

Facendo $c = 0$, risulterà

$$z = \psi(y - ax) + e^{-2abx} \varphi(y + ax)$$

qual integrale dell' equazione

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + 2ab \frac{dz}{dx} + 2a^2 b \frac{dz}{dy} = 0.$$

Esempio 3. L' equazione

$$\frac{dz}{dx} = a \frac{d^2 z}{dy^2} + c, \text{ ovvero } (D_1 - aD^2)z = c,$$

somministra per z il valore

$$z = (D_1 - aD^2)^{-1} c = e^{axD^2} \left(\int e^{-axD^2} c dx + \varphi y \right).$$

Ma
$$e^{-axD^2} c = c - \frac{ax}{1} D^2 c + \frac{a^2 x^2}{1.2} D^4 c - + \dots$$

vale a dire

$$e^{-axD^2} c = c, \text{ essendo } D^2 c = D^4 c = \dots = 0,$$

quindi

$$z = c + e^{axD^2} \varphi y = c + \varphi y + ax \varphi'' y + \frac{a^2 x^2}{1.2} \varphi'' y + \dots$$

Laonde il valore di z dipende da una sola funzione arbitraria φy ; e ciò si spiega per esser l'equazione data di primo ordine, quando s'integri rispetto ad x e si riguardi $\frac{d^2 x}{dy^2}$ come costante.

Altrimenti andrà la cosa, se noi integreremo rispetto ad y , e scambiando a un $\frac{1}{a^2}$ e c con $-\frac{c}{a^2}$, scriveremo l'equazione proposta nel seguente modo:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} - a^2 \frac{dz}{dx} = c.$$

Scomponendo il primo membro in fattori, e scrivendo D_1 in vece di $\frac{dz}{dy}$ e D in luogo di $\frac{dz}{dx}$ ne risulterà

$$(D_1 - aD^{\frac{1}{2}})(D_1 + aD^{\frac{1}{2}})z = c,$$

quindi

$$z = (D_1 + aD^{\frac{1}{2}})^{-1} e^{ayD^{\frac{1}{2}}} (e^{-ayD^{\frac{1}{2}}} c dy + Fx)$$

Ma la ricerca del significato del simbolo $e^{-ayD^{\frac{1}{2}}} c$, ovvero $e^{-ayD^{\frac{1}{2}}} Fx$, eccede i limiti di quest'opera.

Dall' equazione

$$\frac{dz}{dx} = a \frac{d^2z}{dy^2} - nz + c, \text{ ovvero } (D_x + n - aD_y^2)z = c$$

si avrà similmente l' integrale

$$z = \frac{n}{c} e^{-nx} + e^{-nx} e^{axD_y^2} \varphi y.$$

Questa equazione differisce dall' equazione differenziale dell' esempio 1. in ciò che quella si trasmuta in questa ponendovi $z = e^{-nx} u$.

Esempio 4. L' equazione

$$\frac{d^2z}{dx dy} + a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} + abz = c$$

ossia $(DD_x + aD_x + bD + ab)z = c$,

vale a dire $(D_x + a)(D + b)z = c$,

$$\begin{aligned} \text{ci dà} \quad z &= (D_x + a)^{-1} (D + b)^{-1} c \\ &= (D + b)^{-1} c \cdot e^{-ax} \left(\int e^{ax} dx + \varphi y \right) \\ &= (D + b)^{-1} \frac{c}{a} + e^{-ax} \varphi y \\ &= \frac{c}{ab} + e^{-ax} \varphi y + e^{-bx} \psi x. \end{aligned}$$

Esempio 5. Dall' equazione

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 2a \frac{d^2z}{dx dy} + a^2 \frac{d^2z}{dy^2} = c$$

ossia $(D_x - aD)^2 z = c$, cioè $z = (D_x - aD)^{-2} c$,

deriva immediatamente per l' equazione 5 del n° 103

$$z = e^{axD} \int e^{-axD} c dx^2,$$

ovvero, risolvendo per l' equazione 5 il primo integrale ed

apponendovi la funzione arbitraria φy ,

$$\begin{aligned} z &= e^{axD} \int (cx + \varphi y) dx \\ &= e^{axD} \left\{ \frac{cx^2}{2} + x\varphi y + \psi y \right\} \\ &= \frac{cx^2}{2} + x\varphi(y + ax) + \psi(y + ax). \end{aligned}$$

Esempio 6. Dell'equazione

$$\begin{aligned} \frac{d^3u}{dx^2dy} - 2 \frac{d^3u}{dx dy^2} - 3 \frac{d^3u}{dx^2dz} - 3 \frac{d^3u}{dx dz^2} \\ - 2 \frac{d^3u}{dy dz} + 6 \frac{d^3u}{dy dz^2} + 7 \frac{d^3u}{dx dy dz} = c, \end{aligned}$$

indichiamo le derivate rispetto ad x , y , z con D_x , D_y , D_z ; scomponendone il primo membro in fattori, avremo l'equazione

$$(D_x - 2D_y)(D_x + D_z)(D_y - 3D_z)u = c$$

Da questa subito avremo, integrando a norma del significato del primo fattore,

$$u = (D_x + D_z)^{-1} (D_y - 3D_z)^{-1} e^{2xz} \left(\int e^{-2xz} c dy + \varphi(y, z) \right)$$

ovvero

$$u = (D_x + D_z)^{-1} (D_y - 3D_z)^{-1} \left\{ -\frac{cy}{2} \right\} + \varphi(y + 2x, z).$$

Lo scambio del fattore $(D_x + D_z)^{-1} \left\{ -\frac{cy}{2} \right\}$ nel corrispondente integrale somministrando l'espressione

$$-\frac{cyz}{2} + \psi(y, z - x),$$

ed essendo in fine

$$(D_y - 3D_z)^{-1} \left\{ -\frac{cyz}{2} \right\} = \frac{cxyz}{6} + \chi(x, z + 3y),$$

si avrà per u il valore

$$u = \frac{exyz}{6} + \varphi(y+2x, z) + \psi(y, z-x) + \chi(x, z+3y).$$

128.

Con l'ultimo termine variabile.

Quando nell'equazione 1 del n° precedente l'ultimo termine c passa ad essere una funzione $F(x, y)$ delle variabili indipendenti x, y , allora il primo membro di essa potrà del pari scomporsi in fattori della forma $D_x + aD$, D_x designando, come d'ordinario, la derivata rispetto ad x e D quella relativa ad y .

Il primo integrale, che quindi avremo a rappresentare, conserverà l'espressione

$$(D_x + aD)^{-1} F(x, y) = e^{-axD} \left(\int e^{axD} F(x, y) dx + \varphi y \right),$$

che in forza della serie di Taylor assumerà la forma

$$e^{-axD} \int F(x, y + ax) dx + \varphi(y - ax),$$

ovvero, ponendo $\int F(x, y + ax) dx = f(x, y + ax)$,

$$f(x, y) + \varphi(y - ax).$$

Questa espressione dovrà sottoporsi nuovamente a segno d'integrazione, quando la proposta equazione differenziale sia di ordine superiore al primo. Intanto per le osservazioni fatte nel n° 129 non è necessario porre sotto segno integrale la funzione arbitraria $\varphi(y - ax)$, imperocchè si avrebbe per risultamento un'altra funzione arbitraria di $y - ax$.

Esempio 1. L'equazione

$$\frac{dz}{dx} - a \frac{dz}{dy} = e^{ax} \cos y$$

somministra per z il valore

$$z = (D_1 - aD)^{-1} e^{ax} \cos ry,$$

cioè $z = e^{axD} \int e^{-axD} e^{ax} \cos ry \, dx + e^{axD} \varphi y,$

ovvero, avendo riguardo al teorema di Taylor,

$$z = e^{axD} \int e^{ax} \cos r(y - ax) \, dx + \varphi(y + ax).$$

Per attuare l'accennata integrazione, poniamo invece di $\cos r(y - ax)$ la relativa quantità esponenziale: così avremo

$$z = \frac{e^{ax} \cdot e^{iry}}{2(n - iar)} + \frac{e^{ax} \cdot e^{-iry}}{2(n + iar)} + \varphi(y + ax),$$

e se vengano eliminate le quantità esponenziali e ridotte le frazioni ad uno stesso denominatore, si avrà

$$z = e^{ax} \frac{n \cos ry - a r \sin ry}{n^2 + a^2 r^2} + \varphi(y + ax).$$

Esempio 2. All'equazione

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = xy$$

corrisponde il valore

$$z = (D_1 - aD)^{-1} (D_1 + aD)^{-1} xy.$$

Quindi, se sia rappresentato l'integrale del primo fattore, si avrà

$$z = (D_1 + aD)^{-1} e^{axD} \int e^{-axD} xy \, dx + e^{axD} \varphi y.$$

Ma per la serie di Taylor si ha

$$e^{-axD} y = y - ax,$$

in conseguenza

$$e^{axD} \int e^{-axD} xy \, dx = e^{axD} \int (y - ax)x \, dx = e^{axD} \left\{ \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{3} ax^3 \right\},$$

ovvero

$$e^{axD} \int e^{-axD} xy dx = \frac{1}{2} x^2 (y+ax) - \frac{1}{3} ax^3 = \frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{6} ax^3.$$

Risulterà dunque da una seconda integrazione

$$z = \frac{1}{6} x^2 y + \varphi(y+ax) + \psi(y-ax).$$

Esempio 3. L'equazione

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = \cos ax \cos by$$

dà per z il valore

$$z = (D_x + iD)^{-1} (D_x - iD)^{-1} \cos ax \cos by,$$

ovvero

$$z = (D_x - iD)^{-1} e^{-ixD} \int e^{ixD} \cos ax \cos by dx + e^{-ixD} \varphi y.$$

Or essendo

$$\begin{aligned} e^{ixD} \cos ax \cos by &= \cos ax \cos b(y+ix) \\ &= \frac{1}{2} \cos(ax+b[y+ix]) + \frac{1}{2} \cos(ax-b[y+ix]), \end{aligned}$$

sarà

$$\int e^{ixD} \cos ax \cos by dx = \frac{\sin(ax+b[y+ix])}{2(a+ib)} + \frac{\sin(ax-b[y+ix])}{2(a-ib)}.$$

Introdotta questo valore nell'equazione precedente, fatte le semplificazioni e rappresentato l'integrale secondo il fattore $(D_x - iD)^{-1}$, ne risulterà

$$z = - \frac{\cos(ax+by) + \cos(ax-by)}{2(a^2+b^2)} + \varphi(y-ix) + \psi(y+ix),$$

ovvero

$$z = - \frac{\cos ax \cos by}{a^2+b^2} + \varphi(y-ix) + \psi(y+ix).$$

Esempio 4. L'equazione

$$\frac{d^2 z}{dx dy} + a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} + ahz = e^{ax+ry}$$

mena all' integrale

$$\begin{aligned} z &= (D_1 + b)^{-1} (D + a)^{-1} e^{ax+ry} \\ &= (D + a)^{-1} e^{-bx} \int e^{bx+ax+ry} dx + e^{-bx} \varphi y, \end{aligned}$$

ovvero
$$z = (D + a)^{-1} \frac{e^{ax+ry}}{b+n} + e^{-bx} \varphi y,$$

ed attuando la seconda integrazione, si avrà

$$z = \frac{e^{ax+ry}}{(a+r)(b+n)} + e^{-bx} \varphi y + e^{-ax} \psi x.$$

Esempio 5. Sia data l'equazione

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 3 \frac{d^2 z}{dx dy} + 2 \frac{d^2 z}{dy^2} = x + y.$$

Potremo subito scriverla sotto la forma

$$(D_1 + D)(D_1 + 2D) z = x + y,$$

dimodochè z ne avrà il valore

$$z = (D_1 + D)^{-1} (D_1 + 2D)^{-1} (x + y),$$

ovvero

$$z = (D_1 + 2D)^{-1} e^{-x^D} \int e^{x^D} (x + y) dx + e^{-x^D} \varphi y.$$

Or essendo

$$\int e^{x^D} (x + y) dx = \int (x + y + x) dx = xy + x^2,$$

sarà
$$z = (D_1 + 2D)^{-1} xy + \varphi (y - x),$$

ovvero

$$z = \frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{3} x^3 + \varphi (y - x) + \psi (y - 2x).$$

Esempio 6. Nell'equazione

$$\frac{du}{dx} + a \frac{du}{dy} + c \frac{du}{dz} = xyz$$

*

le derivate di u rispetto ad x , y , z siano ordinatamente espresse da D_x , D_y , D_z ; essa prenderà la forma

$$(D_x + aD_y + cD_z)u = xyz,$$

donde $u = (D_x + aD_y + cD_z)^{-1} xyz$.

Eseguendo l'integrazione rispetto ad x , cosicchè y , e z saranno riguardate come costanti, risulta

$$u = e^{-axD_y - cxD_z} \int e^{axD_y + cxD_z} xyz dx.$$

Or per la serie di Taylor, nell'equazione 8 del n° 103, si ha

$$e^{axD_y + cxD_z} xyz = e^{axD_y} xy (z + cx) = x (y + ax)(z + cx),$$

cosicchè si avrà

$$\int e^{axD_y + cxD_z} xyz dx = \frac{1}{2} x^2 yz + \frac{1}{3} x^2 (az + cy) + \frac{1}{4} acx^4,$$

ed

$$u = \frac{1}{2} x^2 (y - ax)(z - cx) + \frac{1}{3} x^2 (a[z - cx] + c[y - ax]) + \frac{1}{4} acx^4,$$

vale a dire

$$u = \frac{1}{2} x^2 yz - \frac{1}{6} x^2 (cy + az) + \frac{1}{12} acx^4.$$

b. Con fattori variabili.

129.

Equazioni del primo ordine.

Nei due numeri precedenti si è supposto che i fattori P , Q dell'equazione differenziale

$$1. \quad P \frac{dz}{dx} + Q \frac{dz}{dy} = R$$

fossero costanti, e che R fosse del pari costante o funzione delle variabili indipendenti x ed y . Resta ora a far ricerca sulle equazioni, nelle quali

1. P dipenda da x , Q da y , R da x ed y ; ovvero
2. P da x , Q da y , R da x , y e z ; ovvero
3. P , Q , R dipendano dalle tre variabili x , y , z .

1. Se P è funzione di x , Q di y , R di x ed y , bisognerà soltanto introdurre

$$\frac{dx}{P} = du, \quad \frac{dy}{Q} = dv, \quad \text{ovvero} \quad \int \frac{dx}{P} = u, \quad \int \frac{dy}{Q} = v,$$

perchè l'equazione 1 si riduca al caso del numero precedente, stantechè si avrà un'equazione tra z , u e v con fattori costanti, ed un termine finale, funzione delle variabili indipendenti u e v .

2. Ma se R è una funzione di x , y e z , ovvero $R = S \varphi z$. S dipendendo da x ed y , allora l'introduzione di

$$\frac{dz}{\varphi z} = dZ, \quad \text{ovvero} \quad \int \frac{dz}{\varphi z} = Z$$

ricondurrà dinuovo l'equazione 1 al caso del n° 128.

Esempio 1. Nell'equazione

$$x^2 \frac{dz}{dx} + y^2 \frac{dz}{dy} = \frac{x^2}{y}$$

pongasi $\frac{dx}{x^2} = du$, $\frac{dy}{y^2} = dv$, quindi $-\frac{1}{x} = u$, $-\frac{1}{y} = v$,

essa si trasformerà in

$$\frac{dz}{du} + \frac{dz}{dv} = \frac{v}{u^2},$$

il cui integrale sarà espresso da

$$z = (D_1 + D)^{-1} \frac{v}{u^2} = e^{-uD} \int e^{uD} \frac{v du}{u^2} + e^{-uD} \varphi v,$$

ovvero da $z = e^{-uD} \int \frac{v+u}{u^2} du + \varphi(v-u).$

Eseguita la integrazione, e moltiplicatone il risultamento per e^{-uD} , si avrà

$$z = -\frac{v}{2u^2} - \frac{1}{2u} + \varphi(v-u),$$

ossia
$$z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \varphi\left\{\frac{y-x}{yx}\right\}.$$

Similmente, inserendo

$$\frac{dx}{x} = du, \quad \frac{dy}{y} = dv,$$

si avrà dall'equazione

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} - y^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = xy$$

l'integrale $z = xy \log x + x\varphi\left\{\frac{y}{x}\right\} + \psi(xy),$

e dall'equazione

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2xy \frac{d^2 z}{dx dy} + y^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = x^m y^n$$

l' integrale

$$z = \frac{x^m y^n}{(m+n)(m+n-1)} + x\varphi\left\{\frac{y}{x}\right\} + \psi\left\{\frac{y}{x}\right\}.$$

Finalmente l'equazione

$$x \frac{dU}{dx} + y \frac{dU}{dy} + z \frac{dU}{dz} = aU + \frac{xy}{z}$$

per mezzo di

$$\frac{dx}{x} = du, \quad \frac{dy}{y} = dv, \quad \frac{dz}{z} = dw$$

conduce all'altra:

$$\frac{dU}{du} + \frac{dU}{dv} + \frac{dU}{dw} = aU + e^{u+v-w},$$

ovvero $U = (D_u + D_v + D_w - a)^{-1} e^{u+v-w},$

donde $U = \frac{xy}{(1-a)z} + x^a \varphi \left\{ \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right\}.$

Esempio 2. Nell'equazione

$$\frac{dz}{dx} + m \frac{dz}{dy} = \frac{nz}{y}, \text{ ossia } \frac{dz}{zdx} + m \frac{dz}{zdy} = \frac{n}{y}$$

pongasi $\frac{dz}{z} = du$, ovvero $lz = u$, a fine di ottenere dalla nuova equazione

$$\frac{du}{dx} + m \frac{du}{dy} = \frac{n}{y}, \text{ ovvero } u = (D_x + mD)^{-1} \frac{n}{y},$$

l'integrale.

$$u = e^{-mx} \int e^{mx} \frac{n}{y} dx + e^{-mx} \psi y,$$

ovvero $u = \frac{m}{n} ly + \psi(y - mx),$

cioè $z = y^{\frac{m}{n}} \varphi(y - mx).$

L'equazione proposta si può immediatamente risolvere. Imperocchè prende essa la forma

$$\frac{dz}{dy} + \left\{ mD - \frac{n}{y} \right\} z = 0,$$

nella quale il fattore $mD - \frac{n}{y}$ vale per costante, quando l'integrazione avviene rispetto ad x . Quindi per l'equazione 3 del n° 111 si avrà per y :

$$z = e^{-\int (mD - \frac{n}{y}) dx} \varphi y.$$

Quanto alla grandezza esponenziale dell'espressione

$$e^{-\int (mD+K)dx} \varphi y,$$

nella quale D è provvenuta da $\frac{dz}{dy}$, e K dinota una funzione di x ed y , può il primo termine $\int mDdx$ dell' esponente non avere immediata influenza sul secondo $\int Kdx$; ed allora non si potrà scambiare la precedente espressione colla forma

$$e^{\int mDdx} (e^{\int Kdx} \varphi y)$$

a fine di estendere il fattore operativo $e^{\int mDdx}$ alla prossima funzione di y . E quando il fattore operativo debba esercitare una tale influenza, allora la sua forma opposta, cioè $e^{-\int mDdx}$ si dovrà unire ad $e^{\int Kdx}$, e presentare l'espressione precedente sotto la forma

$$e^{\int mDdx} (e^{-\int (mD+K)dx} \varphi y).$$

In conseguenza di questo significato del primo fattore del nostro valore di z avremo dall' equazione precedente

$$z = e^{-\int mDdx} \cdot e^{\int \frac{ndx}{y}} \varphi y = e^{-\int mDdx} (e^{+\int mDdx} [e^{\int \frac{ndx}{y}}] \varphi y).$$

Or si ha

$$e^{m \int Ddx} \cdot e^{\int \frac{ndx}{y}} = e^{m \int D} e^{\int \frac{ndx}{y}} = e^{\int \frac{ndx}{y+mx}},$$

$$\text{e} \quad \int \frac{ndx}{y+mx} = \frac{n}{m} \log(y+mx),$$

quindi

$$z = e^{-mx \log(y+mx)} (e^{\frac{n}{m} \log(y+mx)} \varphi y) = e^{\frac{n}{m} \log(y-mx)},$$

$$\text{ovvero} \quad z = y^{\frac{n}{m}} \varphi(y-mx).$$

Coi due metodi dall' equazione

$$\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} = \frac{z}{x+y}$$

si ottiene l'integrale

$$z = e^{\frac{x}{y+x}} \varphi(y+x).$$

Cercando l'integrale per mezzo del fattore operativo, si viene a dare immediatamente all'equazione la forma

$$\frac{dz}{dx} = \left\{ D + \frac{1}{x+y} \right\} z = 0,$$

la quale corrisponde all'equazione 3 del n° 111, e dà per integrale

$$z = e^{\int (D + \frac{1}{x+y}) dx} \varphi y = e^{\int D dx} ([e^{-\int D dx} e^{\int \frac{dx}{x+y}}] \varphi y).$$

Ma poichè

$$e^{-\int D dx} \cdot e^{\int \frac{dx}{x+y}} = e^{-xD} \cdot e^{\int \frac{dx}{x+y}} = e^{\int \frac{dx}{y}} = e^{\frac{x}{y}},$$

così si avrà per z il valore

$$z = e^{xD} (e^{\frac{x}{y}} \varphi y) = e^{\frac{x}{x+y}} \varphi (y+x).$$

Del pari dall'equazione

$$\frac{dz}{x dx} + \frac{dz}{y dy} = \frac{z}{y^2},$$

ponendovi $x dx = du$, $y dy = dv$, si avrà l'altra :

$$\frac{dz}{du} + \frac{dz}{dv} = \frac{z}{2v},$$

la quale per le due suddette vie menerà all'integrale

$$z = y \varphi (y^2 - x^2).$$

Similmente dall'equazione

$$y \frac{dz}{dx} + x \frac{dz}{dy} = z, \text{ ovvero } \frac{dz}{x dx} + \frac{dz}{y dy} = \frac{z}{xy}$$

si avrà l'integrale

$$z = (y + x) \varphi (y^2 - x^2).$$

Esempio 3. L'equazione

$$x^2 \frac{dz}{dx} + y^2 \frac{dz}{dy} = \frac{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}.$$

diviene

$$\frac{dZ}{du} + \frac{dZ}{dv} = 1,$$

ponendovi

$$\frac{dx}{x^2} = du, \quad \frac{dy}{y^2} = dv, \quad \frac{z dz}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} = dZ,$$

ossia $-\frac{1}{x} = u, \quad -\frac{1}{y} = v, \quad (1+z^2)^{\frac{1}{2}} = Z.$

L'integrale di questa equazione è

$$Z = e^{-uD} \int e^{uD} du + e^{-uD} \varphi v,$$

ossia

$$Z = e^{-uD} u + \varphi (v - u),$$

ed essendo $e^{-uD} u = u$, avremo mercè la restituzione di x , y e z ,

$$(1+z^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x} + \varphi \left\{ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right\}.$$

Similmente da

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 2xy (a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

si ha l'integrale

$$z = a \operatorname{sen} \left[xy + \varphi \left\{ \frac{x}{y} \right\} \right],$$

e dall'equazione

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = \frac{xy}{z}$$

l'integrale

$$z^2 = xy + \varphi \left\{ \frac{x}{y} \right\}.$$

Continuazione.

3. Quando nell'equazione del numero precedente

$$1. \quad P \frac{dz}{dx} + Q \frac{dz}{dy} = R$$

P, Q, R disegnano funzioni di x, y, z , rappresentiamone l'integrale con $F(x, y, z) = 0$. Mercè le derivate parziali di questa equazione integrale

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0$$

l'equazione 1 si trasforma in

$$2. \quad P \frac{dF}{dx} + Q \frac{dF}{dy} + R \frac{dF}{dz} = 0,$$

dalla quale, mercè il differenziale totale

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0,$$

può eliminarsi una delle derivate parziali. Eliminando $\frac{dF}{dz}$, si ottiene

$$(Q dx - P dy) \frac{dF}{dy} + (R dx - P dz) \frac{dF}{dz} = 0,$$

Questa equazione dovendo esser soddisfatta per ogni valore di $\frac{dF}{dy}$ e $\frac{dF}{dz}$, lo sarà ancora per

$$\frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0;$$

dimodochè conduce alle condizioni

$$Q dx - P dy = 0, \quad R dx - P dz = 0;$$

dalle quali eliminando dx si avrà la terza condizione

$$Rdy - Qdz = 0.$$

Or posto che sia possibile trovar l'integrale di due di queste tre equazioni, siano

$$\varphi(x, y, z) = a, \quad \psi(x, y, z) = b$$

questi integrali colle costanti arbitrarie a e b . Togliendone i valori di y e z , ed introducendoli nell'equazione $F(x, y, z) = 0$, si avrà una relazione tra x , a e b , cioè $f(x, a, b) = 0$, la quale sarà impossibile, finchè i termini contenenti x non si distruggano a vicenda, dimodochè ne risulterà l'equazione

$$3. \quad f(a, b) = 0, \quad \text{ovvero } b = f(a).$$

Ma l'integrale $F(x, y, z) = 0$ dell'equazione 1 conterrà una funzione arbitraria, quindi nell'equazione $b = fa$ dovrà fa essere ancora una funzione arbitraria.

Laonde per trovare l'integrale dell'equazione 1. si dovranno cercare gl'integrali di due delle equazioni

$$4. \quad Qdx - Pdy = 0, \quad Rdx - Pdz = 0, \quad Rdy - Qdz = 0,$$

e stabilire una relazione arbitraria tra le costanti di quest'integrali.

Se di una sola delle equazioni 4 sia possibile aver l'integrale, allora è da cercarsi tra due delle variabili una relazione tale, che introdotta in una delle rimanenti equazioni ne faccia sparire una delle variabili, e la renda così integrabile. Così si avrà dinuovo una relazione arbitraria tra le costanti a e b degli integrali, cioè $b = fa$.

Del resto si riconoscerà facilmente che la possibilità d'integrare le equazioni 4 dipende da ciò che z non sia contenuta in P e Q , y in P ed R , ed x in Q ed R .

Le precedenti conclusioni possono estendersi ad un'equazione differenziale del 1° ordine, nella quale siavi un

maggior numero di variabili. Prendendo ad esempio l'equazione

$$P \frac{du}{dx} + Q \frac{du}{dy} + R \frac{du}{dz} = S$$

si avranno a risolvere le tre equazioni

$$5. \quad P dy - Q dx = 0, \quad P dz - R dx = 0, \quad P du - S dx = 0,$$

i cui integrali meneranno alle equazioni

$$U = a, \quad V = b, \quad W = c,$$

e tra questi si dovrà stabilire una relazione arbitraria, cioè

$$\varphi(U, V, W) = 0.$$

Esempio 1. Dall'equazione

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = nz$$

si dedurranno a norma delle equazioni 4 le relazioni

$$x dy - y dx = 0, \quad x dz - n z dx = 0,$$

le quali sono integrabili. Gli integrali sono

$$\frac{y}{x} = a, \quad \frac{z}{x^n} = b.$$

Quindi l'integrale dell'equazione proposta sarà

$$\frac{z}{x^n} = \varphi\left\{\frac{y}{x}\right\}, \quad \text{ovvero} \quad z = x^n \varphi\left\{\frac{y}{x}\right\}.$$

Esempio 2. L'equazione

$$x \frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} + y = 0$$

conduce mercè le equazioni 4 alle relazioni

$$x dy - z dx = 0, \quad x dz + y dx = 0,$$

Nessuna di queste due equazioni è integrabile, ma in vece

lo è la seguente da esse dedotta

$$y dy + z dz = 0.$$

L' integrale è

$$y^2 + z^2 = a^2, \text{ ed } y = \sqrt{a^2 - z^2}.$$

Introdotta questo valore nelle due equazioni di condizione, si avrà

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \text{ quindi } \ln x + \operatorname{arcsen} \frac{z}{a} = \ln b,$$

e
$$b = x e^{\operatorname{arcsen} \frac{z}{a}} = \varphi(y^2 + z^2),$$

nella quale ultima equazione è da introdursi il valore di a .

Esempio 3. Dall' equazione

$$(Cy - Bz) \frac{dz}{dx} - (Az - Cx) \frac{dz}{dy} = Bx - Ay$$

si hanno le equazioni di condizione

$$\begin{aligned} (Cy - Bz) dy - (Az - Cx) dx &= 0, \\ (Cy - Bz) dz - (Bx - Ay) dx &= 0, \\ (Bx - Ay) dy - (Az - Cx) dz &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplicatane la prima per x , la seconda per y , e divisa la loro somma per $Bx - Ay$, si ha

$$x dx + y dy + z dz = 0, \text{ donde } x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Ma se si moltiplichino la seconda per A , la terza per B , si sottragga quella da questa e si divida la differenza anche per $Bx - Ay$, risulterà

$$A dx + B dy + C dz = 0, \text{ quindi } Ax + By + Cz = b.$$

Da questi due integrali si ottiene per integrale generale dell' equazione proposta

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi (Ax + By + Cz).$$

Collo stesso metodo dall'equazione

$$y^2 \frac{dz}{dx} + xy \frac{dz}{dy} = xz$$

si avrà l' integrale

$$z = y \varphi (x^2 - y^2),$$

e dall' equazione

$$(y + x) \frac{dz}{dx} + (y - x) \frac{dz}{dy} = z$$

l' integrale

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \varphi \left\{ \arctg \frac{x}{y} - \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2) \right\}.$$

Esempio 4. L' equazione

$$x \frac{du}{dx} + (u + z) \frac{du}{dy} + (u + y) \frac{du}{dz} = y + z$$

in forza dell' equazione 5 somministra le equazioni di condizione

$$x dy - (u + z) dx = 0,$$

$$x dz - (u + y) dx = 0,$$

$$x du - (y + z) dx = 0.$$

Sottraendo la seconda dalla prima, la terza dalla seconda, ed addizionandole tutte tre si avranno ordinatamente le equazioni

$$x (dy - dz) + (y - z) dx = 0,$$

$$x (dz - du) + (z - u) dx = 0,$$

$$x (dy + dz + du) - 2(y + z + u) dx = 0,$$

dalle quali si deducono gl' integrali

$$x (y - z) = a, \quad x (z - u) = b, \quad \frac{y + z + u}{x^2} = c,$$

dimodochè all'equazione proposta apparterrà l'integrale

$$\frac{y+z+u}{x^2} = \varphi[x(y-z), x(z-u)].$$

131.

Equazioni del 2° ordine.

Nell'equazione del 2° ordine

$$1. \quad \frac{d^2z}{dx^2} + P \frac{d^2z}{dx dy} + Q \frac{d^2z}{dy^2} + R = 0$$

siano P, Q, R funzioni di $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$. Ponendo per brevità

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

l'equazione 1 assumerà la forma

$$2. \quad r + Ps + Qt + R = 0.$$

Ma dalle precedenti equazioni delle derivate parziali si hanno mercè la differenziazione di p e q le relazioni

$$dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy,$$

per mezzo delle quali si potranno eliminare r e t dall'equazione 2. Fatta questa eliminazione, risulterà l'equazione

$$dp dy + Q dx dq + R dx dy - s(dy^2 - P dx dy + Q dx^2) = 0.$$

Questa equazione, dovendo valere per ogni valore di s , somministra le due condizioni

$$3. \quad dp dy + Q dx dq + R dx dy = 0,$$

$$dy^2 - P dx dy + Q dx^2 = 0.$$

Or ponendo $dy = Kdx$, la seconda delle equazioni 3 si trasforma in

$$K^2 - PK + Q = 0,$$

le cui radici indicando con k e k_1 , la relazione tra y ed x sarà formata dalle due equazioni

$$4. \quad dy - kdx = 0, \quad dy - k_1dx = 0.$$

Nel tempo stesso la prima delle equazioni 3 coll'ajuto delle equazioni 4 ci dà

$$5. \quad kdp + Qdq + Rkdx = 0, \quad k_1dp + Qdq + Rk_1dx = 0.$$

Or si potranno risolvere le equazioni 4 e 5 rispetto k o k_1 , dimodochè essendo i loro integrali

$$U = a, \quad V = b,$$

disegnerà $U = F(V)$ il primo integrale dell'equazione 1. E cercando a norma del n° precedente l'integrale di questa equazione, si avrà l'integrale completo dell'equazione 1.

Si potrà ottenere ancora questo integrale, integrando, quando ciò sia possibile, le due coppie delle equazioni 4 e 5, e deducendone la relazione $U_1 = f(V_1)$; indi da questa equazione e da $U = F(V)$ si elimineranno p e q .

I calcoli all'uopo necessari potranno divenire così difficili, che nella loro stessa difficoltà la soluzione incontri un ostacolo insormontabile. Ma se P , Q , R sono costanti, l'equazione 1 sarà sempre risolubile, com'è già noto pei n° 127 e 128.

Anche le equazioni della forma

$$\frac{d^2z}{dx dy} = P, \quad \frac{d^2z}{dx dy} = P \frac{dz}{dx} + Q,$$

quando P e Q disegnino funzioni delle variabili indipendenti x ed y , ammettono una facile soluzione, col porvi

$$\frac{dz}{dx} = p; \text{ ciò che le trasforma nelle equazioni}$$

$$\frac{dp}{dy} = p, \quad \frac{dp}{dy} = p p + Q,$$

le quali si vanno ad integrare secondo i n° 129 e 130.

Esempio 1. L'equazione

$$q^2 \frac{d^2 z}{dx^2} - 2pq \frac{d^2 z}{dx dy} + p^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

ovvero
$$\frac{d^2 z}{dx^2} - 2 \frac{p}{q} \frac{d^2 z}{dx dy} + \frac{p^2}{q^2} \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

nella quale p e q hanno il significato di sopra detto, dà in vece dell'equazione 3 l'altra:

$$k^2 + 2 \frac{p}{q} k + \frac{p^2}{q^2} = 0, \text{ ovvero } qk + p = 0.$$

Mercè questo valore di k la relazione $dy - k dx = 0$ diviene

$$\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy = 0, \text{ quindi } z = a.$$

Ma la prima delle equazioni 3 ci dà

$$-p dp + q dq = 0, \text{ quindi } \frac{p}{q} = b \text{ e } \frac{p}{q} = \varphi z,$$

e poichè da $p - bq = 0$, ossia $\frac{dz}{dx} - b \frac{dz}{dy} = 0$

risulta
$$z = e^{bx} f y = f(y + b x),$$

sarà
$$z = f(y + x \varphi z).$$

Nello stesso modo dall'equazione

$$r x^2 + 2 s x y + t y^2 = 0$$

si ha l'integrale

$$z = x \varphi \left\{ \frac{y}{x} \right\} + \psi \left\{ \frac{y}{x} \right\},$$

e dall' equazione $r x^2 - t y^2 = 0$

l' integrale $z = (xy)^{\frac{1}{2}} \varphi \left\{ \frac{y}{x} \right\} + \psi(xy)$.

Esempio 2. L' equazione

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{4p}{x+y} = 0$$

a norma dell' equazione 3 somministra per k :

$$k^2 - 1 = 0, \text{ ovvero } k = +1, \text{ e } k = -1,$$

cosicchè le equazioni 3 e 4 producono i due sistemi

$$dy - dx = 0, \quad dp - dq + \frac{4p dx}{x+y} = 0,$$

$$dy + dx = 0, \quad dp + dq + \frac{4p dx}{x+y} = 0.$$

All' equazione $dy - dx = 0$ appartiene l' integrale $y - x = a$, pel quale a cagione di $x = y - a$ la corrispondente equazione

$$dp - dq + \frac{4p dx}{x+y} = 0 \text{ si trasforma in } dp - dq + \frac{4p dx}{2y-a} = 0,$$

ovvero in

$$(2y-a)(dp-dq) + 4p dx - 2p dy + 2p dx = 0,$$

quando si moltiplichi per $2y - a$ ed al prodotto si aggiunga $-2p(dy-dx) = 0$. Or si ha $2p dy = 2p dx$, e se invece di $2p dx$ si ponga l' equivalente $2dz - 2q dy$, si avrà l' equazione

$$(2y-a)(dp-dq) + 2(p-q) dy + 2dz = 0.$$

I due primi termini del primo membro di questa equazione rappresentando il differenziale completo di $(2y-a)(p-q)$, avremo dall' integrazione di essa

$$(2y-a)(p-q) + 2z = b = f_a,$$

*

ovvero, introducendovi il valore di a ,

$$p - q + \frac{2x}{y+x} = \frac{f(y-x)}{y+x}.$$

Inoltre l'equazione precedente $dy + dx = 0$ somministra l'integrale $y + x = c$, e se questo valore di $x + y$ s'introduca nell'ultima equazione, si avrà

$$\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} + \frac{2x}{c} = \frac{f(y-x)}{c},$$

donde pel n° 128 l'integrale

$$z = \frac{1}{c} e^{-\frac{2x}{c} + Dx} \int e^{\frac{2x}{c}} f(y-2x) + e^{-\frac{2x}{c}} \varphi(y+x).$$

Esempio 3. L'equazione

$$x \frac{d^2 z}{dx^2} = (n-1) \frac{dz}{dx}, \text{ ovvero } x \frac{dp}{dx} = (n-1)p$$

dà per primo integrale

$$p = \frac{dz}{dx} = x^{n-1} + \varphi y,$$

che poi conduce all'integrale

$$z = \frac{1}{n} x^n + x \varphi y + \psi y.$$

Similmente dall'equazione

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{ax}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

si ha l'integrale

$$z = \frac{1}{a} ax(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} ay^2 l(x + [x^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}) + x \varphi y + \psi y;$$

dall'equazione
$$\frac{d^2 z}{dx dy} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

si ottiene il primo integrale

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{2}{3}} + \varphi'(y, z),$$

donde

$$z = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}} + x\varphi'(y, z) + \psi(x, z);$$

del pari che da $\frac{d^2z}{dx dy} = xy$

l'integrale $z = \frac{1}{4} x^2 y^2 + \varphi y + \psi x.$

132.

Equazioni differenziali simultanee.

Se più equazioni differenziali tra più variabili $x, y, z, \dots$ che dipendano da una variabile t o da più di una, si considerino coesistenti, allora queste equazioni differenziali si diranno simultanee.

Coesistano n di tali equazioni, e sia n il numero delle variabili, che siano dipendenti dalla sola t : si potranno allora da $n-1$ equazioni eliminare altrettante variabili, ed ottenerne una sola tra t ed una delle variabili che ne dipendono. Questa equazione finale, quando sia integrabile, menerà a trovare le altre variabili.

L'eliminazione delle variabili è un'operazione puramente algebrica, e propriamente quella di eliminare $n-1$ incognite da n equazioni con n incognite, per ottenere una sola equazione con una sola incognita e con quantità costanti.

Siano

$$1. \quad \frac{dx}{dt} + P_x + Q_y = R, \quad \frac{dy}{dt} + P_x + Q_y = R,$$

ovvero

$dx + P_1 x dt + Q_1 y dt = R_1 dt$, $dy + P_2 x dt + Q_2 y dt = R_2 dt$
 due equazioni simultanee, nelle quali P, Q, R, P_1, Q_1, R_1
 potranno essere funzioni di t : se ne formerà una sola e-
 quazione, moltiplicando la seconda per una funzione K di
 t e sotto questa forma addizionandola alla prima. Si avrà
 così l'equazione

$$2. \quad (P + KP_1) \left\{ x + \frac{Q + KQ_1}{P + KP_1} y \right\} dt + dx + K dy = (R + KR_1) dt,$$

la quale sarà di primo ordine rispetto ad x e t , se si abbia

$$3. \quad dx + K dy = d \left\{ x + \frac{Q + KQ_1}{P + KP_1} y \right\}.$$

Pongasi quindi $x + \frac{Q + KQ_1}{P + KP_1} y = u$;

l'equazione 2 prenderà la forma

$$4. \quad (P + KP_1) u dt + du = (R + KR_1) dt.$$

È questa un'equazione lineare del 1° ordine in cui le va-
 riabili u e t si mostrano separate. Aggiungasi che l'equazione
 3 occasionando la relazione

$$K = \frac{Q + KQ_1}{P + KP_1},$$

K ne riporterà due valori.

Se i fattori P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 , sono costanti, lo sarà
 anche K , e l'equazione 4 potrà sempre integrarsi, dimo-
 dochè per ogni valore di K se ne avrà uno in t ed u , ed
 in conseguenza due equazioni, l'una in x e t , l'altra in
 y e t .

Queste due equazioni si potranno ancora ottenere mercè
 la differenziazione delle equazioni simultanee, come si ri-
 leverà dagli esempi che seguono.

Esempio 1. Siano date le equazioni simultanee

$$\frac{dx}{dt} + Ax + By = 0, \quad \frac{dy}{dt} + A_1x + B_1y = 0,$$

nelle quali A, B, A_1, B_1 , designano numeri costanti.

Si moltiplichi la seconda di esse per K , indi si addiziona alla prima, si avrà

$$(A + KA_1) \left\{ x + \frac{B + KB_1}{A + KA_1} y \right\} dt + dx + K dy = 0,$$

ovvero, per essere

$$dx + K dy = d \left\{ x + \frac{B + KB_1}{A + KA_1} y \right\} = du,$$

$$(A + KA_1) u dt + du = 0.$$

Da
$$\frac{B + KB_1}{A + KA_1} = K$$

segue
$$K^2 + \frac{A - B_1}{A_1} K - \frac{B}{A} = 0;$$

e dinotando con k e k_1 le radici di questa equazione, si avrà da

$$(A + kA_1) u dt + du = 0$$

l'integrale $u = Ce^{-ht}$, ponendo $h = A + kA_1$.

Similmente rispetto a k_1 si avrà

$$u_1 = C_1 e^{-h_1 t}, \text{ essendo } h_1 = A + k_1 A_1.$$

E poichè $du = dx + k dy$, $du_1 = dx + k_1 dy$,

l'integrazione di queste equazioni ci darà

$$x + ky = Ce^{-ht}, \quad x + k_1 y = C_1 e^{-h_1 t},$$

donde
$$y = \frac{Ce^{-ht} - C_1 e^{-h_1 t}}{k - k_1},$$

$$x = - \frac{k_1 C e^{-ht} - k C_1 e^{-h_1 t}}{k - k_1}.$$

Agl' integrali delle equazioni

$$du = dx + k dy, \quad du_1 = dx + k_1 dy$$

non si sono aggiunte costanti, poichè queste non sono più arbitrarie, ma in vece dipendenti da C e C_1 , e quindi unite a queste non ne formerebbero che due sole.

In generale le equazioni simultanee danno tante costanti, per quante ne indica la somma dei numeri di ordine massimo delle derivate di ciascuna equazione.

Dagli ottenuti valori di x ed y si dedurranno facilmente le forme convenienti al caso in cui le radici k e k_1 siano eguali ed immaginarie.

Or risolviamo le equazioni con altro metodo.

Si moltiplichi la prima delle equazioni date per $D + B_1$, D indicando la derivata rispetto a t , vale a dire che si porrà in vece di x , p. e. la quantità

$$(D + B_1)x = Dx + B_1x = \frac{dx}{dt} + B_1x,$$

ovvero in vece di $\frac{dx}{dt}$ la quantità

$$\frac{(D + B_1)dx}{dt} = \frac{Ddx}{dt} + B_1 \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} + B_1 \frac{dx}{dt}.$$

E così dalla prima equazione si avrà

$$\frac{d^2x}{dt^2} + B_1 \frac{dx}{dt} + A \frac{dx}{dt} + AB_1x + B \frac{dy}{dt} + BB_1y = 0.$$

Or sottraendone la seconda equazione moltiplicata per B , cioè

$$B \frac{dy}{dt} + A_1Bx + BB_1y = 0,$$

y sparisce e si ottiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (A + B_1) \frac{dx}{dt} + (AB_1 - A_1B) = 0.$$

Siano a , b le radici dell'equazione

$$z^2 + (A + B_1)z + (AB_1 - A_1B) = 0;$$

l'ultima equazione differenziale che si è trovata, assumerà la forma

$$(D + a)(D + b)x = 0,$$

il cui integrale, com'è noto, è indicato da

$$x = C_1 e^{-at} + C_2 e^{-bt}.$$

Sostituendo questo valore nella prima delle equazioni date, si avrà

$$y = \frac{a-A}{B} C_1 e^{-at} + \frac{b-A}{B} C_2 e^{-bt}.$$

Questi valori di x ed y differiscono da quelli precedentemente ottenuti sol per le costanti, come è facile a vedersi.

Sia per l'una sia per l'altra via si troverà egualmente che le equazioni simultanee

$$\frac{dx}{dt} + Ay = 0, \quad \frac{dy}{dt} + Bx = 0,$$

ponendovi $AB = n^2$, conducono ai valori

$$x = C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt}, \quad y = \left\{ \frac{B}{A} \right\}^{\frac{1}{2}} C_1 e^{-nt} - \left\{ \frac{B}{A} \right\}^{\frac{1}{2}} C_2 e^{nt},$$

e che le equazioni

$$\frac{dx}{dt} + 4x + 3y = t, \quad \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = e^t$$

danno gl'integrali

$$x = -\frac{31}{196} + \frac{5}{14} t - \frac{1}{8} e^t + C_1 e^{-7t} + C_2 e^{-2t},$$

$$y = \frac{9}{98} - \frac{1}{7} t + \frac{5}{24} e^t - \frac{8}{3} C_1 e^{-7t} - C_2 e^{-2t}.$$

Esempio 2. Dalle tre equazioni simultanee

$$\frac{dx}{dt} + by + cz = 0, \quad \frac{dy}{dt} + ax + c, z = 0, \quad \frac{dz}{dt} + a, x + b, y = 0$$

si elimini primieramente z . Ciò si avrà, moltiplicando la prima per $(D^2 + a)$ nel senso indicato nell'esempio 1, la seconda per $-(bD + \beta)$, la terza per $-(cD + \gamma)$, ed addizionando le tre equazioni così ottenute. Se le quantità arbitrarie α, β, γ si utilizzino-ad eliminare y e z dalle nuove equazioni differenziali, otterremo per la loro determinazione le quattro equazioni

$$\beta + b, c = 0, \quad \gamma + bc, = 0, \quad \alpha b - \gamma b, = 0, \quad \alpha c - \beta c, = 0$$

dalle quali risulteranno

$$\alpha = -b, c, \quad \beta = -b, c, \quad \gamma = -bc,$$

dimodochè la già formata equazione differenziale diverrà

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha - ab - a, c) \frac{dx}{dt} - (a\beta + a, \gamma) x = 0,$$

$$\text{ovvero} \quad \frac{d^2x}{dt^2} - h \frac{dx}{dt} + k = 0,$$

ponendo

$$\begin{aligned} \alpha - ab - a, c &= -(b, c, + ab + a, c) = -h \\ -a\beta - a, \gamma &= ab, c + a, bc, = k. \end{aligned}$$

L'integrale dell'ultima equazione è facile a trovarsi, imperocchè dinotando con r, r_1, r_2 le radici dell'equazione

$$z^2 - hz + k = 0,$$

$$\text{sarà} \quad x = Ce^{rt} + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Mercè questa equazione si avranno dalle date i valori di y e z ; si avrà y dalla prima e seconda equazione dopo aver eliminata z .

Esempio 3. Siano date le equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} - ay - bx = c, \quad \frac{d^2y}{dt^2} - a, y - b, x = c,.$$

Moltiplicando la prima per $(D^2 - a_1)$, la seconda per a , indi addizionandole si avrà l'equazione

$$\frac{d^4x}{dt^4} - (a_1 + b) \frac{d^2x}{dt^2} + (a_1b - ab_1)x = ac_1 - a_1c,$$

ovvero $(D^2 + r^2)(D^2 + r_1^2)x = ac_1 - a_1c,$

r^2 ed r_1^2 indicando le radici dell'equazione

$$z^2 - (a_1 + b)z + (a_1b - ab_1) = 0.$$

Secondo l'esempio 2 del n° 106 l'ultima equazione differenziale ha per integrale

$$x = -\frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} + C \cos(rx + h) + C_1 \cos(r_1x + h_1),$$

dimodochè risulterà per y il valore

$$y = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} - \frac{r^2 + b}{a} C \cos(rx + h) - \frac{r_1^2 + b}{a} C_1 \cos(r_1x + h_1).$$

Esempio 4. Eliminando u dalle equazioni

$$\frac{d^2z}{dx dy} + a \frac{du}{dy} = b, \quad \frac{d^2u}{dx dy} + c \frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

si avrà

$$\frac{d^2z}{dx^2 dy} - ac \frac{d^2z}{dx^2} = b, \quad \text{ovvero } D^2(D_1 - ac)z = b,$$

D_1 indicando la derivata rispetto ad y . Quindi si avrà per z il valore

$$z = D^{-2} \left\{ \frac{b}{ac} + e^{-acy} \varphi x \right\},$$

ovvero
$$z = \frac{bx^2}{2ac} + Fy + xfy + e^{-acy} \varphi x.$$

Esempio 5. Se nelle equazioni

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0 ,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 96 \frac{dx}{dt} - 9x + \frac{d^2y}{dt^2} + 50 \frac{dy}{dt} + 15y = 0$$

pongasi $x = e^{mt}$, $y = Ae^{mt}$ si perverrà alle altre due :

$$2m^2 + m + 1 + A(m^2 + m + 1) = 0 ,$$

$$m^2 + 96m - 9 + A(m^2 + 50m + 15) = 0 ,$$

dalle quali eliminando A risulta

$$m^4 + 4m^3 - 7m^2 - 22m + 24 = 0 ,$$

le cui radici sono $m = 1, 2, -3, -4$;

quindi $A = -\frac{4}{3}, -\frac{11}{7}, -\frac{16}{7}, -\frac{29}{13}$.

In conseguenza si avranno per x ed y i valori

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-3t} + C_4 e^{-4t} ,$$

$$y = -\frac{4}{3} C_1 e^t - \frac{11}{7} C_2 e^{2t} - \frac{16}{7} C_3 e^{-3t} - \frac{29}{13} C_4 e^{-4t} .$$

CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Definizione.

Quando da una funzione

$$1. \quad U = F(x, y,)$$

dipendente dalle variabili x ed y , se ne deduce la funzione differenziale

$$2. \quad V = f(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \dots)$$

si viene subito a conoscere lo stato in cui entra la funzione U , tostochè x si trasmuta in $x + dx$ ed y in $y + dy$. In questo cangiamento delle variabili x ed y e della funzione U rimangono inalterate sì le costanti da cui la funzione anche dipende, che la forma di essa, vale a dire la legge, secondo la quale le variabili sono tra esse e colle costanti unite in una espressione matematica.

Quest'alterazione delle variabili, e quindi della funzione stessa è intanto capace di più generale concetto, dimodochè l'alterazione delle variabili produca non solamente quella del valore, ma della forma ancora della funzione. Se l'equazione 1 esprime, a modo di esempio, una superficie, col porvi $x + dx$ invece di x , $y + dy$ invece di y , il valore della funzione verrà alterato, mentre i nuovi valori di x ed y dinotano un altro punto della superficie: questa dunque conserva la sua natura. Ma le alterazioni delle variabili x ed y potranno intendersi in modo che il punto da esse indicato non si trovi più sulla superficie primitiva, ma sopra una superficie prossima, dimodochè insieme all'alterazione delle variabili ha luogo un'alterazione delle costanti, ossia della forma della superficie.

Un'infinitesima alterazione delle variabili che produce un'alterazione della forma della funzione che ne dipende, o che ne

sia prodotta, dicesi *variazione*, e s'indica coll'apporvi la lettere δ . Così indicando con

$$3. \quad U = F(x, y, z, \dots)$$

una funzione delle variabili $x, y, z, \dots$, la variazione di U sarà dinotata da

$$4. \quad \delta U = \varphi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, \dots) - F(x, y, z, \dots)$$

l'indice φ della funzione indicando la nuova relazione in cui sono entrate le variabili mercè le loro variazioni.

In conseguenza di questa definizione sembra che un' essenziale differenza avesse luogo tra le variazioni ed i differenziali delle quantità variabili, stantechè le prime cangiano natura e forma della funzione, mentre i secondi ne mutano il solo valore. Purtuttavia la differenza non è che apparente, giacchè le variazioni possono considerarsi come differenziali. Ed in vero potendosi riguardar U come una funzione la quale dipenda non solo da $x, y, z, \dots$ ma eziandio da un'altra variabile t , avremo così che l'equazione 3 sarà un caso speciale dell'equazione generale

$$5. \quad U = \Phi(x, y, z, \dots, t)$$

definito dall'ipotesi di $t = \text{costante } a$, e che il cangiamento della relazione in cui U sta rispetto ad $x, y, z, \dots$ dipenderà dall'alterazione del valore della variabile t . Considerata da questo punto di veduta, la variazione di U si presenta qual differenziale parziale $\frac{dU}{dt}dt$ nell'ipotesi di $t = a$.

Or perchè $x, y, z, \dots$ variassero insieme ad U , è necessario, come sarà dimostrato nei seguenti numeri, di trattarle quali funzioni indeterminate di t . Laonde la variazione di U potrà, nel senso dell'equazione 4, essere espressa mercè la relazione

$$6. \quad \delta U = \left\{ \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dU}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dt} + \dots \right\} dt.$$

In conseguenza di queste osservazioni le variazioni non richiederebbero rispetto ai differenziali alcuno speciale contrassegno, essendo identiche le leggi delle due specie di alterazione, qualunque sia per essere il numero delle variabili da cui la funzione dipende.

Intanto il calcolo delle variazioni viene di molto agevolato dalla speciale notazione di sopra indicata. Perciò indicando

$$V = f(x, y, y', y'', y''', \dots)$$

una funzione delle variabili x ed y e delle derivate $y', y'', y''', \dots$ avremo, in considerazione dell'equazione 6,

$$7. \quad \delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dy'} \delta y' + \frac{dV}{dy''} \delta y'' + \dots$$

134.

Variazione della funzione V.

Per rappresentare la variazione della funzione V , noi abbiamo bisogno del teorema: se una funzione o variabile z sia differenziata e variata, sarà indifferente pel risultamento del calcolo l'ordine in cui le due operazioni si succedano; vale a dire che sarà

$$1. \quad d\delta z = \delta dz.$$

Per vedere chiaramente la verità di questa proposizione, basta considerare che dalla variazione di $z + dz$, ossia da

$$\delta(z + dz) = \delta z + \delta dz$$

$$\text{risulta} \quad \delta dz = \delta(z + dz) - \delta z.$$

Ma il secondo membro di questa equazione non è che $d\delta z$, essendochè in esso si legge di essersi sostituita $z + dz$ a z in δz , e dal risultamento essersi sottratta δz ; si è dunque differenziata δz , e così l'equazione 1 rimane dimostrata.

Applicando ancora questo teorema alle funzioni d^2z , d^3z , .. si ottiene

$$\partial d^2z = \partial d dz = d \partial dz = d d \partial z = d^2 \partial z,$$

$$\partial d^3z = \partial d^2 dz = d^2 \partial dz = d^2 d \partial z = d^3 \partial z,$$

ed in generale $\partial d^n z = d^n \partial z$.

Or poniamo il semplice caso che la funzione V contenga le variabili x , y colle derivate y' , y'' , y''' , ... Per l'equazione 7 del n° 133 la variazione di V sarà espressa da

$$2. \quad \delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dy'} \delta y' + \frac{dV}{dy''} \delta y'' + \dots$$

E poichè nelle derivate y' , y'' , ... di y la variabile dx è considerata come costante, così avendo riguardo all'equazione 1 si otterrà:

$$\begin{aligned} \delta y' &= \partial \frac{dy}{dx} = \frac{\partial dy}{dx} - \frac{dy \partial dx}{dx^2} = \frac{d \partial y}{dx} - y' \frac{d \partial x}{dx} \\ &= \frac{d(\partial y - y' \partial x)}{dx} + \frac{dy'}{dx} \delta x = \frac{d(\partial y - y' \partial x)}{dx} + y'' \delta x. \end{aligned}$$

Inoltre essendo y'' ad y' ed y''' nella stessa relazione che y' ha verso y ed y'' , si avrà

$$\delta y'' = \frac{d(\partial y' - y'' \partial x)}{dx} + y''' \delta x,$$

ovvero, introducendovi il valore di $\delta y'$ tolto dall'equazione precedente,

$$\delta y'' = \frac{d^2(\partial y - y' \partial x)}{dx^2} + y''' \delta x;$$

e nello stesso modo si avrà

$$\delta y''' = \frac{d^3(\partial y - y' \partial x)}{dx^3} + y'''' \delta x,$$

ecc.

Introducendo nell'equazione 2 questi valori di $\delta y'$, $\delta y''$,

$\delta y''', \dots$ e ponendo δx in vece di $\delta y - y'\delta x$, ed $y'\delta x + \delta x$ in vece di δy , si ottiene

$$\delta V = \left\{ \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} y' + \frac{dV}{dy'} y'' + \frac{dV}{dy''} y''' + \dots \right\} \delta x \\ + \frac{dV}{dy} \delta x + \frac{dV}{dy'} \frac{d\delta x}{dx} + \frac{dV}{dy''} \frac{d^2\delta x}{dx^2} + \dots$$

Ma il fattore di δx è il differenziale completo di V , diviso per dx : sarà dunque

$$3. \delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta x + \frac{dV}{dy'} \frac{d\delta x}{dx} + \frac{dV}{dy''} \frac{d^2\delta x}{dx^2} + \dots,$$

e questa equazione è l'espressione generale della variazione di una funzione V di due variabili, nella quale $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dy'}$, .. dinotano le derivate parziali rispetto ad y , y' , .. ma $\frac{dV}{dx}$ rappresenta il differenziale totale diviso per dx .

Se V contenga una seconda variabile z , dipendente da x , colle sue derivate

$$\frac{dz}{dx} = z', \quad \frac{d^2z}{dx^2} = z'', \dots$$

bisognerà aggiungere all'equazione 3 anche

$$\frac{dV}{dz} \delta z + \frac{dV}{dz'} \frac{d\delta z}{dx} + \frac{dV}{dz''} \frac{d^2\delta z}{dx^2} + \dots,$$

ponendo per brevità $\delta z - z'\delta x = \delta z_1$.

Se V disegni una funzione di x , y , z e delle derivate parziali relative alle variabili indipendenti x ed y ,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

si avrà per l'equazione 7 del n° 133,

*

$$4. \quad \delta V = \frac{dV}{dx} \delta x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dp} \delta p + \frac{dV}{dq} \delta q \\ + \frac{dV}{dr} \delta r + \frac{dV}{ds} \delta s + \frac{dV}{dt} \delta t + \dots$$

Or quanto alla variazione di p si ha l'equazione

$$\partial p = \partial \frac{dz}{dx} = \frac{d\partial z}{dx} - p \frac{d\partial x}{dx} = \frac{d(\partial z - p\partial x)}{dx} + \frac{dp}{dx} \partial x,$$

la quale, quando vi si ponga per semplicità δy indipendente da x , assumerà la forma

$$\partial p = \frac{d(\partial z - p\partial x - q\delta y)}{dx} + \frac{dp}{dx} \partial x + \frac{dp}{dy} \delta y.$$

Nello stesso modo, e ponendo ∂x indipendente da y , si avrà

$$\partial q = \frac{d(\partial z - p\partial x - q\delta y)}{dy} + \frac{dq}{dx} \partial x + \frac{dq}{dy} \delta y.$$

e similmente si otterranno le variazioni di r , s e t espresse da

$$\partial r = \frac{d^2(\partial z - p\partial x - q\delta y)}{dx^2} + \frac{dr}{dx} \partial x + \frac{dr}{dy} \delta y,$$

$$\partial s = \frac{d^2(\partial z - p\partial x - q\delta y)}{dx dy} + \frac{ds}{dx} \partial x + \frac{ds}{dy} \delta y,$$

$$\partial t = \frac{d^2(\partial z - p\partial x - q\delta y)}{dy^2} + \frac{dt}{dx} \partial x + \frac{dt}{dy} \delta y,$$

ecc.

ecc.

Introducendo questi valori nell'equazione 4 dopo aver posto per brevità

$$\partial z - p\partial x - q\delta y = \partial \alpha, \text{ ossia } \partial z = \partial \alpha + p\partial x + q\delta y,$$

avremo l'espressione generale della variazione di V :

$$5. \quad \delta V = \frac{dV}{dx} \partial x + \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dz} \partial z + \frac{dV}{dp} \frac{d\partial x}{dx} + \frac{dV}{dq} \frac{d\partial \alpha}{dy} \\ + \frac{dV}{dr} \frac{d^2\partial \alpha}{dx^2} + \frac{dV}{ds} \frac{d^2\partial x}{dx dy} + \frac{dV}{dt} \frac{d^2\partial \alpha}{dy^2} + \dots$$

Variazione dell'integrale $\int Vdx$.

Sia dinuovo V una funzione delle quantità $y, y', y'', y''', \dots$ che in un modo indeterminato dipendano da x . Supponendo che U sia il valore dell'integrale $\int Vdx$, si avrà l'equazione

$$Vdx = dU,$$

quindi $\delta(Vdx) = \delta dU = d\delta U,$

e $\int \delta(Vdx) = \delta U$, ossia

1. $\int \delta(Vdx) = \delta \int Vdx,$

dimodochè sarà indifferente pel valore di una funzione l'ordine, secondo il quale sarà integrata e variata.

Essendo inoltre

$$\delta(Vdx) = \delta V dx + V d\delta x,$$

e dall'integrazione per parti avendosi

$$\int V d\delta x = V\delta x - \int dV \delta x,$$

si avrà l'equazione

$$\delta \int Vdx = V\delta x + \int (\delta V dx - dV \delta x),$$

ovvero, mercè l'equazione 3 del n° 134 :

$$2. \delta \int Vdx = V\delta x + \left\{ \frac{dV}{dy} \delta \alpha dx + \frac{dV}{dy'} d\delta \alpha + \frac{dV}{dy''} \frac{d^2 \delta \alpha}{dx} + \dots \right\}.$$

Per eliminare i differenziali della variazione $\delta \alpha$, si potrà integrare per parti. Così si avrà

$$\int \frac{dV}{dy'} d\delta \alpha = \frac{dV}{dy'} \delta \alpha - \int d \frac{dV}{dy'} \delta \alpha$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dV}{dy'} \frac{d^2 \delta x}{dx} &= \frac{dV}{dy''} \frac{d \delta x}{dx} - \int d \frac{dV}{dy'} \frac{d \delta x}{dx} \\ &= \frac{dV}{dy''} \frac{d \delta x}{dx} - d \frac{dV}{dy''} \frac{\delta x}{dx} + \int d^2 \frac{dV}{dy''} \frac{\delta x}{dx},\end{aligned}$$

e così di seguito ; quindi

$$\begin{aligned}3. \quad \delta \int V dx &= \left\{ \frac{dV}{dy'} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dy''} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dy'''} - + \dots \right\} \delta x \\ &+ \left\{ \frac{dV}{dy''} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dy'''} + - \dots \right\} \frac{d \delta x}{dx} + \dots \\ &+ \left\{ \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dy'} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dy''} - + \dots \right\} \delta x dx.\end{aligned}$$

Se nella funzione V la variabile x oltre ad essere dipendente da $y', y'', y''', \dots$, lo fosse ancora e di una maniera qualunque da $z', z'', z''', \dots$, si dovrebbero aggiungere al secondo membro dell'ultima equazione due altri termini che si otterrebbero dallo stesso secondo membro scambiandovi y con z , e δx con δz , ponendo $\delta z_1 = \delta z - z' \delta x$.

Nello stesso modo si potrà rappresentare, mercè l'equazione 5 del n° precedente, la variazione di un integrale doppio

$$\iint V dx dy,$$

V dinotando una funzione delle variabili indipendenti x ed y

Per comprendere il giusto senso dell'equazione 3 è da considerarsi che la legge secondo la quale y ovvero y' e z dipendono da x , vi rimane indeterminata, e che l'integrazione di $V dx$ potrà attuarsi soltanto allora che questa legge sarà data. Ma se intanto la forma $V dx$ sia immediato risultamento della differenziazione di una determinata funzione di $x, y, y', y'', \dots$, allora potrà la medesima, libera da ogni relazione esistente tra x ed y , essere integrata. In que-

sto caso la forma $\int V dx$ ed in conseguenza la sua variazione $\delta \int V dx$ sarà liberata da segno integrale, vale a dire che l'integrale del secondo membro potrà necessariamente esser rappresentato. Ma poichè il fattore $\delta \alpha$ è indeterminato, l'integrazione non è possibile; quindi è che il moltiplicatore di $\delta \alpha$ dovrà esser nullo, e l'equazione

$$4. \quad \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dy'} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dy'^2} - \frac{1}{dx^3} d^3 \frac{dV}{dy'^3} + \dots = 0$$

esprimerà la condizione d'integrabilità della funzione $V dx$.

Se poi nella funzione V anche $z, z', z'', \dots$, dipendessero per arbitraria relazione da x , allora bisognerebbe all'ultima equazione di condizione aggiungere l'altra:

$$5. \quad \frac{dV}{dz} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dz'} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dz'^2} - + \dots = 0.$$

136.

Massimi e minimi.

Il calcolo delle variazioni è soprattutto adattato a ricercare tra le variabili contenute in una funzione quelle relazioni, per le quali la funzione stessa o il suo integrale otterrà un valore massimo o minimo.

E per recarne in generale un esempio semplice, consideriamo in $V dx$ una funzione di $x, y, y', y'', \dots$, e sia da cercarsi l'equazione $y = \varphi x$, per la quale l'integrale $\int V dx$ tra i limiti $x = a$ ed $x = b$, ossia

$$\int_a^b V dx = F(a, b)$$

divenga un massimo od un minimo.

Quando per variazione delle variabili l'equazione $y = \varphi x$ passa allo stato prossimo $y = \psi x$, allora la funzione $F(a, b)$

soffre un'alterazione infinitesima $\delta F(a, b)$. Quindi se rispetto ad ogni altro modo di unione delle variabili x ed y , debba $F(a, b)$ essere un massimo o un minimo, dovrà, in conseguenza delle leggi del n° 19 e del significato delle variazioni n° 133, sparire $\delta F(a, b)$, e la prima delle variazioni superiori $\delta^2 F(a, b)$, $\delta^3 F(a, b)$, . . che non si annulli, dovrà esser di ordine dispari. E secondochè questa variazione superiore prenderà un valore positivo o negativo, avrà luogo un minimo ovvero un massimo. Si avrà dunque

$$1. \quad \oint_a^b V dx = 0,$$

e questa variazione coll'ajuto dell'equazione 3 del n° precedente potrà presentarsi in modo che l'integrale non contenga alcun differenziale delle variazioni ∂x e ∂y . Or se B ed A esprimano le somme che per $x=b$ ed $x=a$ precedono l'integrale definito dell'equazione 3 n° 135, l'equazione 1, ponendovi, come ivi si è fatto, $\partial x = \partial y - p \partial x$, ci darà

$$2. \quad 0 = B - A + \int_a^b \left\{ \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dy} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dy} - + \dots \right\} \partial x dx.$$

Or i limiti a e b potranno essere invariabili o variabili, nel qual ultimo caso saranno determinati per mezzo delle equazioni di condizione. Nel primo caso saranno nulli tanto i differenziali che le variazioni di a e b , quindi si annullerà la variazione ∂x portandola su a e b , e con essa si annulleranno A e B , come dimostra la loro origine. L'equazione 2 passerà in conseguenza alla forma più semplice:

$$3. \quad 0 = \int_a^b \left\{ \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dy} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dy} - + \dots \right\} \partial x dx,$$

la quale, a cagione dell'indeterminazione di ∂x , ci dà

$$4. \quad \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d \frac{dV}{dy'} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dV}{dy''} - + \dots = 0.$$

Dall'equazione 4 per mezzo d'integrazione si dedurrà la relazione tra x ed y , la quale dichiarerà un massimo od un minimo quando corrisponda alle già espresse condizioni per $\partial^2 F(a, b), \dots$

Nell'ipotesi poi che i limiti a e b siano alterabili, poniamo che a' e b' ne siano i valori che rendano soddisfatta l'equazione 2. Or supponendo che a' e b' siano inalterabili, l'equazione 4 sarà una conseguenza di questa ipotesi; e così l'alterabilità dei limiti a e b non esercita alcuna influenza sulla relazione $y = \varphi x$, la quale deve aver luogo insieme al massimo o minimo $\int_a^b V dx$. Sarà dunque $B - A = 0$, e poichè b' è indipendente da a' , dovrà essere $A = 0, B = 0$. Per mezzo delle quali equazioni si potranno rinvenire i valori di a' e b' .

Esempio 1. Qual sarà l'equazione $y = \varphi x$ che renderà un minimo l'integrale

$$s = \int (y' dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}},$$

x indicando la variabile indipendente?

Quantunque non siano indicati i limiti tra quali s dovrà prendere il valore minimo, purtuttavia risulta dalle precedenti generali considerazioni che pel minimo dovrà essere

$$\partial s = \partial \int (y' dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Or si ha

$$\partial s = \int \left\{ \frac{y \partial y dx^2}{ds} + \frac{y^2 dx \partial dx}{ds} + \frac{dy \partial dy}{ds} \right\} = 0,$$

ovvero, scambiando l'ordine dei segni d e ∂ ed integrando per parti gli ultimi due termini,

$$0 = \frac{y^2 dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y - \int d\left\{y^2 \frac{dx}{ds}\right\} \delta x + \int \left\{y \frac{dx^2}{ds} - d \frac{dy}{ds}\right\} \delta y.$$

Or qualunque siano per essere i limiti dell' integrale , i termini che lo precedono , dovranno annullarsi ; e poichè δx e δy sono tra loro indipendenti , i loro coefficienti sotto i segni d' integrazione dovranno esser nulli ; quindi avremo

$$y^2 \frac{dx}{ds} = c, \quad \frac{y dx^2}{ds} = d \frac{dy}{ds}.$$

La prima di queste due equazioni di condizione ci dà

$$y^2 dx = c(y^2 dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}},$$

ovvero , quadrando e separando le variabili ,

$$dx = \frac{c dy}{y(y^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{cioè } t = \alpha - \text{arc sen } \frac{c}{y},$$

donde $c = y \text{sen}(\alpha - x).$

Il proposto problema ha un significato geometrico : vi si cerca il minimo della lunghezza di una curva tra due raggi vettori y . E l'ultima equazione dimostra che il minimo appartiene alla retta (vedi n° 140).

Esempio 2. Qual'è la curva, che per $ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}$ renda minimo l' integrale

$$\int \frac{ds}{(x_1 - x)^{\frac{1}{2}}}.$$

esteso da $x = x_1$ fino ad $x = x$, x ed y indicando coordinate rettangolari ?

La condizione del minimo dà luogo all'equazione

$$\delta \int \frac{ds}{(x_1 - x)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

dalla quale risulta

$$\int \left\{ \frac{\partial ds}{(x_1 - x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ds(\partial x_1 - \partial x)}{2(x_1 - x)^{\frac{3}{2}}} \right\} = 0,$$

lasciando variabile x , a cagione della variabilità dei punti estremi della curva. Nel tempo stesso dal valore di ds si ha

$$\partial ds = (dx d\partial x + dy d\partial y + dz d\partial z) : ds.$$

Introducendo questo valore nell'equazione precedente, eliminando i differenziali delle variazioni mercè integrazione per parti, e ponendo per brevità $u = (x_1 - x)^{\frac{1}{2}}$, si avrà

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u_1} \left\{ \frac{dx_1}{ds_1} \partial x_1 + \frac{dy_1}{ds_1} \partial y_1 + \frac{dz_1}{ds_1} \partial z_1 \right\} \\ & - \frac{1}{u_1} \left\{ \frac{dx_1}{ds_1} \partial x_1 + \frac{dy_1}{ds_1} \partial y_1 + \frac{dz_1}{ds_1} \partial z_1 \right\} - \partial x_1 \int \frac{ds}{2u^3} \\ & + \int \left[\left\{ \frac{ds}{2u^3} - d \frac{dx}{uds} \right\} \partial x - d \frac{dy}{uds} \partial y - d \frac{dz}{uds} \partial z \right] = 0, \end{aligned}$$

I singoli termini dell'integrale, attesa l'indipendenza delle variazioni ∂x , ∂y , ∂z , danno in conseguenza dell'equazione 4 le tre condizioni

$$\frac{ds}{2u_1} - d \frac{dx}{uds} = 0, \quad d \frac{dy}{uds} = 0, \quad d \frac{dz}{uds} = 0.$$

Dalle due ultime equazioni seguono le altre due

$$\frac{dy}{uds} = A, \quad \frac{dz}{uds} = B,$$

A e B dinotando numeri costanti. Quindi mercè l'eliminazione di uds si avrà

$$A dz - B dy = 0, \quad \text{ed} \quad Az - By = C.$$

Quest'ultima equazione, in conseguenza di principii geome-

trici, indica un piano parallelo all'asse delle x , nel quale dovrà trovarsi la curva richiesta. Prendendo per piano di questa curva quello delle x, y dovremo nell'equazione

$$\frac{dy}{uds} = A \text{ porre } ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}},$$

dove per $A = (2a)^{-1}$ risulta

$$dy = dx \left\{ \frac{x, -x}{2a - x, +x} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

ovvero ponendo $2a - x, +x = x'$,

$$dy = dx \left\{ \frac{2a - x'}{x'} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Questa equazione differenziale è quella della cicloide, il cui circolo generatore ha il diametro a . Quindi per la proprietà contenuta nel problema un punto pesante percorrerà l'arco compreso tra due punti di una cicloide, che abbia l'asse verticale ed il vertice in basso, in un tempo minore di quello che impiegherebbe per ogni altra curva condotta per gli stessi due punti. La cicloide appellasi in conseguenza brachistocrona.

Esempio 3. Cerchiamo il valore minimo dell'integrale

$$\iint dx dy (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}},$$

supponendo che sia $dz = p dx + q dy$, e $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$.

Il doppio integrale esprime la grandezza di una superficie, la cui equazione è sottoposta alla condizione precedente.

I limiti essendo riguardati come costanti, nel passaggio della superficie ad un'altra che ne differisce per un infinitamente piccolo si potranno supporre invariabili x e y , e variabile la sola z . Da ciò risulta:

$$\begin{aligned} \partial \iint dx dy (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} &= \iint dx dy \partial (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \iint \frac{p \partial p + q \partial q}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Ma l'equazione di condizione dando

$$\partial p = \partial \frac{dz}{dx} = \frac{d \partial z}{dx}, \quad \partial q = \partial \frac{dz}{dy} = \frac{d \partial z}{dy};$$

dall'equazione precedente, ponendovi

$$\frac{p}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} = P, \quad \frac{q}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} = Q,$$

si avrà
$$\iint \left\{ P \frac{d \partial z}{dx} dx dy + Q \frac{d \partial z}{dy} dy dx \right\} = 0$$

ovvero
$$\int dy \int P \frac{d \partial z}{dx} dx + \int dx \int Q \frac{d \partial z}{dy} dy = 0.$$

Eliminando i differenziali della variazione ∂z mercè integrazione per parti, l'equazione 4 ci darà per equazione differenziale della richiesta superficie

$$\iint \left\{ \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} \right\} dx dy \partial z = 0,$$

quindi
$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} = 0,$$

ovvero, restituendovi i valori di P e Q ,

$$(1 + q^2) r - 2pq s + (1 + p^2) t = 0,$$

nella quale, come di ordinario, si suppone $r = \frac{dp}{dx}$,

$$s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \quad t = \frac{dq}{dy}.$$

L'integrale dell'ultima equazione, quando vi si ponga

$$x = u + v, \quad y = \varphi u + \psi v,$$

secondo Monge è

$$z = \int du (-1 - [\varphi' u]^2)^{\frac{1}{2}} + \int dv (-1 - [\psi' u]^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Esempio 4. Tra tutte le relazioni di x ad y trovar quella, per la quale nell' ipotesi di $x = x$ ed $y = k$, l' espressione

$$V = \left\{ y + (a-x) \frac{dy}{dx} \right\} \left\{ y + (b-x) \frac{dy}{dx} \right\}$$

dia un massimo o un minimo.

In questo caso si ha

$$\begin{aligned} \partial V &= \left\{ y + (a-x) \frac{dy}{dx} \right\} \left\{ \partial y + (a-x) \frac{d \partial y}{dx} \right\} \\ &+ \left\{ y + (b-x) \frac{dy}{dx} \right\} \left\{ \partial y + (b-x) \frac{d \partial y}{dx} \right\} = 0. \end{aligned}$$

E poichè y deve rappresentare un valore costante k , sarà $\partial y = 0$, ed in conseguenza

$$\left\{ y + (a-x) \frac{dy}{dx} \right\} (a-x) + \left\{ y + (b-x) \frac{dy}{dx} \right\} (b-x) = 0.$$

ovvero, semplificando l' espressione ad uso dell' integrazione,

$$\frac{dy}{y} = \frac{(2x-a-b)dx}{2(a-x)(b-x)} = \frac{dx}{2(a-x)} + \frac{dx}{2(b-x)},$$

il cui integrale è

$$y^2 = c(x-a)(x-b),$$

la cui costante c dovrà determinarsi per mezzo delle condizioni $x = x$, $y = k$.

A cagione di $\partial y = 0$ si ha inoltre

$$\partial^2 V = 2(x-a)(x-b) \left\{ \frac{d \partial y}{dx} \right\}^2.$$

Questa espressione sarà positiva per tutti i valori di x , pei quali $x - a$ ed $y - b$ risulteranno di uno stesso segno, e negativa quando $x - a$ ed $y - b$ avranno segni diversi, vale a dire che V sarà un massimo per tutti i valori di x compresi tra a e b , ed un minimo al contrario per ogni altro valore di x .

Quanto alla grandezza di V , dietro un semplice calcolo da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x - a - b)y}{2x - a)(x - b)}$$

e dall'equazione proposta

si avrà $V = -\frac{c}{4}(a-b)^2$, quindi V costante.

Il problema ha il seguente significato geometrico. La tangente ad un punto x_1, y_1 di una curva piana è rappresentata da

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1),$$

donde per $x = a$ ed $x = b$ risultano le coordinate

$$y_1 + (a - x_1) \frac{dy}{dx}, \quad y_1 + (b - x_1) \frac{dy}{dx}.$$

Quindi, scambiando ordinatamente x_1 ed y_1 con x ed y ,

$$V = \left\{ y + (a - x) \frac{dy}{dx} \right\} \left\{ y + (b - x) \frac{dy}{dx} \right\}$$

esprimerà il prodotto delle ordinate corrispondenti alle ascisse $x = a$, $x = b$, ed intersecate dalla tangente alla curva. Or per tutte le curve che passano pel punto $x = x$, $y = k$, il suddetto prodotto sarà un massimo quando sarà $a > x$ e nel tempo stesso $b > x$, ovvero $a < x$ e contemporaneamente $b < x$; all'infuori di questo un minimo, supponendo che nei due casi alla curva convenga l'equazione

$$y^2 = c(x - a)(x - b).$$

Per definire questa curva, la quale è di secondo grado, trasportiamo l'origine nel punto $x = a$, dimodochè l'ordinata di questo punto sarà zero. Rispetto alle nuove ascisse, che dinoteremo con x' , si avrà dunque $x = x' + a$, ed

$$y = cx'(x' - [b - a]).$$

Nel primo caso, cioè quando $x - a$ ed $x - b$ hanno lo stesso segno, questa curva è un'ellisse, il cui asse maggiore è $b - a$, il minore $(b - a)\sqrt{-c}$, ed i vertici sono $x' = a$, $x' = b$. La tangente dovrà quindi esser prolungata da un lato e l'altro per incontrare le suddette ordinate.

Nell'altro caso la precedente equazione rappresenterà un'iperbole, i cui assi reale ed immaginario sono espressi da $b - a$ e $(b - a)\sqrt{c}$, ed i vertici stanno nei punti $x' = a$, $x' = b$. La tangente dunque dovrà esser prolungata da un solo lato.

L'ellisse e l'iperbole hanno dunque la proprietà che il prodotto dei segmenti, che la tangente determina sulle ordinate ai vertici, rimane costante, e che per tutte le curve che passano per un punto M di queste due curve il suddetto prodotto sarà massimo presso l'ellisse e minimo presso l'iperbole. (Vedi i n° 148 e 151).

137.

Continuazione.

Nelle ricerche del n° precedente si è supposto che le variabili primitive contenute in V fossero tra esse indipendenti. Se ciò non avviene, allora mercè le equazioni di condizione che esprimono la dipendenza delle variabili ne verrà eliminato un numero pari a quello di esse equazioni, e si determineranno i valori indicati nelle rimanenti, come si è mostrato nel n° 48 rispetto ai massimi e minimi assoluti.

E poichè in questa come in quella teorica la eliminazione delle variabili può divenire laboriosa, così ci facciamo qui a percorrere una via consimile. Sia

$$V = F(x, y, z, \dots)$$

l'equazione di cui si cerca il valore massimo o minimo, e

$$W = \varphi(x, y, z, \dots) = 0$$

la data equazione di condizione. Per la proprietà dell'indicato valore della funzione V , sarà

$$\delta V = 0,$$

e per l'equazione di condizione, che dovrà esser soddisfatta indipendentemente dai valori delle variabili, sarà

$$\delta W = 0.$$

Quindi per giungere al massimo o minimo, si eliminerà una delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$, e ciò si avrà determinando rispetto alla variabile da eliminarsi il fattore indeterminato k nell'equazione

$$1. \quad \delta V + k \delta W = 0.$$

E tostochè sarà dichiarata x unica ed assoluta variabile indipendente, si avranno rispetto alle variazioni di V e W le equazioni

$$\delta V = \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dz} \delta z + \dots = 0,$$

$$\delta W = \frac{dW}{dy} \delta y + \frac{dW}{dz} \delta z + \dots = 0,$$

in conseguenza, avendo in considerazione l'equazione 1, si otterrà

$$\left\{ \frac{dV}{dy} + k \frac{dW}{dy} \right\} \delta y + \left\{ \frac{dV}{dz} + k \frac{dW}{dz} \right\} \delta z + \dots = 0,$$

e poichè δy e δz sono tra esse indipendenti, sarà

$$2. \quad \frac{dV}{dy} + k \frac{dW}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dz} + k \frac{dW}{dz} = 0.$$

Donde si rileva che per trovare il massimo o il minimo l'equazione 1 è da trattarsi come se le variabili fossero indipendenti. Le equazioni 2 che ne risultano, congiunte a quelle che sono date rispetto a V e W , meneranno alla determinazione di tutte le incognite.

L'andamento della ricerca dimostra la via da seguirsi nel caso che si avessero più equazioni di condizione.

Esempio 1. Sia da determinarsi il valore massimo o minimo della funzione $\int y dx$ nell'ipotesi che $\int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ debba rimaner costante.

Per la proprietà del massimo o minimo e della condizione $\int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = c$, dovrà essere nel tempo stesso

$$\delta \int y dx = 0, \quad \delta \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Ciò avverrà, pareggiando a zero la variazione dell'espressione

$$\int y dx + C \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

essendo C una costante, ossia ponendo

$$\delta \int y dx + C \delta \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Eseguendo il calcolo e considerando che si deve porre $\delta dx = 0$, si avrà

$$dx + d \frac{C dy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad \text{ovvero} \quad x + \frac{C dy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} = A,$$

ed integrando dinuovo

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 = C^2,$$

equazione, in cui rimane soltanto a determinare la costante C per mezzo della condizione $\int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = c$.

Il significato geometrico di questo problema sta in questo: tra tutte le curve di egual lunghezza, che passano per due punti dati, la curva circolare è quella che insieme alle ordinate dei punti dati ed al segmento corrispondente dell'asse delle ascisse racchiude lo spazio massimo o minimo.

Del resto il valore di $\delta^2 V$ dimostra che il massimo avrà luogo quando l'arco gira la sua concavità all'asse delle ascisse, ed il minimo quando ne volge la convessità.

Esempio 2. Per quale relazione tra x ed y la funzione $\int y^2 dx$ diverrà un massimo o un minimo tra i limiti $x=a$ ed $x=b$, mentre $\int xy dx$ rimane costante tra gli stessi limiti?

Secondo l'equazione 2 è

$$V = \int y^2 dx + k \int xy dx,$$

quindi

$$\delta V = \int 2y \delta y dx + k \int x \delta y dx = \int (2y + kx) \delta y dx,$$

Donde segue $2y + kx = 0$, ossia $y = -\frac{kx}{2}$

Or considerando l'equazione $\int xy dx = A$ rispetto ai limiti, si ha

$$\int_a^b -\frac{kx^2}{2} dx = A, \text{ quindi } k = \frac{6A}{a^3 - b^3}.$$

Finalmente si ha $\delta^2 V = \int 2\delta y^2 dx$, ed in conseguenza la funzione sarà un minimo.

Esempio 3. Si cerca la linea più breve tra due punti dati nello spazio.

La geometria dimostra che la lunghezza dell'arco s di una curva, rappresentata da un'equazione tra le coordinate ret-

*

tangolari x, y, z , sarà data dell'equazione

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \text{ ossia } s = \int (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Or essendo a_1, b_1, c_1 le coordinate di un'estremità dell'arco, ed a_2, b_2, c_2 quelle dell'altro punto estremo, l'integrale dovrà prendersi tra i limiti $x = a_1, x = a_2$, considerando y e z come funzioni di x . Or se la linea dev'essere un minimo, dovrà essere

$$\int \delta ds = \int \frac{dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz}{ds} = 0.$$

Scambiando i segni d e δ ed integrando per parti, ne risulterà

$$\frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{ds} - \int \left\{ \delta x d \frac{dx}{ds} + \delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} \right\} = 0.$$

Ma l'integrale dovrà prendersi tra gl' indicati limiti, e perciò sarà

$$\frac{da_2 \delta a_2 + db_2 \delta b_2 + dc_2 \delta c_2}{(da_2^2 + db_2^2 + dc_2^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{da_1 \delta a_1 + db_1 \delta b_1 + dc_1 \delta c_1}{(da_1^2 + db_1^2 + dc_1^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \left\{ \delta x d \frac{dx}{ds} + \delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} \right\} = 0.$$

E poichè a_1 ed a_2 sono tra esse indipendenti, l'ultima equazione si scinderà nelle tre:

$$da_1 \delta a_1 + db_1 \delta b_1 + dc_1 \delta c_1 = 0$$

$$da_2 \delta a_2 + db_2 \delta b_2 + dc_2 \delta c_2 = 0$$

$$\delta x d \frac{dx}{ds} + \delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} = 0.$$

Le due prime di queste tre equazioni determinano le posizioni dei punti estremi, la terza definisce la natura della linea richiesta. Or potendosi immaginar questa linea ovun-

que nello spazio, le variazioni δx , δy , δz rimarranno del tutto arbitrarie, e perciò dalla terza delle equazioni precedenti risulteranno

$$d \frac{dx}{ds} = 0, \quad d \frac{dy}{ds} = 0, \quad d \frac{dz}{ds} = 0,$$

e per integrazione

$$\frac{dx}{ds} = A_1, \quad \frac{dy}{ds} = A_2, \quad \frac{dz}{ds} = A_3,$$

A_1 , A_2 , A_3 indicando tre costanti arbitrarie. Eliminando ds da queste equazioni si perviene alle relazioni

$$A_1 dx = A_3 dz, \quad A_2 dy = A_3 dz,$$

ovvero, ponendo $A_1 : A_3 = A$, $A_2 : A_3 = B$, ed integrando,

$$x = Az + \alpha, \quad y = Bz + \beta,$$

le quali appartengono alla linea retta.

Se la linea richiesta dovrà giacere sopra una superficie data dall'equazione

$$z = f(x, y), \quad \text{ovvero} \quad dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

le variazioni δx , δy , δz saranno congiunte alla superficie in modo che la linea passando in un'altra infinitamente vicina, queste variazioni dovranno giacere nella superficie data. Quindi l'equazione

$$\delta z = \frac{dz}{dx} \delta x + \frac{dz}{dy} \delta y$$

è da unirsi all'equazione precedente

$$\delta x d \frac{dx}{ds} + \delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} = 0,$$

la qual cosa avverrà per la semplice introduzione del valo-

re di δz nell'ultima equazione. Si avrà così

$$\left\{ d \frac{dx}{ds} + \frac{dz}{dx} d \frac{dx}{ds} \right\} \delta x + \left\{ d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{dy} d \frac{dz}{ds} \right\} \delta y = 0,$$

ed attesa l'indipendenza delle variazioni δx e δy :

$$d \frac{dx}{ds} + \frac{dz}{dx} d \frac{dz}{ds} = 0, \quad d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{dy} d \frac{dz}{ds} = 0.$$

Ciascuna di queste due equazioni esprime la superficie che interseca la superficie data secondo la curva per la quale ha luogo il minimo. Eliminando $d \frac{dz}{ds}$ da queste due equazioni ne risulta l'altra:

$$\frac{dz}{dx} d \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{dy} d \frac{dx}{ds},$$

la quale dimostra che il piano di curvatura ed il piano tangente per ogni punto x, y, z della curva si tagliano ad angolo retto.

Se p. e. la linea richiesta debba giacere sulla superficie di una sfera, il cui centro si confonda coll'origine delle coordinate, dall'equazione di questa superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

si avrà $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z};$

in conseguenza dalle tre precedenti equazioni risulteranno

$$d \frac{dx}{ds} = \frac{x}{z} d \frac{dz}{ds}, \quad d \frac{dy}{ds} = \frac{y}{z} d \frac{dz}{ds}, \quad d \frac{dx}{ds} = \frac{x}{y} d \frac{dy}{ds},$$

ovvero, ponendo ds costante,

$$\frac{z d^2 x - x d^2 z}{ds} = 0, \quad \frac{z d^2 y - y d^2 z}{ds} = 0, \quad \frac{y d^2 x - x d^2 y}{ds} = 0,$$

dove per integrazione

$$z dx - x dz = b ds, \quad z dy - y dz = a ds, \quad y dx - x dy = c ds.$$

Da queste tre equazioni senza ulteriore integrazione potrà conoscersi la superficie che interseca la superficie data secondo la richiesta curva. Imperocchè moltiplicando la prima per y , la seconda per $-x$, la terza per $-z$, indi addizionandole, si ha l'equazione

$$ax + by + cz = 0,$$

la quale indica un piano condotto pel centro della sfera. Quindi la linea più breve tra due punti dati sulla superficie di una sfera è l'arco di cerchio massimo condotto per gli stessi punti.

Esempio 4. Cercasi il valore massimo o minimo della funzione

$$\int y(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} \text{ ossia } \int y ds,$$

nell'ipotesi che $\int ds$, vale a dire l'arco della curva, resti costante.

A norma dell'equazione 1 si avrà

$$\delta \int y ds + k \delta \int ds = 0, \text{ ovvero } \int \delta(y + k) ds = 0,$$

k disegnando un fattore arbitrario. Dall'ultima equazione risulta

$$\int \left\{ ds \delta y + \frac{y+k}{ds} (dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z) \right\} = 0.$$

Integrando per parti questa equazione e considerando i punti estremi come fissi, si avrà pel residuo integrale l'equazione

$$\int d \left\{ (y+k) \frac{dx}{ds} \right\} \delta x + \int d \left\{ (y+k) \frac{dy}{ds} - ds \right\} \delta y + \int d \left\{ (y+k) \frac{dz}{ds} \right\} \delta z = 0,$$

dalla quale attesa l'indipendenza delle variazioni δx , δy , δz derivano le condizioni

$$d\left\{(y+k) \frac{dx}{ds}\right\} = 0, \quad d\left\{(y+k) \frac{dy}{ds} - ds\right\} = 0, \quad d\left\{(y+k) \frac{dz}{ds}\right\} = 0.$$

Gl' integrali di queste equazioni sono

$$(y+k) \frac{dx}{ds} = A, \quad (y+k) \frac{dy}{ds} - ds = B, \quad (y+k) \frac{dz}{ds} = C,$$

A, B, C indicando le costanti dell' integrazione. Dalla prima e terza di queste equazioni risulta

$$C dx = A dz,$$

vale a dire che la curva richiesta giace in un piano perpendicolare a quello delle zx . E si potrà sempre riguardare il piano delle xy come quello della curva; quindi sparirà la terza delle equazioni precedenti, e dalle due che resteranno, eliminandone $y+k$ e ds , si avrà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s+B}{A}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{s}{A} \quad \text{nell' ipotesi di } B=0.$$

La Statica insegna che questa equazione è quella della curva secondo la quale si dispone un filo pesante liberamente sospeso pei capi estremi nel piano verticale xy .

Or a fine di poter integrare l'ultima equazione, bisognerà differenziarla riguardando x come variabile indipendente e considerando esser $ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$. Con ciò si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ponendo } a = \frac{1}{A},$$

e poichè ponendo $p = \frac{dy}{dx}$ si ha $\frac{dp}{dx} = \frac{p dp}{dy}$, così sarà

$$dy = \frac{p dp}{a(1+p^2)^{\frac{1}{2}}},$$

dende

$$y = \frac{1}{a} (1+p^2)^{\frac{1}{2}} + c.$$

La costante c verrà determinata, considerando che y e p sono nulle ad un tempo, e quindi

$$y = \frac{1}{a} ([1 + p^2]^{\frac{1}{2}} - 1).$$

Restituendo in questa equazione dx e dy , si ottiene

$$dx = \frac{dy}{(2ay + y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

donde, integrando, si avrà secondo il n° 69

$$x = l(a + y + [2ay + y^2]^{\frac{1}{2}})$$

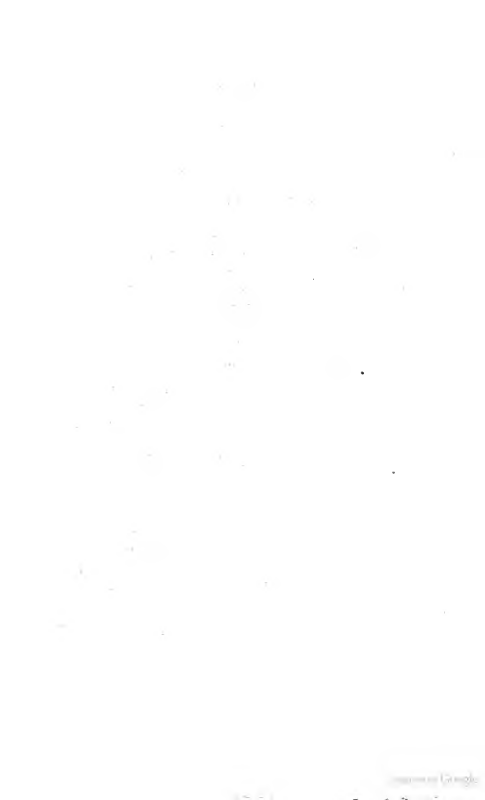
ch'è appunto l'equazione della catenaria. (Vedi n° 160)

Una più estesa ricerca sulla funzione

$$V = \int y ds$$

dimostra che ponendovi $ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$, $\delta^2 V$ assume-
rà un valore positivo o negativo secondochè la curva gira
la sua convessità o la sua concavità all'asse delle x . Or in-
dicando V , o meglio $\int 2xy ds$ la superficie generata da una
curva che rota intorno all'asse delle x ; ne segue che di
tutte le curve di eguali lunghezze e che passano per due
punti, la catenaria è quella che colla sua rotazione intorno
all'asse delle x descrive la superficie massima o minima,
secondochè volge il suo lato concavo o convesso all'asse di
rotazione.

Negli esempi di questo numero e del precedente si è do-
vuto non di rado ricorrere alle verità e teorie della Geo-
metria superiore. Perciò a miglior intelligenza di quegli e-
sempii rinviando alle seguenti ricerche di Geometria superio-
re.



GEOMETRIA ANALITICA

CAPO PRIMO.

Geometria del piano.

A. Introduzione.

Nelle seguenti ricerche avremo sovente ad applicare i principii fondamentali della geometria analitica. Quindi ci facciamo a riandarli brevemente, e per quanto sarà necessario, rispetto al punto, alla linea retta ed al cerchio.

138.

Il Punto.

La posizione di un punto in un piano dipende da due condizioni, essendochè il piano ha due dimensioni. Queste condizioni saranno nel modo più semplice rappresentate da due rette che s'intersecano, ovvero da una retta ed un angolo adiacente. Le due rette formano il sistema delle coordinate parallele, la retta e l'angolo adiacente quello delle coordinate polari.

Le rette costituenti il sistema delle coordinate parallele diconsi assi, e propriamente XX' (Fig. 1) asse delle ascisse o delle x ; YY' asse delle ordinate o delle y , ed origine il punto d'intersezione A .

Nel sistema delle coordinate polari AX (Fig. 2) costituisce l'asse, A il polo, e la distanza del polo dal punto M è il raggio vettore.

1. Coordinate parallele.

Se le distanze del punto M , (Fig. 1) parallele agli assi, son date, sarà dato il luogo del punto, e facendo QM , ovvero $AP = a$, PM , ovvero $AQ = b$,

$$x = a, y = b$$

diconsi equazioni del punto M_1 ; cosicchè

$$x = a, y = 0$$

saranno le equazioni di un punto dell'asse delle x nella distanza a dall'origine,

$$x = 0, y = b$$

le equazioni di un punto dell'asse delle y nella distanza b dall'origine,

ed

$$x = 0, y = 0$$

le equazioni dell'origine.

Ciascun punto nel piano può riferirsi ad uno dei quattro quadranti che formano gli assi XX' , YY' (*Fig. 1*) prolungati d'ambo i lati. Considerando come positive le ascisse AX ed AY , ovvero supponendo pel punto

	$M_1 : +x, +y,$
sarà per	$M_2 : -x, +y,$
	$M_3 : -x, -y$
	$M_4 : +x, -y;$

quindi la posizione del punto rimane definita. I segni delle ascisse si accordano in conseguenza con quelli dei coseni ed i segni delle ordinate con quelli dei seni degli angoli che una retta movendosi da destra a sinistra intorno al punto A forma col lato fisso AX .

Se gli assi coordinati si tagliano ad angolo obbliquo, la posizione del punto potrà esser determinata per mezzo di questo angolo. Imperocchè chiamandolo φ questo angolo ed α l'angolo che il raggio vettore forma coll'asse delle ascisse, si conducano le perpendicolari MQ (*Fig. 3*) all'asse delle x , e PR ad $AM = r$; si avrà a causa di $AP = x$,

$$MP = y,$$

$$PR = x \operatorname{sen} \alpha = y \operatorname{sen} (\varphi - \alpha),$$

$$MQ = r \operatorname{sen} \alpha = y \operatorname{sen} \varphi;$$

quindi le relazioni

$$1. \quad \frac{x}{y} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \frac{r}{y} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \alpha)}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Condotta inoltre la AS perpendicolarmente alla y prolungata, si avranno per x , y , r le espressioni:

$$\begin{aligned} 2. \quad x &= AQ - PQ = r \cos \alpha - y \cos \varphi, \\ y &= MS - PS = r \cos (\varphi - \alpha) - x \cos \varphi, \\ r &= AR + RM = x \cos \alpha + y \cos (\varphi - \alpha). \end{aligned}$$

Moltiplicando in fine la prima di queste tre equazioni per x , la seconda per y , e poi facendone la somma, si ottiene

$$3. \quad x^2 + y^2 + 2xy \cos \varphi = r^2.$$

Le equazioni da 1 e 3 valgono in generale per ciascuno dei quattro angoli degli assi.

2. Coordinate polari.

Il luogo di un punto rimane definito dalle sue coordinate polari; imperocchè facendo (*Fig. 2*) $AM = r$, $MAQ = t$, sarà

$$MQ = r \operatorname{sen} t, \quad AQ = r \cos t;$$

dimodochè MQ ed AQ fanno le vcci dell'ordinata ed ascissa di un sistema di coordinate parallele rettangolari, ed hanno con queste gli stessi segni nei diversi quadranti.

Mercè le coordinate parallele egli è facile trovare la distanza d dei due punti (x, y) e (x_i, y_i) , cioè

$$4. \quad d^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + 2(x - x_i)(y - y_i) \cos \varphi,$$

e se l'angolo degli assi è retto, sarà

$$5. \quad d^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Quindi se uno dei punti giace nell'origine, ovvero se $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, la distanza del punto x, y da essa origine sarà espressa dalla nota relazione

$$d^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \varphi,$$

contenuta nell'equazione 3.

139.

Trasformazione delle coordinate.

Conoscendo il luogo di un punto rispetto ad un sistema di coordinate, egli è facile esprimerlo nelle coordinate di un altro sistema, la cui posizione rispetto al primo sia data.

1. Il punto sia riferito a due sistemi di coordinate rettangolari aventi la medesima origine.

Sia (Fig. 4) β l'angolo che l'asse AX_1 forma col raggio vettore $AM = r$, α l'angolo dei due assi delle ascisse AX ed AX_1 ; siano inoltre le coordinate del sistema AX, AY indicate da x, y , e da x_1, y_1 quelle del sistema AX_1, AY_1 : dal piede P_1 della y_1 siano menate all'asse delle x ed alla y le perpendicolari P_1Q_1, P_1R_1 , e dal piede P della y le perpendicolari PQ, PR all'asse delle x_1 ed alla y_1 ; si avrà per PM ed AP

$$1. \quad \begin{aligned} y &= y_1 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha \\ x &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \end{aligned}$$

e per MP_1 ed AP_1

$$2. \quad \begin{aligned} y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \\ x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha. \end{aligned}$$

Questi valori delle quattro coordinate essendo indipenden-

ti da β , reggeranno per qualunque angolo positivo o negativo il raggio vettore faccia coll'asse delle x .

Dalle equazioni 1 e 2 si potrà eliminare α , ed ottenere un'equazione tra x , y , e x_1 , y_1 , libera dall'angolo X_1AX .

Si potranno ancora dalle stesse equazioni ottenere delle relazioni tra gli angoli, che siano libere dalle coordinate. Così introducendo p. e. nelle equazioni 1 i valori

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \beta, \quad y_1 = r \sin \beta, \\x &= r \cos(\alpha + \beta), \quad y = r \sin(\alpha + \beta),\end{aligned}$$

esse riproduranno le note relazioni

$$\begin{aligned}3. \quad \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

2. Sia riferito il punto a due obliquiangoli sistemi coordinati. Siano le coordinate x , y inclinate sotto l'angolo φ , le coordinate x_1 , y_1 sotto l'angolo ψ ; faccia la y_1 l'angolo β coll'asse delle ascisse, la x_1 l'angolo α ; ed abbiano in fine i due sistemi la medesima origine. Dall'intersezione P della x ed y si conducano ad x_1 ed y_1 le perpendicolari PQ e PR (*Fig. 5*), e dall'intersezione P_1 della x_1 ed y_1 le parallele P_1R_1 e P_1Q_1 ad x ed y , si avranno le equazioni

$$\begin{aligned}MR &= \frac{y \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \psi}, \quad P_1R = PQ = \frac{x \sin \alpha}{\sin \psi}, \\ QP_1 = PR &= \frac{-y \sin(\varphi - \beta)}{\sin \psi}, \quad AQ = \frac{x \sin \beta}{\sin \psi}, \\ R_1P = P_1Q_1 &= \frac{x_1 \sin \alpha}{\sin \varphi}, \quad MR_1 = \frac{y_1 \sin \beta}{\sin \varphi}, \\ PQ_1 = R_1P_1 &= \frac{-y_1 \sin(\varphi - \beta)}{\sin \varphi}, \quad AQ_1 = \frac{x_1 \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi},\end{aligned}$$

quindi si avranno per le coordinate i valori

$$\begin{aligned}
 4. \quad y &= \frac{y_1 \sin \beta + x_1 \sin \alpha}{\sin \varphi} \\
 x &= \frac{y_1 \sin (\varphi - \beta) + x_1 \sin (\varphi - \alpha)}{\sin \varphi}, \\
 5. \quad y_1 &= \frac{y \sin (\varphi - \alpha) - x \sin \alpha}{\sin \psi} \\
 x_1 &= \frac{-y \sin (\varphi - \beta) + x \sin \beta}{\sin \psi}.
 \end{aligned}$$

Queste equazioni reggono sempre che nelle possibili posizioni del punto M si abbia riguardo ai segni delle coordinate ed a quelli del seno e coseno pei possibili valori degli angoli φ e ψ .

Se gli assi delle ascisse AX ed AX₁ coincidano, si avrà $\alpha = 0$, $\beta = \psi$, e le equazioni 4 e 5 si trasformeranno nelle seguenti:

$$\begin{aligned}
 6. \quad y &= \frac{y_1 \sin \psi}{\sin \varphi}, \quad x = \frac{y_1 \sin (\varphi - \psi) + x_1 \sin \varphi}{\sin \varphi} \\
 y_1 &= \frac{y \sin \varphi}{\sin \psi}, \quad x_1 = \frac{-y \sin (\varphi - \psi) + x \sin \psi}{\sin \psi}.
 \end{aligned}$$

Se gli assi di uno dei sistemi, del primo per esempio, siano rettangolari, si avrà $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ed in conseguenza

$$\begin{aligned}
 7. \quad y &= x_1 \sin \alpha + y_1 \sin \beta, \\
 x &= x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta, \\
 y_1 &= \frac{-x \sin \alpha + y \cos \alpha}{\sin \psi}, \\
 x_1 &= \frac{x \sin \beta - y \cos \beta}{\sin \psi}.
 \end{aligned}$$

Se gli assi dei due sistemi saranno rettangolari, vale a dire $\varphi = \psi = \frac{\pi}{2}$, ritorneranno dinuovo le equazioni 1 e 2.

Ma se gli assi omonimi sono paralleli nei sistemi di coordinate parallele, allora chiamando a e b le coordinate dell'origine A , si avranno quali relazioni tra le coordinate dei due sistemi

$$8. \quad x = a + x_1, \quad y = b + y_1.$$

Quindi se due sistemi hanno diverse le direzioni dei loro assi omonimi e diverse origini, si potrà muovere parallelamente a se stesso uno dei sistemi fino a far coincidere le due origini, e quindi comparare mercè le equazioni 8 le due posizioni del sistema rimosso.

3. Supponendo che il punto sia riferito a coordinate parallele e polari, siano le coordinate parallele inclinate sotto l'angolo φ , r e t le coordinate polari, α l'angolo che l'asse polare AX_1 (Fig. 6), forma coll'asse delle ascisse AX , ed il polo coincida coll'origine. Si avranno chiaramente dal triangolo AMP le relazioni

$$y = \frac{r \sin(t + \alpha)}{\sin \varphi}, \quad x = \frac{r \sin(\varphi - t - \alpha)}{\sin \varphi}.$$

Viceversa, senza nuovo calcolo si potranno esprimere le coordinate polari in coordinate parallele, quando si abbia $\varphi = 90^\circ$, ossia

$$y = r \sin(t + \alpha), \quad x = r \cos(t + \alpha);$$

imperocchè si ha

$$9. \quad r^2 = y^2 + x^2, \quad \operatorname{tg}(t + \alpha) = \frac{y}{x}, \quad \text{dove}$$

$$t = -\alpha + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

La linea retta.

La linea risulta dal moto di un punto. Se questo moto si attui secondo una legge geometrica, si potrà coll'uso delle coordinate esprimere la natura della linea in forma di equazione. La legge della linea retta consiste in ciò che il punto durante il suo moto conserva la primitiva direzione. Quindi se una retta LN (Fig. 7) si rapporti ad un sistema di coordinate rettangolari giacente nel suo piano, e si prendano le coordinate dei punti $M_1, M_2, M_3, \dots$; la legge del movimento starà nell'egualianza dei rapporti

$$\frac{M_1P_1}{BP_1} = \frac{M_2P_2}{BP_2} = \frac{M_3P_3}{BP_3} = \dots = \frac{CA}{BA}.$$

Or prendendo la x ed y nel quadrante positivo, ed indicando con a il rapporto $CA : BA$ e con c la lunghezza costante BA , si avrà per ogni punto x, y della retta la relazione

$$\frac{y}{x+c} = a,$$

donde per $a = \frac{b}{c}$, ossia $b = CA$, risulta l'equazione

$$1. \quad \frac{y}{b} - \frac{x}{c} = 1,$$

ovvero, per $c = \frac{b}{a}$, l'equazione

$$2. \quad y = ax + b.$$

L'espressione algebrica di una retta, riferita a coordinate rettangolari, sta dunque in un'equazione di 1° grado tra due variabili e due costanti, dimodochè la retta apparisce sottoposta a due condizioni di sito. Le costanti dell'equa-

zione 1 sono le coordinate dei punti d'intersezione della retta cogli assi, cioè

$$AC = b \text{ per } x = 0, \text{ e } BA = c \text{ per } y = 0.$$

Nell'equazione 2 è b l'ordinata corrispondente ad $x=0$, ed a è la tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta forma coll'asse delle x .

Viceversa, il significato geometrico di un'equazione di 1° grado tra due incognite è una retta, di cui le incognite rappresentano le coordinate; stantechè la forma generale di questa equazione:

$$Ax + By + C = 0$$

si lascia facilmente ridurre a quella dell'equazione 1 o della 2.

Dalla natura della retta egualmente che dalla costruzione geometrica risulta che l'equazione della retta rimane tuttavia dipendente da due costanti, quando essa è riferita ad un sistema obbliquo, e che essa conserverà la forma

$$3. \quad y = ax + b, \text{ ovvero } \frac{y}{b} - \frac{x}{c} = 1,$$

quando nella prima equazione 3 la costante b conservi il significato che ha nell'equazione 2, e che a rappresenti il valore

$$a = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\varphi - \alpha)},$$

α indicando l'angolo che la retta forma coll'asse delle x ; e che in fine nella seconda equazione 3, egualmente che nell'equazione 1, le costanti b e c rappresentino le parti rispettivamente tagliate sull'asse delle y ed x .

L'equazione della retta sarà tuttavia dipendente da due costanti, quando sia riferita a coordinate polari. Imperocchè rappresenti p la distanza del polo dalla retta, α l'angolo

che essa forma coll' asse, r il raggio vettore e t la sua inclinazione all' asse, si troverà facilmente che per ogni punto della retta avrà luogo l'equazione

$$4. \quad p = r \sin (t - \alpha).$$

Se la retta passa per l' origine sarà $b = 0$ nell' equazione 2, e

$$5. \quad y = ax$$

esprimerà l'equazione di una retta condotta per l' origine. All' opposto per essere $b = 0$ e $c = 0$, l'equazione 1 ovvero la seconda delle equazioni 3, non sarà più adattabile a questa retta. Intanto se b e c rappresentano le coordinate di un punto, per ogni altro punto della retta condotta per l' origine si avrà

$$x : y = b : c, \text{ donde}$$

$$6. \quad \frac{x}{b} - \frac{y}{c} = 0.$$

Sia inoltre $a = 0$ nell' equazione 2 ovvero 3, si avrà in

$$7. \quad y = b$$

l'equazione di una retta parallela all' asse delle x e che ne dista della quantità b .

Ma se $a = \infty$, e quindi $\alpha = 90^\circ$ nell' equazione 2, allora

$$x = c, \text{ ponendo } AB = c,$$

sarà l'equazione di una retta parallela all' asse delle y e che ne dista della quantità c .

141.

Continuazione.

L'equazione della retta, come è chiaro pei risultamenti del n° precedente, dipende da due costanti. Queste potranno

no esser sostituite da due punti, pei quali la retta dovrà passare.

Siano x_1, y_1 le coordinate di uno di questi punti: esse dovranno soddisfare l'equazione

$$1. \quad y_1 = ax_1 + b,$$

se quella della retta sia rappresentata da

$$2. \quad y = ax + b.$$

Dall'unione di questa due equazioni risulta

$$3. \quad y - y_1 = a(x - x_1)$$

per equazione di una retta che passa pel punto x_1, y_1 .

Se nella retta rappresentata dall'equazione 2 si trovi anche il punto x_2, y_2 , dovrà esser soddisfatta ancora l'equazione

$$y_2 = ax_2 + b;$$

dalla quale e dall'equazione 1 si ha la relazione

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \text{ ossia } a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Mercè questo valore di a l'equazione 3 si trasforma in

$$4. \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

ossia nell'equazione della retta che passa pei due punti (x_1, y_1) ed (x_2, y_2) .

Introducendo in quest'ultima equazione successivamente $y = 0$ ed $x = 0$, si avrà nel primo caso l'ascissa x del punto d'intersezione della retta coll'asse delle x e nel secondo l'ordinata y del punto d'intersezione della retta coll'asse delle y ; cioè

$$5. \quad x = - \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_2 - y_1}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Se insieme a questi due punti un terzo punto (x_3, y_3) dovrà giacere nella retta dell'equazione 2, si avrà coll'ajuto dell'equazione 2 la relazione

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

ovvero

$$6. \quad x_3 (y_2 - y_1) + x_2 (y_3 - y_1) + x_1 (y_1 - y_3) = 0.$$

Se all'opposto i tre punti non sono in linea retta, si avrà per la superficie F del triangolo, di cui i tre punti sono vertici, l'equazione

$$7. \quad 2F = y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2).$$

142.

Due rette.

Siano LN , L_1N_1 due rette, di cui la prima faccia l'angolo α coll'asse delle x , l'angolo β con quello delle y , e la seconda faccia cogli stessi assi rispettivamente gli angoli α_1 , β_1 . Le equazioni di queste rette, riferite ad assi rettangolari, siano

$$1. \quad y = ax + b,$$

$$2. \quad y = a_1x + b_1.$$

In generale le due rette LN , L_1N_1 si taglieranno in un punto M . Per questo punto comune le ascisse e le ordinate saranno eguali nelle due rette, e dalle equazioni 1 e 2 risulteranno per queste coordinate i valori

$$x = \frac{b - b_1}{a - a_1}, \quad y = \frac{ab_1 - a_1b}{a - a_1}.$$

Sia inoltre v l'angolo LML_1 sotto cui le due rette s'incontrano; dal triangolo BMB_1 , supponendo che B e B_1 sia-

no i punti d'incontro delle rette coll' asse delle ascisse, si avrà per noti teoremi trigonometrici

$$3. \quad \operatorname{tg} v = \frac{a_1 - a}{1 - aa_1}, \text{ ovvero } \cos v = \frac{1 + aa_1}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}} (1 + a_1^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ma rispetto agli angoli α e β si hanno le relazioni

$$\cos \alpha = \frac{1}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}},$$

del pari che per α_1 e β_1 :

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{(1 + a_1^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \beta_1 = \frac{a_1}{(1 + a_1^2)^{\frac{1}{2}}};$$

quindi per mezzo dell'equazione 3 questi cinque angoli si troveranno dover soddisfare alla relazione

$$4. \quad \cos v = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1.$$

Segue nel tempo stesso dalla prima delle equazioni 3 che essendo $a = a_1$, le due rette LN , $L_1 N_1$ saranno parallele, e che se

$$5. \quad 1 + aa_1 = 0, \text{ ovvero } a_1 = -\frac{1}{a},$$

le due rette saranno a vicenda perpendicolari.

Quindi l'equazione

$$6. \quad y - y_1 = a(x - x_1)$$

rappresenterà una retta parallela alla LN dell'equazione 1 e che passa pel punto (x_1, y_1) , e l'equazione

$$7. \quad y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1)$$

dinoterà una perpendicolare alla retta dell'equazione 1 e che passa per lo stesso punto (x_1, y_1) .

Quindi, se x_1, y_1 indicano le coordinate del punto d'in-

tersezione delle rette, a vicenda perpendicolari, dell'equazioni 1 e 7, si avrà da queste equazioni, scambiandovi x ed y con x_1 ed y_1 ,

$$x_1 = x_1 + \frac{y_1 - ax_1 - b}{1 + a^2} a, \quad y_1 = y_1 - \frac{y_1 - ax_1 - b}{1 + a^2},$$

in conseguenza per la distanza d dei due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) si avrà mercè l'equazione 5 del n° 138:

$$8. \quad d = \frac{y_1 - ax_1 - b}{(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

143.

Applicazioni.

I pochi teoremi di Geometria analitica, esposti nei n° precedenti, bastano per farci risolvere colla massima facilità molti problemi della Geometria elementare. Alcuni esempi saranno sufficienti a rifermare questa proposizione.

Esempio 1. Sia da dimostrarsi che le rette menate dai vertici di un triangolo ai punti medii dei lati opposti, s'intersecano in un medesimo punto M.

Siano A, B, C i vertici, A₁, B₁, C₁ i punti medii dei lati BC, AC, AB; siano inoltre BC=2a, AC=2b, AB=2c; ed in fine sia riposto in AB l'asse delle x ed in AC quello delle y . In questa disposizione degli assi, acconcia alla facile dimostrazione del teorema, si hanno pei punti A, B, C le coordinate

$$A: x=0, y=0, \quad B: x=2c, y=0, \quad C: x=0, y=2b,$$

e pei punti A₁, B₁, C₁:

$$A_1: x=c, y=b, \quad B_1: x=0, y=b, \quad C_1: x=a, y=0;$$

quindi a norma dell'equazione 4 del n° 141 apparterranno

le equazioni

$$y = \frac{b}{c} x \quad \text{alla retta } AA_1,$$

$$y = -\frac{b}{2c}(x-2c) \quad \text{alla retta } BB_1,$$

$$y-2b = -\frac{2b}{c} x \quad \text{alla retta } CC_1.$$

Quindi pel punto d'intersezione della AA_1 colla BB_1 avremo della prima e seconda di queste equazioni

$$x = \frac{2}{3} c, \quad y = \frac{2}{3} b.$$

Le stesse coordinate si avranno pel punto d'intersezione delle rette AA_1 e CC_1 , dimodochè le rette AA_1 , BB_1 , CC_1 s'incontrano nel punto

$$x = \frac{1}{3} AB, \quad y = \frac{1}{3} AC.$$

Esempio 2. Sia da dimostrarsi che le rette menate dai vertici di un triangolo perpendicolarmente ai lati opposti s'incontrano in un medesimo punto.

Sia A l'origine, AB l'asse delle x , la AY perpendicolare ad AB l'asse delle y , e pongasi $AB = c$; rappresentino inoltre $x = a$, $y = b$ le coordinate del punto C , ed AA_1 , BB_1 , CC_1 , le condotte perpendicolari: si avranno per le rette AB , AC , BC le equazioni

$$AB : x = 0, \quad AC : y = \frac{b}{a} x,$$

$$BC : y = \frac{b}{c-a}(x-c);$$

come ancora per le rette CC_1 , BB_1 , AA_1 si avranno, giusta l'equazione 7 del n° 142, le equazioni

$$CC_1 : x = a, \quad BB_1 : y = -\frac{a}{b}(x-c),$$

$$AA_1 : y = \frac{c-a}{b}x.$$

Ma l'intersezione delle rette CC_1 e BB_1 , egualmente che quella delle rette CC_1 ed AA_1 , ha per coordinate

$$x = a, \quad y = -\frac{a}{b}(c-a);$$

dunque in questo punto s'intersecano le tre rette.

Esempio 3. Gli esempi 1 e 2 possono riunirsi ad un punto di veduta più generale, cercando le condizioni per le quali le congiungenti AA_1 , BB_1 , CC_1 , i vertici ed i lati opposti di un triangolo vadano ad intersecarsi in un medesimo punto M.

Pongasi l'asse delle x nella AB e nella AC quello delle y , s'indichino le lunghezze AB , BC , CA rispettivamente con c , a , b ; pongasi inoltre $AC_1 = p$, $BA_1 = q$, $CB_1 = r$: così delle linee BB_1 e CC_1 , si avranno le equazioni:

$$BB_1 : \frac{y}{b-r} + \frac{x}{c} = 1, \quad CC_1 : \frac{y}{b} + \frac{x}{p} = 1,$$

donde si ottiene
$$\frac{y}{x} = \frac{b(c-p)(b-r)}{cpr}.$$

Indicando inoltre con s e t le coordinate del punto A_1 , alla retta AA_1 , apparterrà l'equazione

$$\frac{y}{t} - \frac{x}{s} = 0.$$

Ma si troverà facilmente che le coordinate s e t soddisfano alle relazioni

$$\frac{s}{a-q} = \frac{c}{a}, \quad \frac{t}{c-s} = \frac{b}{c},$$

donde
$$\frac{t}{s} = \frac{bq}{c(a-q)} = \frac{y}{x}.$$

I due valori di $\frac{y}{x}$ somministrano la condizione

$$pqr = (c-p)(b-r)(a-q),$$

ovvero $AC_1 \times BA_1 \times CB_1 = C_1B \times A_1C \times B_1A$,

vale a dire che i prodotti dei segmenti non contigui dei lati del triangolo debbono essere tra loro eguali, affinchè le congiungenti AA_1 , BB_1 , CC_1 s'intersechino nello stesso punto M.

L'ultima equazione assume un'altra forma, quando vi s'introducano gli angoli in cui quelli del triangolo sono divisi dalle congiungenti. Pongasi

$$ABB_1 = \beta, \quad BCC_1 = \gamma, \quad CAA_1 = \alpha,$$

$$B_1BC = \beta_1, \quad C_1CA = \gamma_1, \quad A_1AB = \alpha_1,$$

si avranno le relazioni

$$\frac{p}{c-p} = \frac{\text{sen } \gamma_1}{\text{sen } \gamma}, \quad \frac{q}{a-q} = \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha}, \quad \frac{r}{b-r} = \frac{\text{sen } \beta_1}{\text{sen } \beta},$$

quindi mercè l'equazione precedente si avrà

$$\text{sen } \alpha. \text{sen } \beta. \text{sen } \gamma = \text{sen } \alpha_1. \text{sen } \beta_1. \text{sen } \gamma_1.$$

Esempio 4. Due triangoli ABC , $A_1B_1C_1$ sono talmente situati in un piano che AB ed A_1B_1 s'intersecano nel punto γ , AC ed A_1C_1 nel punto β , BC ed B_1C_1 nel punto α , e che i tre punti α , β , γ sono in linea retta. Quale influenza ha la situazione di questi triangoli su quella delle linee AA_1 , BB_1 , CC_1 ?

Rappresentando le rette AB , AC , BC colle rispettive equazioni

$$y = ax + b, \quad y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b_2,$$

e ponendo l'asse delle x nella retta dei punti d'intersezione α , β , γ , le equazioni delle rette A_1B_1 , A_1C_1 , B_1C_1

avranno ordinatamente le forme

$$y = (a + c)x + b, \quad y = (a_1 + c_1)x + b_1, \quad y = (a_2 + c_2)x + b_2,$$

ed ai punti A, B, C appartengono le coordinate

$$A : x = -\frac{b-b_1}{a-a_1}, \quad y = \frac{ab_1-a_1b}{a-a_1};$$

$$B : x = -\frac{b-b_2}{a-a_2}, \quad y = \frac{ab_2-a_2b}{a-a_2},$$

$$C : x = -\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}, \quad y = \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2-a_1},$$

come ai punti A_1, B_1, C_1 le coordinate

$$A_1 : x = -\frac{b-b_1}{(a+c)-(a_1+c_1)}, \quad y = \frac{(a+c)b_1-(a_1+c_1)b}{(a+c)-(a_1+c_1)},$$

$$B_1 : x = -\frac{b-b_2}{(a+c)-(a_2+c_2)}, \quad y = \frac{(a+c)b_2-(a_2+c_2)b}{(a+c)-(a_2+c_2)},$$

$$C_1 : x = -\frac{b_1-b_2}{(a_1+c_1)-(a_2+c_2)}, \quad y = \frac{(a_1+c_1)b_2-(a_2+c_2)b_1}{(a_1+c_1)-(a_2+c_2)}.$$

Le rette AA_1, BB_1, CC_1 passando per punti dello stesso nome, le coordinate dei loro punti d'intersezione cogli assi saranno rappresentate, secondo l'equazione 5 del n° 141, dai valori

$$x = \frac{c_1b - cb_1}{c_1a - ca_1}, \quad y = \frac{c_1b - cb_1}{c_1 - c} \quad \text{per la retta } AA_1,$$

$$x = \frac{c_2b - cb_2}{c_2a - ca_2}, \quad y = \frac{c_2b - cb_2}{c_2 - c} \quad \text{per la retta } BB_1,$$

$$x = \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{c_2a_1 - c_1a_2}, \quad y = \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{c_2 - c_1} \quad \text{per la retta } CC_1.$$

Le tre rette AA_1, BB_1, CC_1 possono a due a due intersecarsi o esser parallele.

1. Poniamo che AA_1 e BB_1 s'intersechino. L'asse delle ascisse, la cui posizione è stata finora indeterminata, sia

condotto per l'intersezione di AA_1 e BB_1 ; la y di questo punto sarà nulla, ed in conseguenza

$$c_1 b - c b_1 = 0, \quad c_2 b - c b_2 = 0, \quad \text{vale a dire} \quad \frac{c_1}{b_1} = \frac{c}{b} = \frac{c_2}{b_2},$$

quindi ancora

$$c_2 b_1 - c_1 b_2 = 0;$$

la CC_1 passerà dunque per lo stesso punto, vale a dire che le rette AA_1 , BB_1 , CC_1 s'intersecheranno nello stesso punto.

2. Potrà essere AA_1 parallela a BB_1 . Conducendo l'asse delle ascisse parallelo a queste rette, i denominatori delle ascisse di questi punti saranno nulli, cioè

$$c_1 a - c a_1 = 0, \quad c_2 a - c a_2 = 0,$$

quindi ancora $c_2 a_1 - c_1 a_2 = 0,$

vale a dire che le tre rette AA_1 , BB_1 , CC_1 saranno parallele.

Se i due triangoli ABC , $A_1 B_1 C_1$ sono situati in modo che AB sia parallela ad $A_1 B_1$, AC ad $A_1 C_1$, BC a $B_1 C_1$, non si avrà a far altro che scambiare nelle equazioni delle rette AB , AC e BC le a , a_1 , a_2 con b , b_1 , b_2 , e nelle equazioni delle rette $A_1 B_1$, $A_1 C_1$, $B_1 C_1$ le $a + c$, $a_1 + c_1$, $a_2 + c_2$ con b , b_1 , b_2 , vale a dire che bisognerà porre

$$AB: y = bx + a, \quad A_1 B_1: y = bx + (a + c), \quad \text{ecc.};$$

ripetendo poi le conclusioni di sopra, si troverà che anche in questa disposizione dei triangoli le tre rette AA_1 , BB_1 , CC_1 s'intersecheranno in un medesimo punto, o procederanno parallele.

La circonferenza.

Indicando a e b le coordinate del centro ed r il raggio del cerchio, si avrà l'equazione della circonferenza esprimendo la proprietà che ogni punto (x, y) di essa è ad eguale distanza dal centro. Quindi per l'equazione 5 del n° 138 sarà

$$1. \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

l'equazione della circonferenza; ed ogni equazione della forma

$$x^2 + y^2 + 2Mx + 2Ny + P = 0,$$

identica a quella dell'equazione 1 dopo averne svolto i quadrati, apparterrà ad un cerchio, il cui centro e raggio saranno determinati per mezzo delle costanti M , N , P .

Anche l'equazione generale del 2° grado tra le variabili x ed y

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

rappresenterà una circonferenza, quando sia $A = B$, imperocchè essa assumerà la forma dell'equazione 1, quando si faccia sparire il termine $2Cxy$ trasformando le coordinate secondo le equazioni generali 4 e 5 del n° 139.

Secondo il luogo dell'origine l'equazione 1 prende forma più semplice. Pongasi p. e. l'asse delle ascisse in un diametro, cosicchè sarà $b = 0$; l'equazione 1 diverrà

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

Facciasi nel tempo stesso cader l'origine sulla circonferenza, ossia facciasi $a = r$; si avrà

$$2. \quad (x - r)^2 + y^2 = r^2, \text{ ovvero } y^2 = 2rx - x^2,$$

equazione del cerchio al vertice.

L'equazione 1 assume la forma più semplice, quando si fa coincidere l'origine col centro, ovvero quando si pone $a = 0$, $b = 0$: così si ha l'equazione del cerchio al centro:

$$3. \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

145.

Discussione dell'equazione del cerchio.

Ciascuna delle equazioni 1, 2, 3 del n° precedente contiene tutte le proprietà della circonferenza. Della qual cosa potrà rimanersi convinto per mezzo della loro discussione, vale a dire per mezzo della deduzione della natura della curva dall'equazione che la rappresenta. Così dall'equazione 3 p. e. risulta

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2};$$

ha dunque y due valori eguali ed opposti, vale a dire che y è la metà di una corda; quindi dall'equazione si deduce il teorema: un diametro, perpendicolare ad una corda, la divide per metà.

Dalla stessa equazione 3 risulta ancora la relazione

$$y^2 = (r + x)(r - x).$$

Ma $r + x$ ed $r - x$ sono i segmenti del diametro determinati da y ; quindi il teorema: la perpendicolare abbassata da un punto della circonferenza sul diametro, è media proporzionale tra i due segmenti del diametro.

Pongasi inoltre $y = 0$ nell'equazione 1, si avrà

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = r^2$$

come equazione dei punti in cui l'asse delle ascisse incontra la circonferenza. Da questa equazione risulta per x i valore

$$x = a \pm \sqrt{r^2 - b^2},$$

che rappresenta la distanza dei punti d'intersezione dall'origine. L'intersezione è dunque possibile nei due casi, di $r > b$ vale a dire quando l'asse delle ascisse è più vicino al centro di quel che dice la quantità b , ovvero di $r = b$. In quest'ultimo caso si ha per x l'unico valore, $x = a$; quindi l'asse delle x sarà tangente al cerchio. L'ascissa del punto di contatto è nel tempo stesso quella del centro; quindi il raggio menato al punto di contatto è perpendicolare alla tangente.

Quando l'asse delle ascisse taglia la circonferenza, e l'origine sta fuori, uno dei valori di x disegnerà un'intera secante, l'altro la sua parte esteriora. Se poi l'origine giace dentro del cerchio, i due valori di x rappresenteranno i segmenti di una corda. Nell'uno e l'altro caso $a^2 + b^2 - r^2$ esprimerà il prodotto dei due valori di x , ed $a^2 + b^2$ sarà il quadrato della distanza dell'origine dal centro. Or facendo girare il sistema degli assi intorno all'origine, a e b muteranno valore, ma $a^2 + b^2$ resterà costante, e quindi anche $a^2 + b^2 - r^2$. Donde risulta il noto teorema: per due secanti menate da uno stesso punto i prodotti di esse per le rispettive parti esterne sono eguali, come ancora quelli dei segmenti di due corde che s'intersecano.

Sia in fine nel punto medio A (Fig. 8) di una corda $BC = 2a$ riposta l'origine di un sistema di coordinate rettangolari, e siano α, α_1 gli angoli XBK ed XCK delle due rette BK e CK che s'incontrano nel punto K della circonferenza. Avremo rispetto a questi angoli

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x+a}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y}{x-a},$$

$$\text{quindi} \quad \operatorname{tg} \angle AKB = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{2ay}{x^2 - a^2 + y^2},$$

x ed y indicando coordinate delle rette. Ma il punto $x y$ comune alle due rette giace ancora sulla circonferenza del cerchio, rappresentato, per l'equazione 1 del n° precedente, da

$$(y - b)^2 = r^2 - x^2,$$

in cui si è fatta $AM = b$; si potranno quindi eliminare x ed y dalle due ultime equazioni, e così, avendo riguardo alla relazione $r^2 - a^2 = b^2$, si avrà

$$\operatorname{tg} BKC = \frac{a}{b},$$

ed in conseguenza una costante, propriamente

$$+ \frac{a}{b} \text{ per } BKC < 90^\circ, \quad - \frac{a}{b} \text{ per } BKC > 90^\circ,$$

e $BKC = 90^\circ$ per $b = 0$.

Essendo inoltre nel triangolo rettangolo BMA

$$\operatorname{tg} BMA = \frac{a}{b}, \text{ sarà } BMC = 2BKC;$$

ed in ciò stanno i noti teoremi sugli angoli iscritti in un medesimo segmento di cerchio.

146.

Tangente al cerchio.

Sia $y = ax + b$

l'equazione di una retta che taglia la circonferenza. Poichè essa passerà per due punti (x_1, y_1) ed (x_2, y_2) , così per l'equazione 4 del n° 141 essa prenderà la forma

$$1. \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1);$$

e le equazioni di questi punti giacenti sulla circonferenza saranno

$$2. \quad x_1^2 + y_1^2 = r^2 \quad \text{ed} \quad x_2^2 + y_2^2 = r^2.$$

Mercè queste tre equazioni la posizione della retta sarà interamente definita.

Or se la retta 1 si faccia girare o si rimuova in modo da far coincidere i punti (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , la secante diverrà tangente. Ma in questo caso si avrà $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$; ed in conseguenza nell'equazione 1 si avrà

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{0}.$$

Il vero significato di questo simbolo d'indeterminazione si dedurrà facilmente dalle equazioni 2. Imperocchè da esse si ottiene

$$(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) = 0,$$

$$\text{ovvero} \quad (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0;$$

$$\text{donde} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = - \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1},$$

espressione che diviene $-\frac{x_1}{y_1}$ nell'ipotesi di $x_2 = x_1$ ed $y_2 = y_1$.

Sarà dunque

$$3. \quad y - y_1 = - \frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$$

l'equazione della tangente al cerchio nel punto x_1, y_1 , la quale assume la forma più semplice:

$$4. \quad xx_1 + yy_1 = r^2,$$

quando vi si aggiunge l'equazione del cerchio pel punto x_1, y_1 .

Pel punto d'intersezione della tangente coll'asse delle x si ha $y = 0$; quindi dall'equazione 4 risulta la relazione

5.

$$xx_1 = r^2,$$

donde si ha la costruzione della tangente menata per un punto esteriore al cerchio, e le cui coordinate sono $x = x$, $y = 0$.

E poichè all'ascissa x , di un punto qualunque della circonferenza corrispondono due valori eguali ed opposti di y , così per ogni punto $x = x$, $y = 0$, dato fuori di un cerchio, si potranno a questo condurre due tangenti.

B. Le sezioni del cono.

147.

Equazione generale.

Noi ci facciamo a cercare la linea o le linee che risultano dal moto di un punto M, quando la distanza di questo punto da un punto fisso F sia in una ragione invariabile colla sua distanza da una retta fissa D.

Ponendo che la scelta degli assi, a cui sarà riferito il punto mobile M, sia del tutto arbitraria, noi otterremo sotto la forma più semplice la relazione di ogni luogo del punto M, prendendo per asse delle y la parallela condotta per punto F alla retta D, e per asse delle x la perpendicolare alla D, menata pel punto F. Imperocchè indicando con c la distanza del punto F dalla retta D, con d e d_1 le distanze di M da F e D, e con k la ragione costante di d_1 a d , si avrà per esprimere la legge del movimento la semplice equazione

$$d_1 = kd,$$

ovvero, introducendovi le coordinate x ed y ,

$$\pm(x - c) = k\sqrt{x^2 + y^2},$$

cosicchè il raggio vettore d_1 risulta una funzione lineare dell'ascissa.

Facendo sparire i radicali dall'ultima equazione, ne risulterà l'equazione di 2° grado rispetto ad x ed y

$$1. \quad k^2 y^2 + (k^2 - 1) x^2 + 2cx - c^2 = 0,$$

la quale dimostra che la curva taglia l'asse delle ascisse nei due punti

$$y = 0, \quad x = -\frac{c}{k-1}, \quad \text{ed} \quad y = 0, \quad x = -\frac{c}{k+1},$$

e l'asse delle ordinate nei due punti

$$x = 0, \quad y = +\frac{c}{k}, \quad \text{ed} \quad x = 0, \quad y = -\frac{c}{k},$$

se c è negativa.

L'ultimo termine dell'equazione 1 sparisce, quando l'origine si trasporta nel punto la cui ascissa è $x = -\frac{c}{k+1}$, ed in cui l'asse corrispondente è incontrato dalla curva. Ed in vero ponendo $x + \frac{c}{k+1}$ in vece di x , si ha

$$2. \quad k^2 y^2 + (k^2 - 1) x^2 + 2kcx = 0.$$

Se la scelta degli assi non è più arbitraria, che anzi sia

$$y + ax + b = 0,$$

l'equazione della retta fissa D , ed il punto fisso F sia dato dalle coordinate $x = p$, $y = q$; allora in conseguenza dell'equazione 8 del n° 142, la legge del movimento del punto M sarà espressa da

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = \frac{(y+ax+b)^2}{k^2(1+a^2)}.$$

Svolgendo i quadrati di questa equazione ed ordinandone

i termini rispetto ad x ed y , avremo una equazione della forma

$$3. \quad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

la quale potrà sempre ridursi alla forma più semplice

$$4. \quad Lx^2 + My^2 + 2Nx + P = 0,$$

ossia alla forma dell'equazione 1 e 2.

L'equazione 3 risolta rispetto ad y ci dà

$$5. \quad y = -\frac{Cx + E}{B} \mp \frac{1}{B} (mx^2 + 2nx + r)^{\frac{1}{2}},$$

ponendo $m = C^2 - AB$, $n = CE - BD$, $r = E^2 - BF$; dimodochè ad ogni valore di x corrispondono due valori di y che differiscono pel doppio della quantità radicale. Or ponendo l'asse delle x nella retta che ha per equazione

$$y = -\frac{Cx + E}{B},$$

ed oltracciò l'origine nel punto della stessa retta definito dalle coordinate

$$x = 0, \quad y = -\frac{E}{B},$$

dietro un facile calcolo si avrà un'equazione della forma dell'equazione 4.

Alla stessa forma dell'equazione 4, ovvero a quella più generale dell'equazione 3 si perviene, cercando la curva (il luogo geometrico) di un punto M che si muove in modo che il quadrato della sua distanza r da un punto fisso F sia in una ragione costante al rettangolo delle sue distanze da due rette L ed L_1 . Imperocchè siano queste rette rappresentate dalle equazioni

$$L: y + mx + n = 0, \quad L_1: y + m_1x + n_1 = 0,$$

e siano x_1 ed y_1 le coordinate del punto F ; la legge di mo-

vimento $r^2 = kdd$, darà pel rapporto costante k l'equazione

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = k \frac{(y + mx + n)(y + m_1x + n_1)}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}(1 + m_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ovvero, ponendo per brevità

$$h = \frac{k}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}(1 + m_1^2)^{\frac{1}{2}}},$$

6. $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = h(y + mx + n)(y + m_1x + n_1)$,
di cui svolgendo i prodotti si perverrà alla forma dell'equazione 3.

L'equazione 3 avrà un altro significato mercè la seguente considerazione: due rette BX, BY (Fig. 9) si tagliano in B sotto un angolo qualunque. Da due punti fissi A ed A_1 vengono condotte le rette AC ed A_1C_1 , la prima delle quali incontra la BX in C , e la seconda la BY in C_1 in modo che ne risulti $BC = ma$ quando sia $BC_1 = mb$, a e b indicando due determinate lunghezze, ed m ogni possibile valore. Quale sarà il luogo geometrico del punto d'intersezione M delle rette AC ed A_1C_1 ?

Siano p e q le coordinate del punto A , p_1 e q_1 quelle del punto A_1 , e siano assi coordinati la BX e BY ; saranno equazioni delle rette AC ed A_1C_1 .

$$AC: y = \frac{q(x - ma)}{p - ma}, \quad A_1C_1: y - mb = \frac{q_1 - mb}{p_1} x.$$

Eliminando da queste due equazioni la variabile m , si avranno tutti i luoghi del punto M che renderanno soddisfatta la suindicata condizione, vale a dire che si avrà l'equazione della curva risultante da tutte le intersezioni delle rette AC ed A_1C_1 .

L'eliminazione di m ci dà l'equazione

$$ap_1y^2 - bq_1x^2 + (bp - aq_1)xy - (aq - bp_1)y + (aq_1 - bp_1)x = 0,$$

che ha la stessa forma dell'equazione 3.

Una breve considerazione dimostra che la forma della curva, che risulta dalle intersezioni delle rette AC , A_1C_1 , debba dipendere dalla posizione e distanza dei punti fissi A ed A_1 : imperochè la circostanza di trovarsi i punti dallo stesso lato dell'uno e l'altro asse, o pur no, di esser tra essi a distanza finita o infinita, avrà sicuramente una essenziale influenza sulla forma e natura della curva.

L'equazione precedente assume forma più semplice, quando la congiungente i punti fissi A e A_1 giace parallela ad uno degli assi coordinati. Ed in vero conducendo per la retta $AA_1 = c$ (Fig. 10) l'asse delle x , in A l'origine, e supponendo che delle rette $BH = b$, $BK = a$ la prima sia parallela all'asse delle y , la seconda all'asse delle x , che $BK = AH$, e che per lo stesso valore di m si abbia $KC = ma$, $HC_1 = mb$; così risulteranno quanto alle rette AC ed A_1C_1 le equazioni

$$AC : y = \frac{bx}{ma}, \quad A_1C_1 : y = \frac{mb}{c-a} (c-x).$$

Eliminandone m si perviene all'equazione

$$7. \quad y^2 = \frac{b^2 x (c-x)}{a(c-a)},$$

la quale ha forma identica coll'equazione 2, e rappresenta diverse curve secondochè c sarà quantità positiva o negativa, finita o infinita.

Ritorniamo all'equazione 2. I seguenti numeri dimostreranno che la forma dell'equazione 2 dipende dall'essere

$$k > 1, \quad k < 1, \quad k = 1.$$

Nel primo caso si avrà l'ellisse, nel secondo l'iperbole, nel terzo la parabola.

Queste tre curve costituiscono le linee del 2° ordine, essendochè le coordinate dei loro punti sono rappresentate da equazioni di 2° grado. Diconsi ancora sezioni coniche,

poichè la superficie di un cono retto a base circolare sarà tagliata da un piano E in un'ellisse, quando un piano E' condotto pel vertice del cono parallelamente al piano E , taglierà tutte le genitrici senza coincidere con due od una di esse; la sezione sarà poi un'iperbole se il piano E' abbia colla superficie conica comuni due generatrici, ed una parabola, se ne abbia una comune.

L'equazione, di sopra ottenuta,

$$\pm(x - c = k(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

conduce facilmente all'equazione polare delle sezioni coniche, ponendovi $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = r$ ed $x = r \cos t$; così si ottiene

$$8. \quad (k \mp \cos t) r = \pm c,$$

equazione che rappresenta un'ellisse, un'iperbole od una parabola, secondochè sarà $k > 1$, $k < 1$, $k = 1$.

148.

L'ellisse.

Poichè rispetto all'ellisse, per le cose dette nel n° precedente, dovrà nell'equazione 2 essere $k > 1$, potremo far c negativa e porre

$$\frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{c}{k} = \frac{b^2}{a};$$

così avremo

$$a > b, \quad k = \frac{a}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad c = \frac{b^2}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}},$$

e l'equazione 2 del n° 147 ci darà

$$1. \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2ab^2 x = 0,$$

che costituisce l'equazione al vertice dell'ellisse. L'asse delle ascisse è tagliato dalla curva in due punti, imperocchè facendo $y=0$, si ha

$$b^2x^2 - 2ab^2x = 0, \text{ cioè } x=0, x=2a.$$

Trasportisi l'origine nel mezzo di $2a$, vale a dire nel punto la cui ascissa è $x+a$; e l'equazione 1 assume la forma più semplice

$$2. \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \text{ ovvero } \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

che si trasforma in quella del cerchio ponendovi $b=a$, e che dicesi equazione al centro dell'ellisse.

Fatta $y=0$, si ha $x=+a$, ovvero $x=-a$; e fatta in vece $x=0$, si ottiene $y=+b$, ovvero $y=-b$; vale a dire che l'asse delle ascisse è intersecato nei punti $+a$ e $-a$, e quello delle ordinate nei punti $+b$ e $-b$. E poichè ad ogni valore di y corrispondono due valori eguali ed opposti di x e viceversa, è chiaro la curva esser simmetrica sì rispetto all'asse delle x che a quello delle y .

Inoltre conducendo comunque per l'origine una retta, la cui equazione sia $y=Ax$, avremo per determinare le ascisse dei suoi punti d'intersezione coll'ellisse l'equazione

$$(a^2A^2 + b^2)x^2 = a^2b^2;$$

avrà dunque la x due valori eguali ed opposti, vale a dire che i due punti d'intersezione saranno equidistanti dall'origine. Questa in conseguenza ha nell'equazione 2 la proprietà di bisecare ogni retta che per essa si conduca. Quindi questo punto dicesi centro, e diametro ogni retta che vi è condotta.

Nel n° 147 ponendo $x + \frac{c}{k+1}$ in vece di x a fin di ottenere l'equazione 2, si è trasportata l'origine da F (Fig. 11)

in A. Donde segue che sarà

$$AF = \frac{c}{k+1} = \frac{b^2}{a + (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} = a - (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}},$$

avendo sostituito a k e c i già trovati valori. Quindi per $FC=e$ si ha

$$e = a - AF = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}},$$

Or la curva essendo simmetrica sì rispetto all'asse delle x che a quello delle y , ne segue che dovrà esservi sopra AA' un secondo punto F' il quale sarà distante da A' per quanto F lo è da A , dimodochè considerando CF nel suo valore assoluto si ha

$$CF = e = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}},$$

quando le ascisse si prendano positivamente da C verso A .

La retta D , secondo il n° 147, dista da F della quantità c , vale a dire della quantità $\frac{b^2}{e}$. Essa costituisce la direttrice, ed a cagione della posizione simmetrica dei punti F ed F' dovrà ad essa corrispondere una parallela D' la quale disterà di c dal punto F_1 .

Per ogni punto M dell'ellisse i punti F ed F' hanno la proprietà che $FM + MF' = 2a$. Per dimostrare questa proprietà poniamo $FM = d$ $F'M = d_1$: avremo

$$d^2 = (e - x)^2 + y^2, \quad d_1^2 = (e + x)^2 + y^2.$$

Or introducendo in queste espressioni di d^2 e d_1^2 il valore di y^2 tratto dall'equazione 2, si ha

$$d^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2}, \quad d_1^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2},$$

donde, considerando essere $a > \frac{cx}{a}$, risulta

$$d = a + \frac{ex}{a}, \quad d_1 = a - \frac{ex}{a},$$

quindi

$$3. \quad d + d_1 = 2a.$$

I punti F ed F' diconsi fuochi, la loro distanza e dal centro C è l'eccentricità, e le rette FM , F_1M sono i raggi vettori.

In questa proprietà dell'ellisse, vale a dire che la somma dei raggi vettori è eguale all'asse maggiore, si ha un mezzo di meccanica descrizione della curva, mentre la si disegna con una punta che tende un filo fissato coi suoi capi estremi in F ed F_1 .

La stessa proprietà serve ancora alla descrizione della curva per punti, quando di essa son dati gli assi $2a$ e $2b$. Descrivendo un arco di cerchio col punto F come centro e con una porzione AP p. e. del suo asse maggiore come raggio, questo arco intersecherà l'altro descritto col centro F_1 e col raggio PA_1 , nei due punti L ed L_1 , simmetricamente situati rispetto ad AA_1 e che apparterranno all'ellisse. Si otterranno ancora due altri punti simmetricamente ai primi rispetto all'asse BB_1 dall'intersezione dell'arco circolare che ha per centro F_1 ed il raggio AP coll'altro che ha il centro in F ed il raggio PA_1 .

Anche nell'equazione 7 del n° 147 avvi un mezzo di costruire l'ellisse per punti. Imperocchè ponendovi $c = 2a$, ne risulta

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2);$$

vale a dire l'equazione 1. Quindi se a cominciare da B (Fig. 12) dividansi i lati $BC = b$, $BE = a$ del rettangolo $ACBE$ in egual numero di parti eguali, e si conducano da A pei punti di divisione e , e_1 , e_2 , . . . e da A_1 pei punti di divisione c , c_1 , c_2 , . . . delle rette, queste a coppie, cioè Ae con A_1c , Ae_1 con A_1c_1 , . . . andranno ad intersecarsi sull'ellisse.

Tangente.

Collo stesso metodo, seguito nel n° 146 per ottenere l'equazione della tangente al cerchio, si perverrà a quella della tangente all'ellisse. Ed in vero conducendo una retta pei due punti x_1, y_1 , ed x_2, y_2 dell'ellisse, ne avremo l'equazione

$$1. \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

E poichè i due punti sono definiti dalle relazioni

$$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_1^2), \quad y_2^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_2^2),$$

ovvero dall'unica relazione

$$y_2^2 - y_1^2 = -\frac{b^2}{a^2} (x_2^2 - x_1^2), \quad \text{cioè} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1},$$

così l'equazione

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} (x - x_1)$$

in cui trasformasi l'equazione 1, rappresenta l'equazione di una secante dell'ellisse. Or passando la secante a tangente, ossia dividendo $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, l'ultima equazione si trasformerà in

$$2. \quad y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} (x - x_1);$$

e congiungendo questa alla relazione

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2,$$

si avrà l'equazione della retta

$$3. \quad a^2 y y_1 + b^2 x x_1 = a^2 b^2,$$

che tocca l'ellisse nel punto x_1, y_1 .

Il punto, in cui questa retta taglia l'asse delle x , avrà l'ordinata $y = 0$, e quindi per l'equazione 2 l'ascissa

$$4. \quad x = \frac{a^2}{x_1}.$$

Questo valore di x è indipendente da b . Quindi se più ellissi abbiano comune l'asse maggiore $2a$, le loro tangenti in punti aventi una medesima ascissa, ossia giacenti sulla medesima perpendicolare all'asse comune, s'incontreranno nello stesso punto dell'asse maggiore prolungato. Da ciò risulta un mezzo per condurre da un punto Q una tangente all'ellisse. Essendo il cerchio un'ellisse in cui gli assi $2a$ e $2b$ sono eguali, si condurrà dal punto Q una tangente al cerchio descritto sull'asse $2a$ come diametro; dal punto di contatto F si abbasserà la perpendicolare FN all'asse $2a$, e congiungendo il punto Q col punto M in cui la FN taglia l'ellisse, sarà QM la richiesta tangente.

Or per menare una tangente al punto x_1, y_1 , dell'ellisse, si consideri che la retta menata per lo stesso punto perpendicolarmente alla tangente, per l'equazione 5 del n° 142 ed anche per la precedente equazione 2 sarà rappresentata da

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1).$$

Questa retta MN (*Fig. 11*) dicesi normale della curva. Ed il raggio vettore FM , menato al punto di contatto M , ha per equazione

$$y = \frac{y_1}{x_1 - c} (x - x_1).$$

Quindi chiamando α ed α_1 gli angoli che il raggio vettore FM

e la normale formano coll'asse delle x , avremo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{y_1 - c}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1};$$

$$\text{ed in conseguenza } \operatorname{tg} \angle FMN = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_1},$$

$$\text{ovvero} \quad \operatorname{tg} \angle FMN = -\frac{cy_1}{b^2}.$$

Nello stesso modo si troverà

$$\operatorname{tg} \angle F_1 MN = -\frac{cy_1}{b^2}.$$

Sono dunque eguali gli angoli $\angle FMN$, $\angle F_1 MN$ che i raggi vettori, menati al punto di contatto, formano colla normale.

150.

Diametri coniugati.

Trasportando l'equazione

$$1. \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

dell'ellisse ad un sistema di coordinate oblique, avente la medesima origine, ed i cui assi delle x ed y facciano rispettivamente coll'asse $2a$ gli angoli α ed α_1 , avremo dietro le equazioni 7 del n° 130, per le nuove coordinate x_1 ed y_1 le equazioni

$$x = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \alpha_1, \quad y = x_1 \sin \alpha + y_1 \sin \alpha_1;$$

quindi dall'equazione 1 risulterà

$$2. \quad (a^2 \sin^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \alpha_1) y_1^2 + (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) x_1^2 + 2(a^2 \sin \alpha \sin \alpha_1 + b^2 \cos \alpha \cos \alpha_1) x_1 y_1 = a^2 b^2.$$

Essendo in questa equazione arbitrarii gli angoli α ed α_1 , potremo utilizzarli a rinvenire quel sistema di coordinate oblique, nel quale l'equazione 2 conserverà la forma dell'equazione 1. Rispetto a questo sistema dovrà essere

3. $a^* \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha_1 + b^* \cos \alpha \cos \alpha_1 = 0$, ossia $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{b^*}{a^*}$, cosicchè l'equazione 2, scrivendovi x ed y in vece di x_1 ed y_1 , prenderà la forma più semplice

$$4. (a^* \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + b^* \cos^2 \alpha_1) y^2 + (a^* \operatorname{sen}^2 \alpha + b^* \cos^2 \alpha) x^2 = a^* b^*.$$

Or avendosi in 3 una sola equazione per determinare gli angoli α ed α_1 , vi saranno infiniti sistemi di coordinate oblique che daranno all'equazione dell'ellisse la stessa forma dell'equazione 1. Poniamo che l'asse delle x sia incontrato dalla curva nei punti $y = 0$, $x = \pm A$, e quello delle y nei punti $x = 0$, $y = \pm B$, avremo per determinare A e B le relazioni

$$A^2 = \frac{a^* b^*}{a^* \operatorname{sen}^2 \alpha + b^* \cos^2 \alpha}, \quad B^2 = \frac{a^* b^*}{a^* \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + b^* \cos^2 \alpha_1},$$

dimodochè l'equazione 4 potrà scriversi sotto la forma

$$5. \quad A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2$$

I diametri $2A$ e $2B$ diconsi coniugati, poichè, come dimostra l'equazione 5, le corde parallele a $2A$ sono divise per metà dal diametro $2B$, e viceversa.

Moltiplicando i valori di A^2 e B^2 , ed avendo riguardo al quadrato della prima equazione 3, si avrà

$$6. \quad A^2 B^2 = \frac{a^4 b^4}{a^* b^* \operatorname{sen}^2 (\alpha_1 - \alpha)},$$

vale a dire che sarà

$$AB \operatorname{sen} (\alpha_1 - \alpha) = ab, \quad \text{ovvero} \quad 4AB \operatorname{sen} (\alpha_1 - \alpha) = 4ab,$$

ossia che il parallelogrammo dei diametri coniugati, circo-

scritto all'ellisse, è costante, e propriamente eguale al rettangolo degli assi.

Introducendo negli ottenuti valori di A^2 e B^2 le relazioni

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{sen}^2 \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1},$$

$$\text{si avrà } \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{b^2(a^2 - A^2)}{a^2(A^2 - b^2)}, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha_1 = \frac{b^2(a^2 - B^2)}{a^2(B^2 - b^2)},$$

e se queste due equazioni si moltiplichino e si abbia riguardo alle equazioni 3, ne risulterà

$$7. \quad a^2 + b^2 = A^2 + B^2.$$

$$\text{Siano} \quad y = x \operatorname{tg} \alpha, \quad y = x \operatorname{tg} \alpha_1,$$

le equazioni dei diametri coniugati A e B, riferiti agli assi dell'ellisse. Sia questa incontrata da A nel punto x_1, y_1 : si avrà rispetto al diametro A

$$y = \frac{y_1}{x_1} x,$$

quindi a cagione di $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{b^2}{a^2}$, si avrà pel diametro B

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x.$$

Ma la tangente all'ellisse nel punto x_1, y_1 ha, per l'equazione 2 del n° 149, viene espressa dall'equazione

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1),$$

dunque la tangente all'ellisse in un estremo del diametro A è parallela al suo coniugato.

Siano inoltre β e β_1 gli angoli che faranno coll'asse maggiore due corde condotte dai suoi punti estremi ad un punto dell'ellisse, si avrà

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x-a}, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{y}{x+a},$$

$$\text{quindi} \quad \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{y^2}{x^2 - a^2} = -\frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_1,$$

vale a dire che le corde sono parallele ai diametri coniugati.

Finalmente deducendo dall'equazione 6 il massimo valore di AB , che avrà luogo quando sia $A = B$, si trova che i diametri coniugati eguali sono paralleli alle corde che congiungono gli estremi degli assi.

151.

L' Iperbole.

L' equazione 2 del n° 147, cioè

$$1. \quad k^2 y^2 + (k^2 - 1) x^2 + 2kcx = 0,$$

appartiene all' iperbole, quando sia $k < 1$. Pongasi come nel n° 148

$$\frac{1-k^2}{k^2} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{c}{k} = \frac{b^2}{a},$$

dimodochè sarà

$$k = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad c = \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Così dall'equazione 1 risulterà:

$$2. \quad a^2 y^2 - b^2 x^2 + 2ab^2 x = 0,$$

ovvero, riponendo l'origine nel punto $x + a$ dell'asse delle ascisse.

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2, \quad \text{ovvero} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1.$$

Le equazioni 2 e 3, comparate alle equazioni 1 e 2 del

n° 148, dimostrano che si perviene dall'equazione dell'iperbole a quella dell'ellisse, e viceversa, scambiando b con $b\sqrt{-1}$.

Risultando dall'equazione 3 che per

$$y = 0 \text{ si ha } x = +a, \text{ ovvero } x = -a,$$

e che per

$$x = 0 \text{ si ha } y = +b\sqrt{-1}, \text{ ovvero } y = -b\sqrt{-1},$$

è chiaro che l'asse delle x è incontrato dall'iperbole nei punti $+a$ e $-a$, e l'asse delle y in nessun punto. Da ciò è derivato il nome di asse reale dato a $2a$, e quello di asse immaginario dato a $2b$.

Ad ogni valore reale di y corrispondendo due valori di x , per $x > a$, e viceversa, la curva è simmetrica sì riguardo all'asse delle x che a quello delle y .

L'equazione 3, ovvero l'equazione

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$$

dimostra chiaramente che y è reale soltanto nel caso di $x > a$, e che per valori sempre crescenti di x , sarà crescente anche y . La curva ha dunque due rami simmetrici, e prolungantisi all'infinito.

Si comprende ancora facilmente che l'origine delle coordinate dell'equazione 3 è centro della curva, giacchè l'equazione $y = Ax$ di ogni retta menata per l'origine, quando si congiunge all'equazione 3, mena alla relazione

$$(a^2 A^2 - b^2) x^2 = -a^2 b^2,$$

e quindi a due valori eguali ed opposti, e che saranno reali finchè sia $a^2 A^2 < b^2$.

Nello stesso modo, che nel n° 148 si è tenuto per l'ellisse, si troverà ancora che nell'asse reale dell'iperbole vi

sono due punti, i quali hanno la proprietà di esser equidistanti dai due vertici A e A_1 (*Fig. 13*) della curva, e di rendere ancora soddisfatta per ogni punto M di ciascun ramo iperbolico la relazione

$$4. \quad FM - F_1M = 2a.$$

Anche per questa curva i punti F ed F_1 ne sono fuochi, eccentricità la loro distanza dal centro, cioè $FC = e = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, raggi vettori le rette FM ed F_1M , ed in fine direttrici le rette D e D_1 le quali distano dai fuochi F ed F_1 della quantità $c = \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Nella proprietà rappresentata dall'equazione 4 avvi un mezzo di trovare i singoli punti dell'iperbole, quando sono dati gli assi $2a$ e $2b$. Imperocchè il cerchio che ha per raggio $AP > 2a$ (*Fig. 13*) ed il centro in F taglia l'altro cerchio che ha il raggio A_1P ed il centro in F_1 , in due punti M ed M_1 i quali si trovano l'uno da un lato e l'altro dall'altro lato dell'asse delle x . E colle stesse lunghezze AP ed A_1P , scambiando i centri F ed F_1 , si avranno due punti dell'altro ramo d'iperbole.

Un'altra costruzione ci è somministrata dall'equazione 7 n° 147. Imperocchè ponendovi $c - x$ negativa, e facendovi $c = 2a$, ne risulta la già ottenuta equazione 2

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2).$$

Perciò, indicando $ACBE$ (*Fig. 14*) il rettangolo dei lati $AC = a$, $CB = b$, e divisa BC a contare da B , egualmente che $EE_1 = EB$ a contare da E , in egual numero di parti eguali, le rette condotte da A pei punti di divisione e, e_1, e_2 della EE_1 s'incontreranno a coppie, cioè Ae con A_1c , Ae_1 con A_1c_1 , . . . con quelle che da A_1 vanno pei punti di di-

visione $c, c_1, c_2, \dots$ in punti dell'iperbole che passa pel punto B e pel vertice A.

152.

Tangente ed assintoti.

Collo stesso metodo con cui nel n° 149 si è pervenuto all'equazione della tangente dell'ellisse, o più semplicemente, sostituendo nell'equazione 2 del n° 149 $-b^2$ a b^2 , si perverrà all'equazione della tangente all'iperbole, cioè

$$1. \quad y - y_1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} (x - x_1).$$

Congiungendo questa equazione coll'altra del punto di contatto x_1, y_1 , cioè

$$a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2 = -a^2 b^2,$$

ne risulta

$$2. \quad a^2 y y_1 - b^2 x x_1 = a^2 b^2.$$

Questa retta incontra l'asse delle x nel punto

$$3. \quad y = 0, \quad x = \frac{a^2}{x_1};$$

e poichè questo valore di x è indipendente da b , così la conseguenza dell'equazione 4 del n° 149 rispetto alle ellissi aventi gli stessi vertici A ed A_1 rimane applicabile a tutte le iperbole che hanno vertici comuni (Fig. 13).

Nell'iperbole ancora la tangente ad un punto x_1, y_1 forma angoli eguali coi raggi vettori menati allo stesso punto, del pari che la normale coi raggi vettori dell'ellisse. Ed in vero indicando α ed α_1 gli angoli che il raggio vettore FM e la tangente QM formano coll'asse delle x , si avrà

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1 + c},$$

$$\text{quindi} \quad \operatorname{tg} QMF = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha},$$

ovvero introducendo i valori di $\operatorname{tg} \alpha_1$ e $\operatorname{tg} \alpha$, e contraendo,

$$\operatorname{tg} QMF = \frac{b^2}{cy_1}.$$

Lo stesso valore si ha per $\operatorname{tg} QMF_1$, poichè ponendo $A_1 F_1 M = \beta$, si ottiene

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_1}{x_1 + e}.$$

Poichè i due rami dell'iperbole si estendono all'infinito, così presentasi la quistione, se la tangente ad un punto infinitamente lontano trovisi, in tutta la sua lunghezza, infinitamente lontana dalla curva, ovvero se una parte di essa vi sia in prossimità finita. Avendo luogo quest'ultima circostanza, la tangente al punto infinitamente lontano nomasi assintoto.

Per rispondere alla quistione dovrà farsi $y_1 = \infty$ ed $x_1 = \infty$ nell'equazione 2. Ovvero, introducasi nella stessa equazione il valore

$$y_1 = \pm \frac{b}{a} (x_1^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \text{ tratto da } a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2 = -a^2 b^2.$$

Si avrà così, dopo aver diviso per x_1^2 ,

$$\pm ay \left\{ 1 - \frac{a^2}{x_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - bx = - \frac{a^2 b}{x_1}.$$

Or come il punto di contatto x_1, y_1 si allontana dal centro, x_1 diverrà più grande, e per $x_1 = \infty$ sarà

$$\frac{a^2}{x_1^2} = 0, \quad \frac{a^2 b}{x_1} = 0,$$

e così l'equazione precedente darà

$$4. \quad ay \pm bx = 0 \text{ ovvero } y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Ha dunque l'iperbole due assintoti, i quali s'intersecano nel centro di essa, ed incontrano l'asse delle x sotto gli angoli β e β_1 , definiti dalle relazioni

$$5. \quad \operatorname{tg} \beta = + \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = - \frac{b}{a},$$

vale a dire che gli assintoti formano angoli eguali coll'asse delle x . Facendosi (Fig. 13) $A_1E_1 = CB$, si ha $\frac{A_1E_1}{CA_1} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta$, e così riesce facilissima la costruzione dell'assintoto.

Ponendo $a = b$, si ha $\operatorname{tg} \beta = 1$, quindi $\beta = 45^\circ$; gli assintoti s'incontreranno ad angolo retto, e l'iperbole, la cui equazione è

$$y^2 = x^2 - a^2,$$

dicesi equilatera.

153.

Diametri coniugati.

Riferendosi l'iperbole ad un sistema di coordinate oblique aventi la medesima origine, e che facciano coll'asse delle x gli angoli α ed α_1 , si avranno rispetto alle nuove coordinate x_1 ed y_1 , come nel n° 150, i valori

$$x = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \alpha_1, \quad y = x_1 \sin \alpha + y_1 \sin \alpha_1,$$

e l'equazione dell'iperbole

$$1. \quad a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

sarà trasformata in

$$2. \quad (a^2 \sin^2 \alpha_1 - b^2 \cos^2 \alpha_1) y_1^2 + a^2 (\sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha) x_1^2 + 2(a^2 \sin \alpha \sin \alpha_1 - b^2 \cos \alpha \cos \alpha_1) x_1 y_1 = -a^2 b^2;$$

e si potrà, come nel n° 150, sottoporre gli angoli α ed α_1 alla condizione di far acquistare all'equazione 2 la forma

dell'equazione 1. Questa condizione richiede che sia

$$3. a^* \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha_1 - b^* \cos \alpha \cos \alpha_1 = 0 \text{ ossia } \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{b^*}{a^*},$$

per la qual cosa, ponendo

$$4. A^* = \frac{-a^*b^*}{a^* \operatorname{sen}^2 \alpha_1 - b^* \cos^2 \alpha_1}, \quad -B^* = \frac{-a^*b^*}{a^* \operatorname{sen}^2 \alpha - b^* \cos^2 \alpha},$$

l'equazione 2 assumerà la forma

$$5. A^*y^2 - B^*x^2 = -A^*B^*,$$

quando si ponga x ed y in vece di x_1 ed y_1 . Ma poichè l'equazione di condizione 3 non determina gli angoli α ed α_1 , così vi saranno infiniti valori di questi angoli, che sotto la condizione espressa dall'equazione 3 daranno all'equazione 2 la forma 5.

Ciascuno degli assi dell'equazione 5 ha la proprietà di bisecare le corde parallele all'altro, e perciò gli assi 2A e 2B diconsi diametri coniugati.

Dalle equazioni 3 e 4, come nel n° 150, si deduce facilmente una relazione tra gli assi principali a e b , i diametri coniugati A e B , e l'angolo $\alpha_1 - \alpha$ delle coordinate di questi ultimi; cioè

$$6. A^* - B^* = a^* - b^*, \quad AB \operatorname{sen} (\alpha_1 - \alpha) = ab.$$

Siano in fine β e β_1 gli angoli di due corde condotte ad un medesimo punto dell'iperbole dai vertici A ed A_1 ; si avrà

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x+a}, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{y}{x-a},$$

quindi coll'aiuto dell'equazione $a^*y^2 - b^*x^2 = -a^*b^*$, ne risulterà

$$\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_1.$$

In conseguenza, facendo $\beta = \alpha$, ne risulterà $\beta_1 = \alpha_1$, va-

le a dire che le corde saranno parallele ad una coppia di diametri coniugati.

154

Equazione agli assintoti.

Riponendo gli assi coordinati dell'equazione 2 del n° precedente negli assintoti, pei quali dall'equazione 5 del n° 153 si ha

$$\operatorname{tg} \alpha = + \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = - \frac{b}{a},$$

α ed α_1 indicando gli angoli che gli assintoti formano col l'asse delle x : si avrà

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha_1 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha_1 = \frac{b^2}{a^2 + b^2};$$

quindi

$$a^* \operatorname{sen}^2 \alpha_1 - b^* \cos^2 \alpha_1 = 0, \quad a^* \operatorname{sen}^2 \alpha - b^* \cos^2 \alpha = 0,$$

$$\text{e} \quad 2(a^* \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha_1 - b^* \cos \alpha \cos \alpha_1) = - \frac{4a^* b^*}{a^2 + b^2}.$$

Così l'equazione 2 del n° precedente acquista la semplice forma

$$1. \quad xy = \frac{1}{4} (a^2 + b^2), \quad \text{ovvero} \quad xy = c^2,$$

ponendo $\frac{1}{4} (a^2 + b^2) = c^2$. È questa l'equazione agli assintoti dell'iperbole.

Quanto all'angolo 2α degli assintoti dall'equazione 1 si ha

$$2. \quad xy \operatorname{sen} 2\alpha = c^2 \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{1}{2} ab,$$

poichè $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$. Il parallelogrammo delle coordinate di un punto dell'iperbole, prese parallelamente agli assintoti, è dunque costante.

La superficie $2ab = (a^2 + b^2) \operatorname{sen} 2\alpha$ dicesi potenza dell'iperbole.

155.

La parabola.

Rimane ancora ad esaminare il terzo caso nell'equazione 2 del n° 147, vale a dire quello di $k = 1$. In questo caso dalla mentovata equazione, ponendovi $c = -p$ risulta

$$1. \quad y^2 = px.$$

Questa equazione 1 toglie il nome di equazione agli assi e p quello di parametro della parabola.

Questa equazione dimostra che la curva può trovarsi soltanto dal lato positivo dell'asse delle ascisse; che per questo lato ad ogni valore di x corrispondono due valori eguali ed opposti di y ; che per $x = 0$ è anche $y = 0$, ed in conseguenza la curva incontra l'asse delle x nell'origine; e che infine crescendo sempre x crescerà ancora y , e perciò la curva si estenderà all'infinito.

Risulta nel tempo stesso dal primo modo di generazione delle sezioni coniche, esposto nel n° 147, che il punto mobile M dista dal punto fisso F egualmente che dalla retta fissa D , la quale è nuovamente denominata direttrice, mentre il punto F dicesi fuoco e la retta FM raggio vettore.

Poichè la costante c nell'equazione 1 e 2 del n° 147, ovvero la p nella precedente equazione 1, indica la distanza del fuoco F dalla direttrice, e poichè l'origine rispetto all'equazione 2 del n° 147 è stata situata nel punto

$$x = x - \frac{c}{k+1}, \text{ cioè } x = x - \frac{p}{2},$$

così ne segue che il vertice della parabola, cioè il punto

$x=0$, $y=0$, dista del fuoco egualmente che dalla direttrice.

Dalla qui avanti mentovata proprietà, secondo la quale ogni punto della parabola dista egualmente dal fuoco F e dalla direttrice D, ovvero quella di essere $MF = MN$ (Fig. 15), risulta che si potrà costruire la curva per punti, quando siano dati il fuoco e la direttrice. Imperocchè per ogni punto P dell'ascissa è nota la sua distanza CP dalla direttrice D. Or elevando da P la perpendicolare MP e tagliandola con un arco di cerchio descritto col centro F ed il raggio CP, nell'intersezione M si avrà un punto della parabola.

Un'altra costruzione risulta dall'equazione 7 del n° 147. Imperocchè dandole la forma

$$y^2 = \frac{b^2 cx}{a(c-a)} - \frac{b^2 x^2}{a(c-a)},$$

e ponendo per ogni punto della curva $c = \infty$, si ha

$$y^2 = \frac{b^2}{a} x,$$

equazione, la cui forma coincide con quella dell'equazione 1. Or se nell'equazione 7 del n° 147 la lunghezza c si pone infinitamente grande, il punto A_1 (Fig. 10) si allontanerà all'infinito, e così la retta A_1C_1 diverrà parallela ad AH . Dividendo in conseguenza i due lati contigui BC e BE (Fig. 16) di un rettangolo, o di qualsivoglia parallelogrammo, a cominciare da B in egual numero di parti eguali, e conducendo da A delle rette ai punti di divisione e , e_1 , e_2 , ... della BE , e pei punti di divisione c , c_1 , c_2 , ... della BC conducendo delle parallele all'asse AC , le coppie Ae e kc , Ae_1 e k_1c_1 , Ae_2 e k_2c_2 , ... che vanno per gli omonimi punti di divisione, s'incontreranno in punti della parabola.

Tangente.

Se i punti x_1, y_1, x_2, y_2 della retta

$$1. \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

debbono giacere nella parabola $y^2 = 2px$, l'equazione 1 dovrà coesistere colle equazioni

$$y_2^2 = 2px_2, \quad y_1^2 = 2px_1,$$

ovvero coll'equazione

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1).$$

E poichè da quest'ultima si ha la relazione

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1},$$

così dall'equazione 1 si ha l'equazione della secante la parabola:

$$2. \quad y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1} (x - x_1).$$

Or ponendo che i due punti della secante coincidano nel solo x_1, y_1 , risulterà dall'equazione 2:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1} (x - x_1),$$

ovvero combinandola coll'equazione $y_1^2 = 2px_1$ del punto di contatto,

$$3. \quad yy_1 = p(x + x_1)$$

che sarà l'equazione della tangente la parabola.

Questa retta, secondo l'equazione 3, incontra l'asse delle ascisse nel punto

4. $y = 0, x = -x_1,$

dimodochè indicando QM (*Fig. 15*) la tangente alla parabola nel punto M, sarà

$$QP = 2AP = 2x,$$

vale a dire che la porzione dell'asse delle ascisse, compresa tra Q e P, e che dicesi sottotangente, pareggia il doppio dell'ascissa.

È dunque facile condurre una tangente per ogni punto M dato sulla parabola.

Anche per la parabola è rimarchevole la posizione della tangente rispetto al raggio vettore. Ed in vero indicando x_1, y_1 il punto di contatto, ed α, α_1 gli angoli che la tangente ed il raggio vettore formano coll'asse delle x , si avrà

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1}{x_1 - p}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{2x_1},$$

quindi $\operatorname{tg} QMF = \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha) = \frac{y_1}{2x_1},$

quindi sono eguali gli angoli che la tangente forma coll'asse delle x e col raggio vettore.

Poichè si ha inoltre $CP = NM = FM$, così la tangente QM giace a perpendicolo sulla NF, e le rette NR ed FR per ogni punto R della tangente sono eguali tra loro. Quindi per condurre una tangente alla parabola per un punto dato fuori di essa, basterà costruire il triangolo isoscele NRF, i cui lati FR ed NF sono noti, ed abbassare sulla NF la perpendicolare RQ.

Con modo di deduzione analogo a quello del n° 152 si troverà che la parabola non può avere assintoto alcuno.

Diametri coniugati.

Trasformando l'equazione agli assi della parabola; $y^2 = 2px$, in un'altra relativa ad un sistema di coordinate oblique, i cui assi delle x ed y facciano coll'asse della parabola gli angoli α ed α_1 , e la cui origine sia indicata dalle coordinate h, k ; secondo le equazioni 7 e 9 del n° 139 si avranno per x ed y i valori

$x = h + x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \alpha_1$, $y = k + x_1 \sin \alpha + y_1 \sin \alpha_1$,
e quindi qual equazione della parabola risulterà

$$1. \quad y_1^2 \sin^2 \alpha_1 + x_1^2 \sin^2 \alpha + 2x_1 y_1 \sin \alpha \sin \alpha_1 + 2x_1 (k \sin \alpha - p \cos \alpha) + 2y_1 (k \sin \alpha_1 - p \cos \alpha_1) + k^2 - 2ph = 0.$$

Ed affinchè questa equazione prenda la forma dell'equazione agli assi, dovranno esser soddisfatte le tre condizioni

$$2. \quad \sin \alpha = 0, \quad k^2 - 2ph = 0, \quad k \sin \alpha_1 - p \cos \alpha_1 = 0,$$

dimodochè l'equazione 1 si ridurrà all'equazione

$$3. \quad y_1^2 = \frac{2p}{\sin^2 \alpha_1} x_1,$$

la quale dimostra che l'asse delle x_1 biseca le corde parallele all'asse delle y_1 . Per questa proprietà l'asse delle x_1 è denominato diametro della parabola.

La prima delle tre equazioni 2, cioè $\sin \alpha = 0$, esprime che il diametro è parallelo all'asse delle x , vale a dire all'asse della parabola. La seconda condizione, $k^2 = 2ph$, dice che l'origine del nuovo sistema giace sulla parabola, e che avvi un'infinità di tali sistemi. Finalmente dalla terza equazione di condizione

$$k \operatorname{sen} \alpha_1 - p \cos \alpha_1 = 0, \text{ ovvero } \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{p}{k},$$

si rileva che l'asse delle y_1 si confonde colla tangente al punto h , k , e che per questo valore di $\operatorname{tg} \alpha_1$ vale rispetto al parametro $\frac{2p}{\operatorname{sen}^2 \alpha_1}$ la relazione

$$\frac{2p}{\operatorname{sen}^2 \alpha_1} = 2(p + 2h),$$

e che in conseguenza il parametro risulta eguale al doppio raggio vettore del punto h , k .

C. Altre linee curve.

158.

La lemniscata.

Ogni linea curva, come ogni forma geometrica, per poter divenire subbietto di ricerche matematiche, è d'uopo che sia generata secondo una certa legge. Ma poichè la legge di generazione si pel concetto geometrico che per l'algebrico può esser di molto varia, così un subordinamento delle curve ad un più generale punto di veduta non è sempre attuabile. Perciò ci faremo a considerare quelle curve soltanto, che la frequenza dell'uso rende importanti.

Un punto M muovasi in un piano in modo che il rettangolo delle sue distanze d e d_1 da due punti fissi A ed A_1 dello stesso piano rimanga eguale ad quadrato costante k^2 , ovvero che sia $dd_1 = k^2$.

Ponendo nella retta $AA_1 = 2a$ l'asse delle x , e nel suo punto medio C l'origine delle coordinate rettangolari, si ha

$$d^2 = (a - x)^2 + y^2, \quad d_1^2 = (a + x)^2 + y^2;$$

quindi

$$1. \quad k^4 = [(a-x)^2 + y^2][(a+x)^2 + y^2].$$

Mercè questa curva di quarto grado Cassini pensava rappresentare il moto della terra intorno al sole più esattamente che per mezzo di ellissè. La sua forma varia secondochè si ha

$$k > a\sqrt{2}, \quad k > a \text{ e nel tempo stesso } k < a\sqrt{2}, \text{ ovvero } k < a\sqrt{2}.$$

Ponendo $k = a$, si ottiene dall'equazione 1 :

$$2. \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

La curva rappresentata da questa equazione, dicesi lemniscata (linea a nodo) a cagione della sua forma ∞ , simile ad un nodo. Essa disegna in pari tempo, com'è facile a conoscersi, il luogo geometrico del punto in cui la tangente all'iperbole equilatera è incontrata dal diametro menato ad essa perpendicolarmente.

L'asse delle ascisse essendo intersecato nel punto $y=0$, ne viene

$$x^4 = 2a^2x^2, \text{ cioè } x^2 = 0, \quad x^2 = 2a^2.$$

Il primo caso, $x^2 = 0$, dimostra che la curva taglia due volte l'origine, ed il secondo caso, $x^2 = 2a^2$, ne dà $x = +a\sqrt{2}$ ed $x = -a\sqrt{2}$ per terzo e quarto punto d'intersezione della curva coll'asse delle x .

Nel punto $x = 0$ sarà incontrato l'asse delle ordinate; per questo punto si avrà in conseguenza

$$y^4 = -2a^2y^2,$$

equazione che ammette la sola radice reale $y = 0$.

L'equazione 2 rimane inalterata, ponendovi $x = +x_1$ ed $x = -x_1$; e lo stesso vale per due valori di y eguali ed opposti. La curva è dunque simmetrica sì rispetto all'asse delle x che a quello delle y .

Una retta $y = mx$, condotta per l'origine C, incontra

la curva nei punti, le cui ascisse sono contenute nell'equazione

$$x^2(1+m^2)^2 = 2a^2(1-m^2),$$

ottenuta mercè l'eliminazione di y dall'equazione 2 e da $y = mx$. I valori di x saranno dunque eguali ed opposti, vale a dire che la retta sarà bisecata dall'origine, ovvero che questa sarà centro della curva.

Ponendo in fine $x = r \cos t$ ed $y = r \sin t$ nell'equazione 2, si avrà l'equazione polare della lemniscata

$$3. \quad r^2 = 2a^2 \cos 2t.$$

159.

La curva logaritmica.

Un punto muovendosi talmente in un piano che le sue ascisse formino la progressione aritmetica

$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \dots n\alpha,$$

mentre le ordinate seguono la progressione geometrica

$$b^x, b^{2x}, b^{3x}, b^{4x}, \dots b^{nx};$$

rispetto allo m^{esimo} punto della curva si avrà

$$m\alpha = Ab^{m\alpha},$$

A indicando una costante. E poichè $m\alpha$ rappresenta l'ordinata corrispondente all'ascissa $m\alpha$, si avrà in generale

$$y = Ab^x, \text{ ovvero } y = Ae^{\frac{x}{m}} \text{ ponendo } b = e^{\frac{1}{m}},$$

o pure, trasportando l'origine nel punto $ml \frac{m}{a}$ dell'asse delle ascisse, vale a dire sostituendo $x + ml \frac{m}{a}$ ad x ,

$$1. \quad y = me^{\frac{x}{m}}.$$

Questa equazione dimostra che y rimane reale per ogni valore reale di x , e che la curva si estende nel senso delle x positive egualmente che in quello delle x negative. Si ha inoltre che ad $x=0$ corrisponde $y=m$, $y=+\infty$ ad $x=+\infty$, ed $y=0$ ad $x=-\infty$. La curva dunque si estende all'infinito nel senso delle x positive, ma in quello delle x negative va sempre più avvicinandosi all'asse delle ascisse, e questo asse è nel tempo stesso un assintoto della curva.

La Fig. 17 rappresenta in LBT la curva logaritmica.

160.

La catenaria.

Se la curva logaritmica LBT (Fig. 18) facciasi girare intorno all'asse delle y , finchè ritorni nel suo piano, si avrà una seconda logaritmica L_1BT_1 , la cui equazione sarà

$$1. \quad y = me^{-\frac{x}{m}}.$$

Or se la porzione di ogni ordinata, compresa tra le due curve, p. e. mm_1 , si divida per metà in M , il luogo geometrico del punto M costituirà la catenaria. Così l'ordinata MP di questa curva sarà data dall'equazione

$$MP = \frac{1}{2} (P_m + P_{m_1}),$$

quindi sostituendovi i valori di P_m e P_{m_1} , dati dalle equazioni 1 di questo numero e del precedente, si avrà

$$2. \quad y = \frac{m}{2} (e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}})$$

per equazione della catenaria, in cui m si denomina parametro. Da questa equazione si rileva che dando ad m

valore positivo, la curva giacerà nel senso delle y positive, e simmetricamente a questo asse, giacchè y non si altera ponendo $x = -x$, ed $x = +x$.

Risolvendo l'equazione 2 rispetto ad $e^{\frac{x}{m}}$ si avrà un'equazione di 2° grado, le cui radici saranno espresse da

$$3. \quad e^{\frac{x}{m}} = \frac{y \pm (y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{m},$$

x avrà dunque i due valori

$$x = m \ln \frac{y + (y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{m}, \quad x = m \ln \frac{y - (y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{m},$$

che sono eguali ed opposti, giacchè

$$\frac{y + (y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{m} \cdot \frac{y - (y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{m} = 1.$$

La funzione esponenziale $y = ae^{kx} + be^{-kx}$ possiede la proprietà che per tre valori di x tra loro differenti di α , cioè x , $x + \alpha$, $x + 2\alpha$, i corrispondenti valori di y , che indichiamo con y_1 , y_2 , y_3 , soddisferanno alla relazione

$$\frac{y_1 + y_3}{y_2} = e^{k\alpha} + e^{-k\alpha}.$$

Quindi se due ordinate, y_1 ed y_3 , della catenaria si allontanano di α da una terza y_2 , l'equazione 2 ci darà come relazione della somma delle due prime alla terza l'espressione

$$\frac{y_1 + y_3}{y_2} = e^{\frac{\alpha}{m}} + e^{-\frac{\alpha}{m}},$$

in conseguenza una quantità costante. Quindi se son date due ordinate y_1 ed y_3 , ed è data ancora la loro distanza, si troverà facilmente la ordinata y_2 che ne dista egualmente. Se p. c. la retta H_1H dei punti di sospensione di una

catena, che abbandonata al proprio peso, forma una catenaria, sia orizzontale e parallela ad X_1X , e disti di c dal punto infimo B; e C disti da H di $2a$, si avranno pei punti B ed H le ordinate

$$AB = m, \quad HK = m + c, \quad MP = y_1$$

quindi
$$\frac{AB + HK}{MP} = \frac{2m + c}{y_1} = e^{\frac{a}{m}} + e^{-\frac{a}{m}};$$

ma per la stessa legge si ha ancora rispetto ad $AP_1 = AP = a$

$$\frac{MP + MP_1}{AB} = \frac{2y_1}{m} = e^{\frac{a}{m}} + e^{-\frac{a}{m}},$$

in conseguenza

$$\frac{2m + c}{y_1} = \frac{2y_1}{m}, \quad \text{ovvero } y_1 = \frac{1}{2} [2m(2m + c)]^{\frac{1}{2}}.$$

Similmente rispetto ai punti Q e Q_1 , quando sia $AQ = AQ_1 = \frac{1}{2} a$, si ottiene

$$\frac{NQ + N_1Q_1}{AB} = \frac{AB + MP}{NQ}, \quad \text{cioè } \frac{2NQ}{m} = \frac{m + y_1}{NQ},$$

ovvero
$$NQ = y_1 = \frac{1}{2} [2m(m + y_1)]^{\frac{1}{2}}.$$

Questi valori di y_1 ed y_2 sono facili ad esser calcolati o costruiti, ed in conseguenza per mezzo dei tre punti H, B, H_1 si potranno determinare le ordinate di quanti altri punti si vogliono.

161.

La cicloide.

Se un cerchio vada rotando sopra una curva fissa, ogni punto della circonferenza descriverà una curva, la cui forma e natura dipenderà dalla curva fissa. Si hanno le più

semplici curve di questo genere, quando la linea fissa è una retta ovvero la circonferenza di un cerchio.

La retta AA_1 (Fig. 19) su cui movesi il cerchio di raggio $MC = a$, sia tolta ad asse delle x , ed il punto A , in cui il punto descrivente M del cerchio tocca la retta, si prenda ad origine di coordinate rettangolari. Se il cerchio abbia girato da A in D , avrà sollevato dalla retta AD l'arco MD , ed in conseguenza sarà $AD = MD$, e per l'angolo $MCD = t$ si avrà $AD = at$. Or conducendo la MN perpendicolarmente all'ordinata MP del punto M , si ha

$$AP = x = AD - MN, \quad MP = y = CD - CN,$$

$$MN = a \operatorname{sen} t, \quad CN = a \cos t,$$

quindi

$$1. \quad x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Facendo $t < \pi$, sarà $AP < AD$ e nel tempo stesso $\operatorname{sen} t$ sarà positivo; quando sia $t > \pi$ e $t < 2\pi$, si avrà $AP > AD$ e $\operatorname{sen} t$ sarà negativo. Ponendo inoltre $t > \frac{\pi}{2}$ e $t < \frac{3\pi}{2}$, si avrà $MP > CD$ e $\cos t$ sarà negativo; ma se sia $t > 0$ e $t < \frac{\pi}{2}$, ovvero $t > \frac{3\pi}{2}$ e $t < 2\pi$, sarà $MP < CD$. Donde si rileva che i segni de' valori di x ed y rimarranno inalterati, quando t vada crescendo da zero a 2π .

Quando sia $t = 2\pi$, il punto descrivente M verrà di nuovo a giacere in un punto A_1 della retta AA_1 , cosicchè si avrà $AA_1 = 2a\pi$; e di là il cerchio rotante comincerà di nuovo a generare la stessa curva.

Le due equazioni 1 della cicloide si uniranno in una sola, quando ne venga eliminata t ; imperocchè essendo

$$\cos t = \frac{a - y}{a}, \quad \text{sarà} \quad \operatorname{sen} t = \frac{(2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}}{a},$$

e quindi

$$2. \quad x = a \cdot \arccos \frac{a-y}{a} - (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Volendo trasportare l'origine nel più alto punto B_1 della curva e porre i nuovi assi paralleli agli antichi, bisognerà nelle equazioni 1 scambiare x con $x + a\pi$, ed y con $2a - y$: così si avranno i valori delle nuove coordinate:

$$3. \quad x = a(t - \pi - \text{sent } t), \quad y = a(1 + \text{cost}),$$

donde eliminando t risulta

$$x = -a\pi + a \arccos \frac{a-y}{a} - (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ma se l'asse delle ascisse si consideri procedere positivamente da B_1 a sinistra, dall'ultima equazione si avrà

$$4. \quad x = a\pi - a \arccos \frac{a-y}{a} + (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Quest'ultima equazione potrà facilmente adoperarsi a fine di costruire la curva per punti. Imperocchè se MH sia perpendicolare a B_1B , e tagli in m il cerchio che ha B_1B per diametro, si avrà

$$a\pi - a \arccos \frac{a-y}{a} = \text{arc} B_1m, \quad \text{e} \quad (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}} = mH;$$

quindi $MH = \text{arc} B_1m + mH$, ed in conseguenza $Mm = \text{arc} mB_1$. Facciassi dunque $AB = a\pi$ nell'ipotesi che sia a il diametro del cerchio BmB' , conducasi in questo cerchio una parallela ad AB , e sia MH , e prendendo sulla parte sporgente del cerchio la $Mm = \text{arc} MB_1$, si avrà in M un punto della cicloide.

Se il punto descrivente non sia il punto M della circonferenza, ma un punto M_1 giacente fuori di essa, ovvero un punto interiore M_2 , si avrà nel primo caso la cicloide accorciata e nel secondo la cicloide allungata.

Sia M_1 (Fig. 20) il punto descrivente, $CM_1 = b$, ed origine il punto A, vale a dire il punto in cui M tocca l'asse delle ascisse nella rotazione del cerchio; avremo per coordinate di M_1

$$AP = AD - PD, M_1P = CD - CN;$$

quindi per la cicloide accorciata si avranno le equazioni

$$5. \quad x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t$$

Rispetto alla cicloide allungata il punto descrivente M_2 giace tra M e C, quindi per $M_2C = b$, le equazioni 5 serviranno ancora ad esprimere le coordinate di questa specie di cicloide.

162.

1c

L'epicloide.

Sia C il centro e $CB = a$ il raggio di un cerchio che gira sul lato convesso di un cerchio fisso che ha C_1 per centro ed il raggio $C_1B = a_1$; sia M il punto descrivente, C_1 origine di coordinate rettangolari, AC_1 l'asse delle ascisse, ed A il punto in cui M toccava il cerchio fisso. Quindi toccandosi i cerchi in un altro punto qualunque B, e facendo l'angolo $AC_1B = t_1$, $MCB = t$, sarà $a_1 t_1 = at$. Si elevi C_1N perpendicolare all'asse delle x ed MK a quello delle y , avremo per le coordinate MP e C_1P della curva AM descritta dal punto M, i valori

$$x = C_1N + KM, \quad y = CN - CK,$$

ovvero, essendo l'angolo

$$MCK = t - KCB = t - \left\{ \frac{\pi}{2} - t_1 \right\} = t + t_1 - \frac{\pi}{2},$$

$$1. \quad \begin{aligned} x &= (a + a_1) \cos t_1 - a \cos (t + t_1) \\ y &= (a + a_1) \sin t_1 - a \sin (t + t_1), \end{aligned}$$

e poichè $a_1 t_1 = at$, sarà

$$2. \quad x = (a_1 + a) \cos t_1 - a \cos \frac{a_1 + a}{a} t_1,$$

$$y = (a_1 + a) \sin t_1 - a \sin \frac{a_1 + a}{a} t_1.$$

E queste sono le coordinate della curva denominata epicloide.

Se il raggio del cerchio mobile sia eguale a quello del cerchio fisso, vale a dire che sia $a_1 = a$, quindi $t_1 = t$, le equazioni 1 e 2, per essere

$$\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1 \text{ e } \sin 2t = 2 \sin t \cos t,$$

si trasformano in

$$x = a(2 \cos t - 2 \cos^2 t + 1)$$

$$y = 2a \sin t(1 - \cos t),$$

ovvero, trasportando l'origine delle coordinate dal centro C, del cerchio fisso in A e scambiando in conseguenza x con $a - x$,

$$x = 2a \cos t(\cos t - 1)$$

$$y = 2a \sin t(1 - \cos t).$$

Dividendo la seconda di queste due equazioni per la prima si ha

$$\operatorname{tg} t = -\frac{y}{x}, \text{ ovvero } \cos t = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ed addizionando in vece i loro quadrati, ne risulta

$$3. \quad x^2 + y^2 = 4a^2 (1 - \cos t)^2.$$

Introducendo il già ottenuto valore di $\cos t$, l'ultima equazione diviene

$$x^2 + y^2 = 2a(x + [x^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}),$$

ed in fine facendo sparire il segno radicale, si avrà

$$4. \quad (x^2 + y^2)^2 - 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0.$$

Dall'equazione 3 risulta ancora l'equazione polare

$$5. \quad r = 2a(1 - \cos t).$$

La curva, a cui appartengono le equazioni 4 e 5, dicesi cardiode a cagione della sua figura cordiforme. Essa ha comune col cerchio di raggio a la proprietà che ogni corda condotta pel polo A ha la lunghezza costante $2a$, e che la perpendicolare abbassatavi da C , la divide in due parti eguali.

Se il punto M , descrivente l'epicicloide, non sia sulla circonferenza del cerchio girante, ma che disti della quantità b da C , si avranno le equazioni dell'epicicloide accorciata od allungata, cioè

$$6. \quad x = (a + a_1) \cos t, - b \cos \frac{a + a_1}{a} t, ,$$

$$y = (a + a_1) \sin t, - b \sin \frac{a + a_1}{a} t, ,$$

nello stesso metodo con cui nel n° precedente si è pervenuto alle equazioni della cicloide accorciata e dell'allungata.

163.

L'Ipocicloide.

Se un cerchio giri sul lato concavo di un cerchio fisso, un punto M della circonferenza del cerchio rotante descriverà l'ipocicloide.

Sia, come nel n° precedente, C (Fig. 22) il centro e $CB = a$ il raggio del cerchio girante, C_1 il centro e $C_1B = a_1$ il raggio del cerchio fisso; sia inoltre A il punto, in cui il punto descrivente M era a contatto del cerchio fisso, C_1

l'origine e C, A l'asse delle ascisse di un sistema di coordinate rettangolari: condotte la CN parallela all'asse delle y e la MK a quello delle x , si avranno per le coordinate C, P ed MP del punto descrivente M i valori

$$x = C, P = C, N - MK, \quad y = MP = CN - CK.$$

Or ponendo l'angolo $AC, B = t$, $MCB = t$, sarà l'angolo

$$MCK = t - KCB = t - \left[\pi - \left\{ \frac{\pi}{2} - t \right\} \right] = - \left\{ \frac{\pi}{2} - (t - t) \right\}, \text{ quindi}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad x &= (a_1 - a) \cos t_1 + a \cos (t - t_1), \\ y &= (a_1 - a) \sin t_1 - a \sin (t - t_1), \end{aligned}$$

ed a cagione di $a, t_1 = at$,

$$\begin{aligned} 2. \quad x &= (a_1 - a) \cos t_1 + a \cos \frac{a_1 - a}{a} t_1, \\ y &= (a_1 - a) \sin t_1 - a \sin \frac{a_1 - a}{a} t_1. \end{aligned}$$

Queste equazioni 2 risultano dalle equazioni 2 del n° precedente, quando in quelle si muti $+a$ in $-a$.

Se il raggio del cerchio fisso sia doppio di quello del cerchio mobile, ovvero sia $a_1 = 2a$, quindi $t = 2t_1$, dalle equazioni 1 risulteranno:

$$3. \quad x = 2a \cos t_1, \quad y = 0;$$

vale a dire che l'ipocicloide sarà trasformata in una retta che passa pel centro C, del cerchio fisso.

Le equazioni dell'ipocicloide accorciata od allungata sono, indicando b la distanza del punto descrivente dal centro C del cerchio mobile,

$$\begin{aligned} 4. \quad x &= (a_1 - a) \cos t_1 + b \cos (t - t_1), \\ y &= (a_1 - a) \sin t_1 - b \sin (t - t_1), \end{aligned}$$

e se in queste poniamo $a_1 = 2a$, e da esse eliminiamo gli

angoli t e t_1 , avremo

$$5. \quad \frac{y^2}{(a-b)^2} + \frac{x^2}{(a+b)^2} = 1,$$

ed in conseguenza l'equazione di un'ellisse, i cui semias-
si sono $a-b$ ed $a+b$. Ma se poniamo $a_1 = 4a$, e gli
angoli t e t_1 siano eliminati dalle equazioni 2, ne avremo
l'equazione

$$6. \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a_1^{\frac{2}{3}}.$$

164.

Le spirali.

Le equazioni

$$1. \quad y = ax, \quad y^2 = ax, \quad xy = a^2, \quad y = a^x,$$

riferite a coordinate rettangolari, esprimono, com'è noto,
ordinatamente, una retta, una parabola, un'iperbole, una
curva logaritmica. Ma se y indichi un raggio vettore ed x
l'angolo che esso forma con un asse immobile, ovvero se
nelle precedenti equazioni poniamo r in vece di y e t in
luogo di x , le equazioni

$$2. \quad r = at, \quad r^2 = at, \quad rt = a^2, \quad r = a^t$$

esprimeranno linee curve, che indefinitamente si aggirano
intorno ad un punto fisso, il polo. Queste curve diconsi spi-
rali, e corrispondentemente alle equazioni 1, la prima di-
cesi lineare, la seconda parabolica, la terza iperbo-
lica, e la quarta spirale logaritmica. La prima dicesi
ancora spirale di Archimede, perchè Archimede ne sco-
vriva le proprietà. Per ciascuna di queste spirali se ne tro-
va un'altra opposta ed eguale, quando l'angolo t si pren-
de negativamente.

Dalle proprietà delle linee rappresentate dalle equazioni 1 si possono dedurre le corrispondenti proprietà delle spirali delle equazioni 2, avendo riguardo al significato delle coordinate polari e parallele. Intanto la geometrica dipendenza tra le linee delle equazioni 1 e le corrispondenti spirali è molto significativa. Immaginiamo che una curva piana C giri intorno ad un asse giacente nel suo piano, e che su essa muovasi un punto M in modo che la sua ascissa, presa sull'asse di rotazione, sia proporzionale all'angolo di giro; il punto M descriverà sulla superficie di rotazione una curva K a doppia curvatura. La proiezione perpendicolare di questa curva K su di un piano normale all'asse di rotazione A , sarà una spirale rappresentata dall'equazione $r = aF(t)$, supponendo che la curva generatrice sia disegnata dall'equazione $y = F(x)$, e che l'asse delle ascisse si confonda con quello di rotazione.

163.

La spirale di Archimede.

La spirale di Archimede è prodotta dal movimento del raggio vettore AP (Fig. 23) intorno al punto fisso A in modo che la lunghezza di $AP = r$ vada crescendo in ragione dell'angolo $PAX = t$, che il raggio AP forma coll'asse immobile AX . Quindi se per $t = 2\pi$ si abbia $r = a$, la legge del movimento sarà espressa da

$$1. \quad \frac{r}{a} = \frac{t}{2\pi}, \text{ ovvero } r = \frac{at}{2\pi}.$$

E da ciò risulta la seguente proprietà della spirale. Siano

$$t = 2\pi + \alpha, \quad t = 4\pi + \alpha, \quad t = 6\pi + \alpha, \dots$$

gli angoli che tra loro differiscono di un giro, ed

$$r = r_1, \quad r = r_2, \quad r = r_3, \dots$$

i raggi vettori corrispondenti; si avrà per l'equazione 1

$$\frac{r_1}{a} = \frac{2\pi + \alpha}{2\pi}, \quad \frac{r_2}{a} = \frac{4\pi + \alpha}{2\pi}, \quad \frac{r_3}{a} = \frac{6\pi + \alpha}{2\pi}, \dots$$

ovvero

$$\frac{r_1}{a} = 1 + \frac{\alpha}{2\pi}, \quad \frac{r_2}{a} = 2 + \frac{\alpha}{2\pi}, \quad \frac{r_3}{a} = 3 + \frac{\alpha}{2\pi}, \dots;$$

quindi $r_2 - r_1 = a$, $r_3 - r_2 = a$, ...

È dunque eguale ad a la parte del raggio vettore compresa tra due successivi giri della spirale.

In questa proprietà avvi un mezzo di costruire per punti la spirale di Archimede, quando il primo giro sia dato. I punti poi del primo giro si troveranno dividendo in parti eguali sì a che la circonferenza descritta dal centro A col raggio a , e togliendo da ciascuno dei raggi vettori condotti pei punti di divisione, una parte corrispondente al punto di divisione di egual nome.

166.

La spirale iperbolica.

La spirale iperbolica risulta dal moto del raggio vettore intorno al punto fisso A (Fig. 24) in modo che esso raggio vari in ragione inversa dell'angolo che forma coll'asse immobile AX ; dimodochè per un numero costante a si ottiene

$$1. \quad r = \frac{a}{t}, \text{ ovvero } rt = a.$$

Quindi r diverrà più piccolo come l'angolo t sarà più grande, e viceversa, cosicchè sarà $r = 0$ per $t = \infty$, ed $r = \infty$ per $t = 0$.

La spirale dunque si avvolgerà indefinitamente intorno al polo, senza poterlo giammai raggiungere, ed i suoi punti

infinitamente lontani saranno, a cagione di $t = 0$, a distanze eguali dall'asse AX. La curva ammetterà dunque un assintoto rettilineo, parallelo all'asse AX; ed in forza dell'equazione 1 questo assintoto starà alla distanza a dall'asse AX.

Un mezzo di descrivere la curva per punti si ha dalla seguente considerazione. Sia NN' un arco descritto con qualsiasi raggio AN a cominciare dall'asse AX: prendendo l'arco $NM = a$, si avrà per $AM = r$, ed $NAM = t$;

$$AM \cdot t = a, \text{ ovvero } rt = a,$$

M è dunque un punto della spirale iperbolica.

167.

La spirale logaritmica.

Se i raggi vettori di una spirale cangino in ragione geometrica, mentre gli angoli od archi siano varianti in ragione aritmetica, ne risulterà la spirale logaritmica (Spirale mirabilis di Giac. Bernoulli). La sua equazione è

$$1. \quad r = a^t, \text{ ovvero } r = ce^{nt},$$

la quale dimostra che per valori positivi sempre crescenti di t anche r aumenta indefinitamente, e che per valori sempre negativamente crescenti, il raggio vettore andrà sempre diminuendo fino ad essere $r = 0$ per $t = -\infty$. Imperocchè si ha

$$r = 1, a, a^2, a^3, \dots \text{ per } t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$r = 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \dots \text{ per } t = 0, -1, -2, -3, \dots$$

Negli angoli od archi positivi, a cominciare da $t = 0$, la curva con innumerevoli giri sempre più si allontana dal po-

lo, e vi si avvicina poi continuamente nella direzione degli angoli negativi.

Prendasi sull'asse AX (Fig. 25) la lunghezza AB eguale all'unità, ed a cominciare dal punto B, si nel senso positivo che nel negativo, dividasi in parti eguali l'arco circolare MN descritto col raggio AB: ne risulterà a questo modo la serie di rapporti

$$AB : Am : Am_1 : Am_2 \dots = 1 : a : a^2 : a^3 \dots$$

$$AB : An : An_1 : An_2 \dots = 1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3} \dots$$

supponendo che $Am = a$ sia la base di un sistema di logaritmi ed AB l'unità di lunghezza del raggio vettore. Or essendo

$$AB : Am = Am : Am_1, \quad Am : Am_1 = Am_1 : Am_2, \dots$$

$$Am : AB = AB : An, \quad AB : An = An : An_1, \dots$$

è chiaro come per mezzo di medie proporzionali si possano facilmente costruire i raggi vettori.

168.

La tangente.

Tangente ad una curva dicesi quella retta che colla curva ha comuni due punti prossimi in modo, che nessun altro punto possa giacervi in mezzo ed appartenere nel tempo stesso alla retta ed alla curva. La tangente risulta dunque dalla segante, quando questa ruota intorno ad uno dei suoi punti d'intersezione M, in modo che l'altro o gli altri punti d'intersezione si avvicinino indefinitamente al punto di rotazione M, ovvero passino nei punti prossimi ad M. Quindi se $F(x, y) = 0$ sia l'equazione di una curva riferita a coordinate parallele, e siano x, y , ed $x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y$ due punti di essa, la retta $y = ax + b$, la qua-

le passa per questi punti, avrà per equazione, a norma dell'equazione 4 del n° 141,

$$y - y_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}(x - x_1).$$

Or se il secondo punto si avvicini sempre più al primo, Δy_1 e Δx_1 diverranno sempre più piccole, e pel punto prossimo ad x_1 , y_1 si troverà Δy_1 trasformata in dy_1 e Δx_1 in dx_1 ; dimodochè

$$1. \quad y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1)$$

disegnerà l'equazione della retta che tocca la curva $F(x, y) = 0$ nel punto x_1, y_1 ; ed essendo

$$\frac{dy_1}{dx_1} = a, \text{ ovvero } \frac{dy_1}{dx_1} = \operatorname{tg} \alpha,$$

ne segue che la derivata prima di y rispetto ad x , pei valori x_1, y_1 dinota la tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta forma coll'asse delle x .

Poichè la derivata $\frac{dy_1}{dx_1}$ è da prendersi dall'equazione della curva $F(x, y) = 0$, e che per ogni punto della curva dovrà esser soddisfatta la relazione

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy},$$

è chiaro che l'equazione della tangente alla curva $F(x, y) = 0$ potrà esser ancora rappresentata da

$$3. \quad (y - y_1) \frac{dF}{dy_1} + (x - x_1) \frac{dF}{dx_1} = 0.$$

La retta che pel punto di contatto x_1, y_1 va perpendicolarmente alla tangente, dicesi normale alla curva. Quindi se l'equazione dell'ultima e l'equazione 1 siano riferite a coordinate rettangolari, per l'equazione 7 del n° 142

si avrà come equazione della normale

$$4. \quad y - y_1 = - \frac{dx_1}{dy_1} (x - x_1),$$

ovvero, avendo riguardo all'equazione 2,

$$5. \quad (y - y_1) \frac{dF}{dx_1} - (x - x_1) \frac{dF}{dy_1} = 0,$$

Ma se gli assi siano inclinati sotto l'angolo φ , e siano a ed a_1 le tangenti trigonometriche degli angoli α ed α_1 che la tangente e normale formano coll'asse delle x , a norma dell'equazione 3 del n° 141 ed attesa l'inclinazione rettangolare delle due rette, avrà luogo tra a , a_1 e φ la relazione

$$1 + aa_1 + (a + a_1) \cos \varphi = 0.$$

Or essendo
$$a = \frac{dy_1}{dx_1} = - \frac{dF}{dx_1} : \frac{dF}{dy_1},$$

si avrà mercè questo valore dall'ultima equazione:

$$a_1 = \left\{ \frac{dF}{dx_1} \cos \varphi - \frac{dF}{dy_1} \right\} : \left\{ \frac{dF}{dy_1} \cos \varphi - \frac{dF}{dx_1} \right\};$$

quindi l'equazione della normale

$$y - y_1 = a_1 (x - x_1)$$

si trasformerà nella seguente:

$$6. (y - y_1) \left\{ \frac{dF}{dy_1} \cos \varphi - \frac{dF}{dx_1} \right\} - (x - x_1) \left\{ \frac{dF}{dx_1} \cos \varphi - \frac{dF}{dy_1} \right\} = 0.$$

La porzione dell'asse delle ascisse, compresa tra la tangente e l'ordinata del punto di contatto, dicesi sottotangente, e la porzione del medesimo asse compresa tra la stessa ordinata e la normale, dicesi sottonormale. Indicando con T_1 la sottotangente, con N_1 la sottonormale, con T la porzione di tangente tra il punto di contatto e l'asse delle ascisse e con N la porzione di normale tra lo stesso

punto di contatto e l'asse delle x ; dalle equazioni 1 e 4 si avranno per queste parti i valori:

$$7. \quad T_x = y_1 : \frac{dy_1}{dx_1} = y_1 \frac{dx_1}{dy_1}, \quad N_1 = y_1 \frac{dy_1}{dx_1},$$

$$T = y_1 \frac{ds}{dy_1}, \quad N = y_1 \frac{ds}{dx_1}, \quad \text{essendo } ds = (dx_1^2 + dy_1^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Da ciò risultano ancora i valori delle porzioni che la tangente determina sugli assi coordinati; imperocchè dinotando con X ciò che essa taglia sull'asse delle x e con Y la parte che definisce sull'asse delle y , dalle equazioni 7 ovvero dall'equazione 1 si avranno i valori

$$8. \quad X = x_1 - y_1 \frac{dx_1}{dy_1}, \\ Y = y_1 - x_1 \frac{dy_1}{dx_1}$$

Esempio 1. Dall'equazione al centro dell'ellisse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \quad \text{risulta} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

quindi per l'equazione 1 si ha

$$a^2 (y - y_1) y_1 + b^2 (x - x_1) x_1 = 0,$$

ovvero, mercè l'equazione $a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2$ del punto di contatto,

$$a^2 y y_1 + b^2 x x_1 = a^2 b^2,$$

ch'è l'equazione della tangente, ed in conseguenza

$$b^2 (y - y_1) x_1 - a^2 (x - x_1) y_1 = 0$$

sarà quella della normale, come già si è trovato nel n° 148.

Per mezzo delle equazioni 7 si ottiene ancora

$$T_1 = - \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}, \quad T = \frac{y_1}{b^2 x_1} (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2)^{\frac{1}{2}},$$

*

$$N_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2}, \quad N = \frac{1}{a^2} (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Queste equazioni, del pari che quelle della tangente e normale valgono ancora per l'iperbole, sol che vi si muti b^2 in $-b^2$.

Riferendosi l'iperbole equilatera ai suoi assintoti, si avrà $xy = e^2$; quindi dalle equazioni 8 risulterà

$$X = 2x_1, \quad Y = 2y_1, \quad \text{donde } XY = 4e^2.$$

Or il triangolo formato dalle porzioni X, Y degli assi e dalla tangente essendo proporzionale al prodotto XY , sarà costante.

Dell'equazione della parabola

$$y^2 = 2px \quad \text{risulta} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

quindi mercè l'equazione 1 si avrà per la tangente l'equazione

$$y_1 (y - y_1) - p (x - x_1) = 0,$$

ovvero

$$yy_1 = p (x + x_1),$$

e

$$p (y - y_1) + y_1 (x - x_1) = 0$$

sarà quella della normale. Inoltre sarà

$$T_1 = 2x_1, \quad T = (2x_1 [2x_1 + p])^{\frac{1}{2}},$$

$$N_1 = p, \quad N = (p [2x_1 + p])^{\frac{1}{2}}.$$

Dal valore di T_1 segue che rispetto alla parabola la sottotangente pareggia il doppio dell'ascissa, come già si è dimostrato nel n° 156, e da N_1 si rileva che la sottonormale è eguale al parametro, ed in conseguenza costante.

Le equazioni della tangente e normale, come ancora i valori di T e T_1 , N ed N_1 si sarebbero trovati nel tempo stesso applicabili all'ellisse, iperbole e parabola, se si fos-

sero dedotti dall'equazione generale delle sezioni coniche
 $y^2 = Mx + Nx^2$.

Esempio 2. Dall'equazione della curva logaritmica

$$y = me^{\frac{x}{m}} \text{ segue } \frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{m}} = \frac{y}{m};$$

quindi per l'equazione 1 sarà

$$m(y - y_1) - y_1(x - x_1) = 0$$

l'equazione della tangente, ed

$$y_1(y - y_1) + m(x - x_1) = 0$$

quella della normale alla curva logaritmica. Si avrà ancora facilmente dalle equazioni 7

$$T_1 = m, \quad T = (m^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$N_1 = \frac{y_1^2}{m}, \quad N = \frac{y_1}{m} (m^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La sottotangente T_1 è dunque costante ed eguale all'ordinata m dell'origine.

Similmente dall'equazione della catenaria

$$x = m \ln \frac{y \pm (y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{m}, \text{ ovvero } y = \frac{m}{2} (e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}})$$

si avranno facilmente i valori

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{(y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{m} = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}})$$

$$T_1 = \pm \frac{my}{(y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad N_1 = \pm \frac{y}{m^2} (y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$T = \frac{y^2}{(y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad N = \frac{y^2}{m}.$$

Il primo valore di $\frac{dy}{dx}$ offre un mezzo di condurre una tangente ad un punto M (Fig. 18) della catenaria. Ed in vero, supponendo $AB_1 = AB = m$, B_1R_1 parallela ad AB , ed $AR_1 = AR = y$, sarà

$$B_1R_1 = (y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ quindi } \frac{dy}{dx} = \frac{B_1R_1}{AB_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

La retta dunque, menata pel punto M parallelamente ad AR_1 , sarà la tangente richiesta.

Esempio 3. Dalle equazioni delle coordinate della cicloide :

$$x = a(t - \operatorname{sent} t), \quad y = a(1 - \operatorname{cost})$$

risulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sent} t}{1 - \operatorname{cost}} = \cot \frac{1}{2} t, \text{ ovvero } \frac{dy}{dx} = \left\{ \frac{2a - y}{y} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

quindi le equazioni

$$y - y_1 = \cot \frac{1}{2} t (x - x_1),$$

$$y - y_1 = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} t (x - x_1);$$

di cui la prima appartiene alla tangente, la seconda alla normale della cicloide. Il valore di $\frac{dy}{dx}$ dimostra che

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ per } t = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ per } t = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$$

Nell'origine, o in generale, nel luogo in cui il punto descrivente incontra AA_1 , la tangente è dunque perpendicolare all'asse, ma nel vertice l'è parallela.

Rispetto a T_1 , N_1 , T , N valgono le espressioni

$$T_1 = y_1 \left\{ \frac{y_1}{2a - y_1} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad N_1 = (2ay_1 - y_1^2)^{\frac{1}{2}} = PD,$$

$$T = y_1 \left\{ \frac{2a}{2a - y_1} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad N = (2ay_1)^{\frac{1}{2}} = MD.$$

Dal valore di N_1 ovvero di N risulta che MD (*Fig. 19*) denota il luogo e la lunghezza della normale, in conseguenza MD_1 disegnerà la tangente al punto M .

Nello stesso modo dalle equazioni esprimenti le coordinate dell'epicicloide, secondo il n° 162,

$$x = (a + a_1) \cos t_1 - a \cos \frac{a + a_1}{a} t_1,$$

$$y = (a + a_1) \sin t_1 - a \sin \frac{a + a_1}{a} t_1,$$

si ha per esprimere la posizione della tangente l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\cos t_1 - \cos(t_1 + t_1)}{\sin t_1 - \sin(t_1 + t_1)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (2t_1 + t_1)$$

Ma la retta che unisce il punto C (*Fig. 21*) col punto medio della corda MB , forma coll'asse AC_1 l'angolo $t_1 + \frac{t}{2}$; dovrà dunque la tangente in M esser parallela a questa bisecante, ed MB esser la normale; quindi la normale passerà pel punto di contatto dei due cerchi, e la tangente pel punto estremo B_1 del diametro BB_1 .

Mercè analoghe illazioni si troverà che la normale dell'epicicloide si confonde colla corda MB (*Fig. 22*) e la tangente colla corda MB_1 pel punto di contatto M , e che la tangente MB_1 prolungata farà con B_1C_1 sulla base C_1A un triangolo isoscele.

Continuazione.

Per ottenere espressa in coordinate polari una funzione dell'angolo α , che la tangente alla curva forma coll'asse delle x , si porrà il polo nell'origine A (Fig. 26), l'asse polare nell'asse AX delle ascisse, e così per trasformare le coordinate rettangolari si avranno le equazioni

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$

Differenziando i secondi membri di queste equazioni rispetto a t ed r , si avranno i valori di dx e dy , dai quali si dedurrà l'equazione

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dr \sin t + r dt \cos t}{dr \cos t - r dt \sin t};$$

del cui secondo membro dividendo numeratore e denominatore per dr , e quindi risolvendo l'equazione rispetto ad $\frac{r dt}{dr}$, ne risulterà

$$1. \quad \frac{r dt}{dr} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} t} = \operatorname{tg} (\alpha - t).$$

Si avrà dunque in $\frac{r dt}{dr}$ la tangente trigonometrica dell'angolo formato dal raggio vettore AM e dalla tangente TM, come si potrà vedere immediatamente sulla figura, quando si facciano variare di poco l'angolo ed il raggio vettore.

Menando pel punto A sul raggio vettore AM la perpendicolare NT, e prolungandola fino ad intersecare la tangente MT in T e la normale MN in N, la porzione AT di essa perpendicolare, compresa tra il polo e la tangente, sarà la sottotangente, e sottonormale la AN compresa tra il polo e la normale. Indicando, come nel n° pre-

cedente, la sottotangente AT con T_1 , la sottonormale AN con N_1 , la porzione MT della tangente con T e la porzione NM della normale con N, avremo per mezzo dei triangoli MTA ed MNA i valori

$$2. \quad T_1 = r \operatorname{tg}(\alpha - t) = \frac{r^2 dt}{dr}, \quad T = \frac{r}{dr} (dr^2 + r^2 dt^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$N_1 = \frac{r}{\operatorname{tg}(\alpha - t)} = \frac{dr}{dt}, \quad N = \frac{1}{dt} (dr^2 + r^2 dt^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Esempio 1. Rispetto alla spirale di Archimede, la cui equazione è $r = \frac{at}{2\pi}$, si ha

$$dr = \frac{a}{2\pi} dt, \quad \operatorname{tg}(\alpha - t) = \frac{rdt}{dr} = t.$$

Questa equazione dimostra che l'asse tocca la curva nel polo. Quindi si ha per T_1 , T, N_1 , N:

$$T_1 = \frac{at^2}{2\pi}, \quad T = \frac{at}{2\pi} (1 + t^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$N_1 = \frac{a}{2\pi}, \quad N = \frac{a}{2\pi} (1 + t^2)^{\frac{1}{2}},$$

donde $T_1 = N_1 \cdot t^2$, $T = N \cdot t$.

La sottonormale è costante.

Esempio 2. Dall'equazione della spirale iperbolica $rt = a$ si deduce

$$dr = -\frac{rdt}{t}, \quad \frac{rdt}{dr} = -t = \operatorname{tg}(\alpha - t)$$

$$T_1 = -a, \quad T = (a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_1 = -\frac{r^2}{a}, \quad N = \frac{1}{t} (a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La sottotangente è dunque costante, cioè che il punto estremo della tangente descrive un cerchio di raggio a .

Esempio 3. L'equazione della spirale logaritmica $r = me^{\frac{t}{m}}$ ci dà

$$\frac{dr}{dt} = e^{\frac{t}{m}}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - t) = m,$$

vale a dire che la tangente trigonometrica dell'angolo, che il raggio vettore fa colla tangente, è costante, e quindi lo è l'angolo stesso. Si ha inoltre

$$T_r = mr, \quad T = r(1 + m^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$N_r = \frac{r}{m}, \quad N = \frac{r}{m}(1 + m^2)^{\frac{1}{2}},$$

quindi $T_r = N_r \cdot m^2$, $T = N \cdot m$.

I valori di N_r e T_r dimostrano che i punti estremi della normale e della tangente descrivano ancora dalle spirali logaritmiche, che sono simili alla primitiva, hanno con essa comune il polo, e sono similmente situate rispetto al suo asse polare.

Esempio 4. Dalle espressioni generali delle quantità T_r , T , N_r , N ottenute in questo numero e nel precedente può dedursi la posizione della curva rispetto alla tangente e normale. Cerchisi a cagion di esempio la curva, la cui sottotangente sia costante ed eguale alla quantità a , e che inoltre la curva sia riferita a coordinate rettangolari: si avrà mercè le equazioni 7 del n° precedente

$$\frac{y dx}{dy} = a, \quad \text{ovvero} \quad \frac{a dy}{y} = dx,$$

quindi integrando,

$$c + x = a \log y.$$

Or essendo $y = a$ nell'ipotesi di $x = 0$, si ha $c = a \log a$, quindi l'ultima equazione diviene

$$x = a l \frac{y}{a}, \text{ ossia } y = a e^{\frac{x}{a}},$$

vale a dire l'equazione della curva logaritmica.

Esempio 5. Cercchisi la curva per ogni punto della quale sia costante l'angolo che la tangente forma col raggio vettore.

Per l'esempio 3 è noto che la spirale logaritmica possiede questa proprietà, è dunque da dimostrarsi che verun'altra curva la possega. Dinotando con t ed α gli angoli che il raggio vettore e la tangente formano coll'asse polare, dovrà $\alpha - t$ esser costante; ed in conseguenza anche $\operatorname{tg}(\alpha - t)$ dovrà avere valor costante. Indicando con a questo valore, avremo $\operatorname{tg}(\alpha - t) = a$. Ma dall'equazione 2 risulta

$$\frac{r \, dt}{dr} = a, \text{ ovvero } \frac{a \, dr}{r} = dt;$$

quindi per integrazione

$$a l r = t + c.$$

Essendo $c = a l a$ nell'ipotesi di $t = 0$, si avrà dall'ultima equazione

$$a l \frac{r}{a} = t, \text{ ovvero } r = a e^{\frac{t}{a}},$$

vale a dire l'equazione della spirale logaritmica.

Volendo risolvere il problema per mezzo di coordinate rettangolari, pongasi l'origine di queste nel polo, e l'asse delle x nell'asse polare. Così si ottiene

$$\operatorname{tg}(\alpha - t) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} t} = a,$$

e poichè $\operatorname{tg} t = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, si avrà

$$\frac{y dx - x dy}{x dx + y dy} = a, \text{ ovvero } (ay + x) dy = (y - ax) dx.$$

Per poter integrare questa equazione, omogenea rispetto ad x ed y , poniamo $y=ux$, in conseguenza $dy=udx+xdu$: con ciò si ha

$$\frac{adx}{x} = \frac{du}{1+u^2} - \frac{audu}{1+u^2},$$

$$\text{quindi} \quad a \ln x = \arctg u - \frac{a}{2} \ln(1+u^2),$$

ovvero restituendo ad u il suo valore,

$$\arctg \frac{y}{x} = \frac{a}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Pongasi $x=1$ per $y=0$, e si avrà per determinare c l'equazione $0 = \frac{a}{2} \ln c$; dimodochè l'equazione

$$\arctg \frac{y}{x} = \frac{a}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

rappresenta la curva richiesta. Or questa equazione appartiene alla spirale logaritmica, come si troverà facilmente per mezzo dei valori di x ed y tolti dalle equazioni $x=r \cos t$, $y=r \sin t$.

Cercando la curva nella quale l'angolo formato dalla tangente col raggio vettore sia la metà dell'angolo t che la normale forma coll'asse polare si perverrà all'equazione della cardioide.

170.

• Gli assintoti.

Si è già osservato nel n° 154 che sotto il nome di assintoto sia da intendersi quella tangente ad un punto infi-

nitamente lontano di una curva, la quale tangente trovasi in uno spazio finito in vicinanza degli assi coordinati. L'esistenza degli assintoti può dedursi dalle equazioni 8 del n° 168, cioè

$$1. \quad X = x - y \frac{dx}{dy}, \quad Y = y - x \frac{dy}{dx},$$

nelle quali X ed Y dinotano le parti rispettivamente definite dalla tangente su gli assi delle x ed y . Imperocchè se ciascuna od anche una sola delle quantità X ed Y tanto più si avvicini ad un dato limite come x diverrà più grande, la tangente alla curva ed in conseguenza la curva stessa si approssimerà ad una retta di definita posizione, dimodochè la distanza della curva da questa retta potrà suppirsi minore di ogni linea assegnabile.

Anche la posizione degli assintoti potrà riconoscersi nei valori di X ed Y , poichè questi definiscono sugli assi coordinati i punti che pei valori sempre crescenti di x apparterranno all'assintoto. Se col continuo crescere di x uno dei valori di X ed Y divenga infinito, allora l'assintoto risulterà parallelo all'asse delle x quando sia $X = \infty$, ed all'opposto sarà parallelo all'asse delle y nell'ipotesi di $Y = \infty$. Se poi col crescere di x spariscano X ed Y , gli assintoti passeranno per l'origine delle coordinate. In questo caso la loro posizione sarà determinata da $\frac{dy}{dx}$ per x crescente.

Se la curva sia riferita alle coordinate polari r , t , si potranno adoperare le stesse equazioni 1 per distinguere l'esistenza e posizione degli assintoti, ricorrendo alle equazioni ausiliarie $x = r \cos t$, $y = r \sin t$.

Esempio 1. L'equazione générale delle sezioni coniche

$$y^2 = Mx + Nx^2$$

rappresenta la parabola nel caso di $N = 0$, l'ellisse quando

sia $N < 0$, e l'iperbole nell'ipotesi di $N > 0$. Per iscrivere l'esistenza degli assintoti, sono da definirsi secondo l'equazione 1 i valori di X ed Y . Eliminandone y , si ottiene

$$X = -\frac{M}{\frac{M}{x} + 2N}, \quad Y = \pm \frac{M}{2\left\{\frac{M}{x} + N\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Ponendovi $x = \infty$, queste quantità divengono

$$X = -\frac{M}{2N}, \quad Y = \pm \frac{M}{2(N)^{\frac{1}{2}}}.$$

$N = 0$ rende infiniti X ed Y ; la parabola non ha dunque assintoti. $N < 0$ rende Y impossibile; quindi l'ellisse ancora non ha verun assintoto. Ponendo $N > 0$, si hanno per Y due valori reali ed assolutamente eguali; l'iperbole ha dunque due assintoti, ed egualmente inclinati all'asse delle x . Questa loro inclinazione si troverà facilmente.

Esempio 2. L'equazione

$$x^2 + y^2 - 3axy = 0,$$

che rappresenta la foglia di Cartesio, conduce ai valori

$$X = x + y \frac{y^2 - ax}{x^2 - ay} = \frac{axy}{x^2 - ay}, \quad Y = y + x \frac{x^2 - ay}{y^2 - ax} = \frac{axy}{y^2 - ax},$$

dai quali bisogna eliminare y per iscrivere i valori di X ed Y corrispondenti ad $x = \infty$. A tal uopo sostituendo ux ad y nell'equazione della curva, si avrà

$$u^2 x + x - 3au = 0,$$

donde
$$x = \frac{3au}{1+u^2}, \quad \text{ed } y = \frac{3au^2}{1+u^2}.$$

Or ponendo $u^2 + 1 = 0$, x ed y diverranno infiniti. Ma per $y = ux$ i valori di X ed Y divengono

$$X = -\frac{au}{\frac{au}{x} - 1}, \quad Y = \frac{au}{u^2 - \frac{a}{x}},$$

quindi per $x = \infty$ ed in conseguenza $u = -1$, si avrà

$$X = -a, \quad Y = -a.$$

L'assintoto è dunque inclinato di 45° all'asse delle x , e la sua equazione è

$$y = -x - a.$$

Esempio 3. L'equazione della spirale iperbolica $rt = a$ trasforma le equazioni delle coordinate x ed y , cioè

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t,$$

in
$$x = \frac{a}{t} \cos t, \quad y = \frac{a}{t} \sin t,$$

cosicchè si ha
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t - t \cos t}{\cos t + t \sin t}.$$

Quindi dall'equazione 1 si ha

$$X = -\frac{a}{\sin t - t \cos t}, \quad Y = \frac{a}{\cos t + t \sin t}.$$

Per un punto infinitamente lontano sarà $r = \infty$, quindi $t = 0$ dovendo essere $rt = a$. Così si avranno per X ed Y i valori

$$X = \infty, \quad Y = a.$$

L'assintoto è dunque parallelo all'asse polare, da cui dista della quantità a .

Il cerchio osculatore.

Supponiamo che un cerchio, rappresentato dall'equazione a coordinate rettangolari

$$1. \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2,$$

tocchi una curva $F(x, y) = 0$ nel punto x, y , vale a dire che il cerchio abbia in questo punto una comune tangente colla curva: il raggio del cerchio coinciderà colla normale della curva. Questa normale passando in conseguenza pel centro del cerchio, vale a dire pel punto $x = \alpha$, $y = \beta$, giusta l'equazione 4 del n° 168 avrà per equazione

$$2. \quad (y-\beta) dy + (x-\alpha) dx = 0.$$

È chiaro darsi infiniti cerchi che potranno soddisfare le equazioni 1 e 2, essendochè per la determinazione delle tre quantità α , β , ρ , che dinotano il luogo del centro e la lunghezza del raggio, non si hanno che due sole equazioni. Laonde per determinare completamente il cerchio fa d'uopo di una terza equazione, la quale si avrà differenziando l'equazione 2. Questa terza equazione è

$$3. \quad (y-\beta) d^2y + dy^2 + dx^2 = 0,$$

quando si riguardi x come variabile indipendente. Da quest'ultima equazione si ha il valore di β , quindi quello di α dall'equazione 2, e quello di ρ dall'equazione 1; vale a dire che ponendo per brevità $ds^2 = dx^2 + dy^2$, si avrà

$$4. \quad y - \beta = -\frac{ds^2}{d^2y}, \quad x - \alpha = \frac{dy ds^2}{dx d^2y},$$

$$5. \quad \rho = \pm \frac{ds^2}{dx d^2y},$$

Per dichiarare il significato del doppio segno di ρ , sia M il punto x, y , ed M_1 il punto $x + dx, y + dy$, supponendo che la funzione $F(x, y) = 0$ resti continua per questi punti. Il triangolo formato dai cateti dx, dy ha per ipotenusa la porzione di curva, compresa tra le ordinate y , e $y + dy$. Ma i punti M ed M_1 son prossimi, e perciò in questi due punti l'arco si confonderà colla tangente; dimodochè si potrà supporre che l'arco compreso tra i punti M ed M_1 sia per sito e grandezza eguale alla corrispondente porzione della tangente. Indicando con s l'arco della curva fino al punto M , sarà ds l'arco compreso tra M ed M_1 , dimodochè risulterà l'equazione $ds^2 = dx^2 + dy^2$, la quale sarà più specialmente esaminata nel n° 174. Or se ρ cresce mentre cresce s , ρ ed s avranno lo stesso segno, vale a dire che ρ sarà positivo; ma se ρ cresce, mentre s diminuisce, e viceversa, ρ ed s avranno segni differenti.

Il cerchio, il cui raggio è rappresentato nell'equazione 5, ha benanche il significato di potere per un'estensione infinitesima sostituire la curva nei due lati del punto di contatto. Quindi disegnando con s l'arco della curva fino al punto di contatto, v l'angolo che la tangente a questo punto forma coll'asse delle ascisse, ed x ricevendo l'incremento dx ; varieranno y di dy , s di ds e v di dv , poichè si è supposta continua la funzione $F(x, y) = 0$, e le quantità s e v , come dipendenti da x ed y saranno dal pari continue. Quindi se prendasi ds qual arco di cerchio, e propriamente del raggio ρ , si avrà

$$ds = \rho dv, \text{ ed a cagione di } \operatorname{tg} v = \frac{dy}{dx} :$$

$$ds = \rho \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{dy}{dx} = \rho \frac{d^2y}{dx^2} : \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}.$$

L'ultima equazione è identica all'equazione 1. Il cerchio dunque dell'equazione 4 e 5 ci dà la misura della cur-

vatura della linea $F(x, y) = 0$ nel punto x, y ; perciò dicesi cerchio di curvatura e ρ si nomina raggio di curvatura di essa linea.

L'equazione 5, secondo la variabile indipendente e le coordinate, prende diverse forme. Vi si è considerata, per esempio, x come variabile indipendente. Ma se ciò non fosse, essa sarebbe sostituita dall'equazione

$$(y - \beta) d^2y + (x - \alpha) d^2x + dy^2 + dx^2 = 0,$$

e quindi si avrebbe

$$6. \quad \rho = \pm \frac{ds^2}{ds d^2y - dy d^2x};$$

cosicchè se y è la variabile indipendente, il raggio di curvatura sarà dato dall'equazione

$$7. \quad \rho = \pm \frac{ds^2}{dy d^2x},$$

e se la variabile indipendente è l'arco s , lo sarà dall'equazione

$$8. \quad \frac{1}{\rho^2} = \left\{ \frac{d^2x}{ds^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{d^2y}{ds^2} \right\}^2, \text{ ovvero } \frac{1}{\rho} = \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2},$$

come si è dimostrato nell'esempio 4 del n° 14.

Se x ed y sono funzioni di una terza variabile t , l'equazione 6 potrà tuttavia servire, ovvero mercè la sostituzione delle derivate rispetto a t ai differenziali assumerà la seguente forma:

$$9. \quad \rho = \pm \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} : \left\{ \frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \right\}.$$

Siano inoltre x ed y funzioni delle variabili r e t legate per mezzo delle equazioni $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, e t sia la variabile indipendente tra le due, r e t ; secondo l'equazione 9 di questo numero, ovvero secondo l'esempio 4

del n° 14 il raggio ρ sarà espresso in coordinate polari mercè l'equazione

$$10. \quad \rho = \pm \left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} : \left\{ r^2 + 2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{dt^2} \right\}.$$

Se il cerchio e la curva sono riferite a coordinate oblique inclinate sotto l'angolo φ , l'equazione

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta) \cos \varphi = r^2$$

dovrà sostituirsi all'equazione 1, e mercè differenziazione due volte eseguita riguardando x come variabile indipendente, se ne avrà

$$11. \quad \rho = \pm \left\{ 1 + 2 \frac{dy}{dx} \cos \varphi + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} : \frac{d^2 y}{dx^2} \sin \varphi.$$

Finalmente trasportando l'origine delle coordinate nel punto di contatto x_1, y_1 , e prendendo la tangente per asse delle ascisse e la normale per asse delle y , si avrà $x_1=0$, $y_1=0$, $\frac{dy_1}{dx_1}=0$, ed in conseguenza, dopo la sostituzione delle derivate rispetto ad x ai differenziali, le equazioni 4 e 5 daranno

$$12. \quad \alpha=0, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2};$$

e colla stessa trasposizione delle coordinate l'equazione 11 diverrà

$$13. \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} \sin \varphi.$$

Esempio 1. Dall'equazione al centro dell'ellisse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ si ha mercè le equazioni 4 e 5:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}, \quad \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2}$$

quindi

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^2, \beta = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2, \rho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

I raggi di curvatura pei vertici dell'ellisse sono dunque

$$\rho = \frac{a^3}{b} \text{ per } x = 0, y = b,$$

$$\rho = \frac{b^3}{a} \text{ per } y = 0, x = a.$$

Il raggio ed il centro di curvatura dell'iperbole si avranno dalle formole precedenti scambiandovi b^2 con $-b^2$. Se poi dell'iperbole si abbia l'equazione agli assintoti $xy=c^2$, risulterà

$$\rho = \frac{4(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{2c^2}.$$

Nello stesso modo dall'equazione della parabola $y^2 = 2px$ si dedurranno i valori

$$\alpha = 3x + p, \beta = \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}, \rho = \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}.$$

Inoltre l'equazione della catenaria, equazione 2 n° 160, ci dà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}), \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{m^2}, \text{ quindi } \rho = \frac{y^3}{m}.$$

Ma per l'esempio 2 del n° 168 si ha

$$\operatorname{tg} v = \pm \frac{(y^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}}{m}, \text{ ovvero } y = \frac{m}{\cos v}, \text{ quindi } \rho = \frac{m}{2} \sec^3 v,$$

v indicando l'angolo che la tangente forma coll'asse delle x . L'espressione di ρ dimostra che il suo valore è minimo quando è $y = m$ ovvero $v = 0$, vale a dire che la curvatura è massima nel vertice; e che il raggio di curvatura, come quello del cerchio, pareggia la normale, ma va diretto in senso contrario.

Esempio 2. Essendo che nelle equazioni della cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \operatorname{cost})$$

le coordinate x ed y dipendono da t , dovranno perciò adoperarsi le equazioni 6 ovvero 9. Or si ha

$$dx = a dt (1 - \operatorname{cost}), \quad dy = a dt \operatorname{sen} t,$$

$$d^2x = a dt^2 \operatorname{sen} t, \quad d^2y = a dt^2 \operatorname{cost},$$

quindi

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = -2a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t, \quad \frac{ds}{dt} = 2a \operatorname{sen} \frac{1}{2} t,$$

e
$$\rho = 4a \operatorname{sen} \frac{1}{2} t = 2MD \text{ (Fig. 19) ;}$$

dunque nel vertice B , il raggio di curvatura sarà eguale a due volte il diametro del circolo generatore.

Dall'equazione 2 n° 162 dell'epicicloide si dedurrà nello stesso modo

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2a+a_1}{a_1} \cdot \frac{a^2}{a_1^2} (a+a_1)^2 (1 - \operatorname{cost}),$$

$$\left\{ \frac{ds}{dt} \right\}^2 = 4 \frac{a^2}{a_1^2} (a+a_1)^2 (1 - \operatorname{cost}) \operatorname{sen} \frac{1}{2} t,$$

quindi
$$\rho = \frac{4a(a+a_1)}{2a+a_1} \operatorname{sen} \frac{1}{2} t.$$

Ma (Fig. 21) la corda $MB = 2a \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$, dunque

$$\rho = \frac{2(a+a_1)}{2a+a_1} \cdot MB.$$

Nell'origine si ha $t = 0$, quindi $\rho = 0$; nel vertice è $t = \pi$,

quindi
$$\rho = \frac{4a(a+a_1)}{2a+a_1}.$$

Ponendo $a_1 = a$, l'epicicloide diverrà cardioide, quindi per questa curva si ha $\rho = \frac{4}{3} MB$. Ponendo $a_1 = \infty$ l'epi-

cicloide si trasforma in cicloide, quindi $\rho = 2MB$, come si è già trovato.

Egli è poi facile dedurre dall'epicicloide il raggio di curvatura dell'ipocicloide.

Esempio 3. L'equazione polare della limniscata $r^2 = a^2 \cos 2t$ ci dà

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{(a^4 - r^4)^{\frac{1}{2}}}{r}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{a^4 + r^4}{r^3},$$

donde per l'equazione 10

$$\rho = \frac{a^2}{3r}.$$

Similmente rispetto alla spirale di Archimede, $r = At$:

$$\rho = \frac{(A^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2A^2 + r^2};$$

quanto alla spirale iperbolica, $rt = a$:

$$\rho = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \cdot r,$$

e rispetto alla spirale logaritmica $r = e^{\frac{t}{m}}$:

$$\rho = \frac{r}{m} (1 + m^2)^{\frac{1}{2}},$$

dimodochè il raggio di curvatura della spirale logaritmica è proporzionale al raggio vettore.

Esempio 4. Per un sistema di assi coordinati rettangolari si cerca una curva il cui raggio di curvatura r sia proporzionale al cubo della normale N , ovvero che si abbia $a^3 r = N^3$, a^3 indicando una costante.

Ponendo in x la variabile indipendente, dall'equazione 7 del n° 168 e dell'equazione 5 di questo numero si avrà

$$N = y \frac{ds}{dx}, \quad r = -\frac{ds^2}{dx \, d^2y},$$

quindi per $N' = a^2 r$:

$$a^2 = -y' \frac{d^2 y}{dx^2}, \text{ ovvero } \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{a^2}{y^2}.$$

Moltiplicando questa equazione per $2 \frac{dy}{dx}$ ed integrando ,
ne risulta

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = c + \frac{a^2}{y^2}, \text{ ovvero } dx = \frac{y dy}{(a^2 + c y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

e da questa , mercé una seconda integrazione ,

$$\frac{1}{c} (a^2 + c y^2)^{\frac{1}{2}} = C + x.$$

A fin di determinare una delle costanti c e C pongasi che
 y debba sparire insieme ad x ; si avrà $Cc = a$; quindi

$$y^2 = 2ax + cx^2,$$

vale a dire che l'equazione di una sezione conica renderà
soddisfatta la condizione proposta.

172.

Curve osculatrici in generale

Quando due curve s'incontrano nel loro corso , può av-
venire che si tagliano , o che si toccano , o che siavi con-
tatto ed intersezione ad un tempo. Se le due curve , rap-
presentate dalle equazioni

$$y = Fx, \quad y = fx$$

s'intersecano nel punto x, y , le loro ascisse ed ordinate
dovranno esser eguali per quel punto, vale a dire che do-
vrà essere

$$Fx_1 = fx_1.$$

Ma se le curve si toccano nel punto x_1, y_1 , dovranno contemporaneamente essere

$$F x_1 = f x_1 \text{ e } F' x_1 = f' x_1,$$

giacchè esse avranno una tangente comune, e $F' x_1$, ovvero $f' x_1$, determina la posizione di questa retta. Se poi le curve abbiano a tagliarsi nel punto di contatto, ciò dipenderà dalla grandezza delle due ordinate che per le due curve corrispondono alle ascisse $x_1 + h$ ed $x_1 - h$, h disegnando un infinitamente piccolo. Imperocchè, ponendo sempre che h sia infinitesima, se avrà luogo la relazione

$F(x_1 + h) > f(x_1 + h)$ e nel tempo stesso $F(x_1 - h) > f(x_1 - h)$,
od anche

$F(x_1 + h) < f(x_1 + h)$ e nel tempo stesso $F(x_1 - h) < f(x_1 - h)$,

e curve potranno non intersecarsi nel punto di contatto, essendochè prima e dopo dello stesso punto l'ordinata della curva $y = f x$ è minore nel primo caso e maggiore nel secondo della corrispondente ordinata della curva $y = F x$. Ma se nel tempo stesso si abbia

$$F(x_1 + h) > f(x_1 + h) \text{ e } F(x_1 - h) < f(x_1 - h)$$

le curve dovranno tagliarsi nel punto di contatto x_1, y_1 . Quindi se la differenza

$$F(x_1 + h) - f(x_1 + h)$$

muta segno a miscora che h è positiva o negativa, le due curve si taglieranno; se poi il segno si conserva, le due curve non si taglieranno nel punto di contatto x_1, y_1 .

Il contatto o l'osculazione, abbia o pur no luogo un'intersezione, può essere di diverse specie. Imperocchè lasciando identica la curva $y = F x$ e prendendo diverse curve $y = f x$, potrà nell'ipotesi di h infinitesima la precedente differenza

esser ora più grande ed ora più piccola, ovvero possono le curve oltre al punto di contatto ed i due che gli son prossimi, averne altro di comune o nessuno. Questa distinzione apparisce chiara, quando le ordinate $F(x_i + h)$ o $f(x_i + h)$ siano svolte nella serie di Taylor. Imperocchè se le funzioni Fx ed fx restino continue in vicinanza di x_i , h sia infinitesima, e Fx ed fx non cangino di segno per $x = x_i + h$ ed $x = x_i - h$; le somme dei secondi membri delle due serie:

$$F(x_i + h) = Fx_i + hF'x_i + \frac{h^2}{2} F''x_i + \frac{h^3}{2.3} F'''x_i + \dots \\ + \frac{h^n}{2.3\dots n} F^{(n)}(x_i + \Delta h),$$

$$f(x_i + h) = fx_i + hf'x_i + \frac{h^2}{2} f''x_i + \frac{h^3}{2.3} f'''x_i + \dots \\ + \frac{h^n}{2.3\dots n} f^{(n)}(x_i + \Delta h),$$

avranno lo stesso segno del primo termine che non si annulla.

Se dunque sia $Fx_i = fx_i$ e $F'x_i = f'x_i$, ma che $F''x_i$ ovvero $f''x_i$ non si annulli, allora avrà luogo un semplice contatto senza intersezione, imperocchè il terzo termine $\frac{h^2}{2} F''x$ ovvero $\frac{h^2}{2} f''x$, ed in conseguenza la somma di questo termine e dei seguenti, non muterà segno per $-h$ e $+h$. Questo caso avviene quando una delle linee è linea retta.

Se inoltre sia

$$Fx_i = fx_i, F'x_i = f'x_i, F''x_i = f''x_i,$$

e che non si annulli $F'''x_i$ o $f'''x_i$, le due curve si toccheranno più intimamente che nel primo caso e nel tempo stesso si taglieranno, poichè il segno di $\frac{h^3}{2.3} F'''x$ o di $\frac{h^3}{2.3} f'''x$, cangerà come quello di h .

Se all'opposto si abbia

$$Fx_1 = fx_1, F'x_1 = f'x_1, F''x_1 = f''x_1, F'''x_1 = f'''x_1,$$

e che la derivata quarta di Fx_1 o fx_1 non si annulli, il contatto delle due curve sarà più intimo ancora, ma esse non si taglieranno, poichè passando $-h$ in $+h$ resterà immutato il segno di $\frac{h^4}{2.3.4} F''''x_1$ o di $\frac{h^4}{2.3.4} f''''x_1$.

Queste deduzioni si potranno facilmente continuare; e si dirà che le curve $y = Fx$ ed $y = fx$ hanno nel punto x_1, y_1 un contatto dello n^{esimo} ordine, quando si abbiano

$$Fx_1 = fx_1, F'x_1 = f'x_1, F''x_1 = f''x_1, \dots F^{(n)}x_1 = f^{(n)}x_1,$$

e che le derivate $(n+1)^{\text{esime}}$ delle due funzioni non si annullino nel tempo stesso. Avrà luogo un contatto senza intersezione se n è impari ed un contatto con intersezione se n è pari.

Mercè queste deduzioni si potrà facilmente trovare una curva $y = fx$ la quale abbia colla curva $y = Fx$ un contatto dell'ordine m^{esimo} , e che non ne ammetta uno di ordine superiore, poichè la curva dovrà soddisfare soltanto la condizione

$$f^{(m+1)}x_1 = f^{(m+2)}x_1 = \dots = 0;$$

ed in conseguenza sarà della forma

$$y = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_mx^m.$$

Le curve di questa forma diconsi parabole, e quella del n° 155 distinguesi dal nome di parabola apollonica. Per determinare nel modo più semplice i coefficienti $A, A_1, A_2, \dots, A_m$, basterà scambiare x con $x_1 + (x - x_1)$, e mercè la serie di Taylor svolgere y secondo le potenze di $x - x_1$. Così si avrà

$$y = y_i + (x - x_i) \frac{dy_i}{dx_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2} \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} + \frac{(x - x_i)^3}{2 \cdot 3} \frac{d^3 y_i}{dx_i^3} + \dots \\ + \frac{(x - x_i)^m}{2 \cdot 3 \dots m} \frac{d^m y_i}{dx_i^m},$$

e poichè

$$y_i = F x_i, \quad \frac{dy_i}{dx_i} = F' x_i, \quad \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} = F'' x_i, \dots, \text{ si avrà}$$

$$y = F x_i + (x - x_i) F' x_i + \frac{(x - x_i)^2}{2} F'' x_i + \frac{(x - x_i)^3}{2 \cdot 3} F''' x_i + \dots \\ + \frac{(x - x_i)^m}{2 \cdot 3 \dots m} F^{(m)} x_i.$$

173.

Punti singolari delle curve.

Se

$$1. \quad F(x, y) = 0$$

rappresenti una curva riferita a coordinate parallele, e l'una o l'altra delle derivate $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, ... che dovranno dedursi dalle equazioni

$$2. \quad \frac{dF}{dx} \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dx} = 0,$$

$$3. \quad \frac{dF}{dy} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 + 2 \frac{d^2 F}{dy dx} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 F}{dx^2} = 0$$

$$4. \quad \frac{dF}{dy} \frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \left\{ \frac{d^2 F}{dy^2} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 F}{dy dx} \right\} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^3 F}{dy^3} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^3 \\ + 3 \frac{d^3 F}{dy^2 dx} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 + 3 \frac{d^3 F}{dy dx^2} \frac{dy}{dx} + \frac{d^3 F}{dx^3} = 0,$$

ecc. ecc.

risulti nulla, infinita, o prenda la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per un punto x_i, y_i della curva; questo punto x_i, y_i si dirà punto singolare.

Cominciamo colla prima derivata $\frac{dy}{dx}$. Questa per un dato punto potrà avere uno o più valori, e quanti saranno i suoi valori, tanti saranno i rami che passeranno per quel punto, essendochè ad ogni ramo apparterrà una tangente, nulla importando che le diverse tangenti coincidano o pur no, siano o pur no reali. Il punto in cui coincidono più rami di una curva, dicesi punto multiplo, ed all'opposto si dirà semplice, quando vi passa un solo ramo.

Se nell'equazione 2 le derivate parziali $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ non si annullino nel tempo stesso per un dato punto, $\frac{dy}{dx}$ avrà un solo valore, ed il punto sarà semplice. Quest'unico valore potrà esser finito, infinito o nullo.

Se $\frac{dy}{dx} = k$, la tangente formerà un angolo coll'asse delle ascisse; quando $\frac{dy}{dx} = \infty$, la tangente gli sarà perpendicolare; ed in fine sarà parallela al detto asse, quando si avrà $\frac{dy}{dx} = 0$. In quest'ultimo caso le ordinate della tangente, che precedono e seguono quella del punto di contatto, potranno esser minori o maggiori di quelle che nella curva corrispondono alle medesime ascisse. Se esse son minori, la curva da un lato e dall'altro del punto di contatto si allontanerà dall'asse delle ascisse, e sarà in conseguenza convessa verso il medesimo asse. Se poi le coordinate della retta saranno maggiori, la curva si avvicinerà d'ambo i lati all'asse delle ascisse, e quindi sarà concava verso questo asse. Lo stesso valerà per $\frac{dy}{dx} = k$

Inoltre, sia $\frac{dy}{dx} = k$ o $\frac{dy}{dx} = 0$, l'ordinata della tangente potrà esser minore di quella della curva pel punto

$x = x_i - h$, e maggiore invece pel punto $x = x_i + h$, o viceversa. In questo caso la tangente avrà colla curva un contatto di second'ordine, e perciò, come si è dimostrato nel n° precedente, sarà $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Questa proprietà si accorda coll'altra, che essendo $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ sarà $\rho = \infty$. Un punto, che ha questa proprietà, dicesi punto d'inflexione, se la tangente taglia la curva, vale a dire se la curva comincia dall'esser convessa verso l'asse delle ascisse e poi diviene concava, o viceversa. Quindi se $\frac{d^2y}{dx^2}$ muta di segno per $x_i + h$, ed $x_i - h$, il punto x_i, y_i sarà un punto d'inflexione. La tangente si confonderà tanto più intimamente colla curva, per quante più derivate successive, y''', y'''' , . . . si annulleranno, ed avrà luogo un punto d'inflexione quando l'ultima delle derivate che si annullano, sia di ordine pari, e muti segno tra $x_i + h$ ed $x_i - h$.

Se y' ha un solo valore ed y'' è diversa da zero, il punto non avrà veruna distinzione; sarà in vece un punto d'inflexione se sia $y'' = 0$ ed un punto d'inflexione di ordine superiore se più coppie delle derivate successive ad y'' si annullano e mutano segno tra $x_i + h$ ed $x_i - h$.

Poniamo il caso che nell'equazione 2 sia

$$\frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad \text{quindi} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Il vero valore di y' si troverà allora per mezzo dell'equazione 3. Ma questa trasformandosi in

$$\frac{d^2F}{dy^2} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 + 2 \frac{d^2F}{dy dx} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dx^2} = 0,$$

darà per y' due valori, e quindi due rami s'incontreranno nel punto x_i, y_i , supponendo che le derivate parziali del

terzo o di altro ordine superiore di $F(x, y) = 0$ non si annullino.

Or se i due valori di y' , tratti dall'equazione precedente, siano reali e diseguali, le due tangenti si taglieranno ed in conseguenza anche i rami della curva. Ma se i due valori di y' sono reali ed eguali, le due tangenti si confonderanno in una, ed i due rami di curva si toccheranno. Se in fine i due valori di y' sono immaginari, non esisteranno corrispondenti rami di curva, ed il punto sarà isolato o coniugato; poichè y sarà immaginaria sì per $x = x_1 + h$ che per $x = x_1 - h$.

Se y' abbia due valori eguali, ed y divenga immaginaria per $x = x_1 + h$, ovvero per $x = x_1 - h$, la curva non esisterà da un lato dell'ordinata y_1 , ma presenterà in vece in x_1, y_1 un punto di regresso, che dirassi punta o becco, secondochè la tangente comune si troverà tra i due rami di curva, o ne starà fuori.

Pel fin qui detto è facile a comprendersi che se le derivate parziali dell'equazione 3 si annullano tutte senza eccezione, il valore di y_1 sarà da trovarsi per mezzo dell'equazione 4, e che in conseguenza si avrà un punto triplo, purchè tutte le derivate parziali della stessa equazione non si annullino ad un tempo.

Sarà facile estendere queste conclusioni ai punti quadrupli e multipli.

Esempio 1. L'equazione della così detta curva dei seni

$$y = a \sin \frac{x}{c} \text{ ci dà } \frac{dy}{dx} = a \cos \frac{x}{c}$$

rispetto all'inclinazione della tangente all'asse delle x . Questo valore diviene $\frac{a}{c}$ per $x = 0, c\pi, 2c\pi, \dots nc\pi$. E poichè per $x = nc\pi$ si ha

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{c^2} \sin \frac{x}{c} = 0,$$

così il raggio di curvatura in questo punto sarà infinitamente grande. Or per conoscere se la curva sia convessa o concava verso l'asse delle x o abbia qualche punto di flessione, poniamo $x = n\pi + h$ ed $x = n\pi - h$; con ciò avremo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{c^2} \operatorname{sen} \left\{ n\pi + \frac{h}{c} \right\} = -\frac{a}{c^2} \cos n\pi \operatorname{sen} \frac{h}{c},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{c^2} \operatorname{sen} \left\{ n\pi - \frac{h}{c} \right\} = -\frac{a}{c^2} \cos n\pi \operatorname{sen} \frac{h}{c};$$

quindi nel punto $y=0$, $x=n\pi$ avvi un punto di flessione, e questa è semplice, stantechè la derivata di terzo ordine non si annulla.

Esempio 2. L'equazione della lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 = F(x, y)$$

ha nel punto $x=0$, $y=0$ un punto doppio. Imperocchè avendosi rispetto al detto punto

$$\frac{dF}{dy} = 4(x^2 + y^2)y + 4a^2y = 0$$

$$\frac{dF}{dx} = 4(x^2 + y^2)x - 4a^2x = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 4a^2, \quad \frac{d^2F}{dx dy} = 0, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = -4a^2,$$

l'equazione 3 si trasforma in

$$4a^2 \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 - 4a^2 = 0, \quad \text{quindi} \quad \frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

E poichè le seguenti derivate del terzo ordine non si annullano in pari tempo, così i due rami della lemniscata si tagliano nell'origine, e propriamente ad angolo retto, il quale rimane bisecato dall'asse delle ascisse.

Collo stesso metodo si troverà che la cordioide presenta

un punto di regresso, una punta, in $x=0$, $y=0$ e che la tangente dei due rami si confonde coll'asse delle x .

Esempio 3. Dall'equazione

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8axy^2 = 0$$

si ha per $x=0$ ed $y=0$;

$$\frac{dF}{dy} = 4y^3 + 4x^2y - 16axy = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 4x^3 + 4xy^2 - 8ay^2 = 0;$$

$$\frac{d^2F}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2F}{dx \, dy} = 0, \quad \frac{d^2F}{dx^2} = 0;$$

$$\frac{d^3F}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3F}{dy^2 \, dx} = -16a, \quad \frac{d^3F}{dy \, dx^2} = 0, \quad \frac{d^3F}{dx^3} = 0.$$

La curva rappresentata dalla proposta equazione ha dunque in $x=0$, $y=0$ un punto triplo. L'equazione 4 diverrà

$$\frac{d^3F}{dy^2} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2 - 48a \left\{ \frac{dy}{dx} \right\} = 0,$$

quando non vi si ponga il precedente valore di $\frac{d^2F}{dx^2}$. Si avrà quindi

$$\left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^3 = 0, \quad \text{e} \quad \frac{d^3F}{dx^2} \frac{dy}{dx} - 48a = 0.$$

La prima di queste due equazioni dimostra che nel suddetto punto due rami della curva si toccano e formano, come è facile a trovarsi, una punta. La seconda poi ci dà

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ a causa di } \frac{d^3F}{dx^2} = 0.$$

Il terzo ramo taglia dunque nello stesso punto l'asse delle x ad angolo retto.

La curva della precedente equazione componesi di due foglie che si uniscono nell'origine, e potrà aversi dal cerchio, aggiungendo e togliendo dall'ordinata di ogni punto M

della circonferenza la corda menata allo stesso punto dal vertice A , cosicchè si avrà $PM_1 = PM + MA$, $PM_2 = PM - MA$.

Similmente della curva

$$y^4 + x^4 - 8ax^2 + 4a^2x^2 - 4axy^2 = 0$$

si troverà che nel punto $x = 0$, $y = 0$ due rami si toccano e tagliano l'asse delle x ad angolo retto; che i due rami si tagliano nel punto $x = a$, $y = 0$ e sono inclinati ad angoli eguali verso l'asse delle x , dei quali angoli la tangente trigonometrica è $\pm a^{\frac{1}{2}}$.

Questa curva si compone di due ellissi che si tagliano e toccano nel punto $x = 0$, $y = 0$, ma che si tagliano nel punto $x = a$, $y = 0$. Essa risulterà da un cerchio di raggio a , quando all'ordinata si aggiunga e tolga la corrispondente ascissa presa dal vertice.

174.

Gli archi delle curve.

Per rettificare una curva BC (Fig. 28), vale a dire per determinare la lunghezza dell'arco BC mercè le ascisse AD ed AH dei suoi punti estremi, rapportiamo la curva ad un sistema di coordinate rettangolari; e prendendo in essa un qualunque punto M , le cui coordinate siano $AP = x$, $PM = y$, facciamo che l'ascissa AP si accresca di $PP_1 = \Delta x$, con ciò l'ordinata PM diverrà $P_1M_1 = y + \Delta y$, in vece di BM avremo $BM_1 = s + \Delta s$, e le quantità Δy e Δs saranno positive o negative; e poniamo infine che l'equazione della curva, $y = Fx$, rappresenti una funzione continua rispetto ad x tra $x = AD$ ed $x = AH$. Or potrà suppersi Δx così piccola, ovvero che M_1 si avvicini di tanto ad M , che il valore di y tra PM e P_1M_1 vada sempre crescendo o decrescendo, dimodochè l'arco MM_1 resti con-

cavo o convesso verso l'asse delle x . Rappresentino inoltre M, K ed MK le tangenti alla curva nei punti M ed M_1 , le quali s'incontrano in K ; sarà l'angolo KM_1N sempre ottuso, in conseguenza $KN > KM_1$ ed $MN > MK + KM_1$. Ma l'arco Δs evidentemente è più grande della corda MM_1 , e minore di $MK + KM_1$; sarà dunque Δs compreso tra MN ed MM_1 .

Or la corda $MM_1 = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{1}{2}}$, e della tangente TM , che passa pel punto N , cioè $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, l'equazione, a norma della 1 del N° 168, è

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x; \text{ quindi } MN = \Delta x \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Sarà dunque

$$\Delta s > \Delta x \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right\}, \text{ e } \Delta s < \Delta x \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}.$$

Ma il punto M_1 avvicinandosi sempre più ad M fino a divenirgli contiguo, Δx si trasformerà in dx ; $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\frac{dy}{dx}$, e Δs in ds , dimodochè per questi limiti si avrà

$$1. \quad ds = dx \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ ovvero } ds = dx \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La radice sarà positiva se s ed x aumentano o diminuiscono nello stesso tempo, in contrario sarà negativa. E dall'equazione 1 si avrà qual integrale l'arco stesso, cioè

$$2. \quad s = \int dx \left\{ 1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + C = fx + C,$$

la costante C determinandosi per mezzo della condizione che l'arco debba esser nullo per $x = AD = a$, vale a dire per mezzo dell'equazione

$$3. \quad 0 = fa + C, \text{ donde } s = fx - fa.$$

Poichè si ha $1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \sec^2 \alpha$, α indicando l'angolo che la tangente alla curva forma coll'asse delle x , così l'equazione 2 prenderà ancora la forma

$$4. \quad s = \int dx \sec \alpha + C;$$

e dalle equazioni 1 e 4 risultano rispetto ad s ed α le relazioni

$$5. \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Se $f x$ non rimanga continua, allora dall'equazione della curva $y = f x$ si cercherà dedurre $x = \varphi y$, e si riguarderà y come variabile indipendente; così si avrà

$$6. \quad s = \int dy \left\{ 1 + \frac{dx^2}{dy^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + c.$$

Se in fine la curva sia riferita a coordinate polari, dalle equazioni $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ si avrà per s il valore

$$7. \quad s = \int (dr^2 + r^2 dt^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Esempio 1. Dall'equazione della parabola $y^2 = 2px$ risulta

$$\frac{dy}{dx} = \left\{ \frac{p}{2x} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \sec \alpha = \left\{ 1 + \frac{p}{2x} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

quindi per l'equazione 4 si ha

$$s = \int dx \left\{ 1 + \frac{p}{2x} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Facendo $\left\{ 1 + \frac{p}{2x} \right\}^{\frac{1}{2}} = v$, ossia $x = \frac{p}{2(v^2 - 1)}$, si ha

$$s = \int v dx = vx - \int x dv,$$

$$\text{ovvero } s = vx - \frac{1}{2} p \int \frac{dv}{v^2 - 1} = vx + \frac{1}{4} p \log \frac{v+1}{v-1},$$

*

$$\text{o pure } s = x \left\{ 1 + \frac{p}{2x} \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} p \ln \frac{(2x)^{\frac{1}{2}} + (2x+p)^{\frac{1}{2}}}{-(2x)^{\frac{1}{2}} + (2x+p)^{\frac{1}{2}}} + C.$$

Prendendo l'integrale tra i limiti $x=0$ ed $x=x$, sarà $C=0$. Del resto l'arco s cresce coll'ascissa x ; quindi s ed x hanno il medesimo segno.

Dall'equazione della curva $y^2 = px^3$, che dicesi parabola di Neil, risulta

$$s = \int \left\{ 1 + \frac{9}{4} px \right\}^{\frac{1}{2}} dx = \frac{8}{27p} \left\{ 1 + \frac{9}{4} px \right\}^{\frac{3}{2}} + C,$$

e contando l'arco dal punto $x=0$, $y=0$, si ha

$$s = \frac{8}{27p} \left\{ 1 + \frac{9}{4} px \right\}^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27p}.$$

Esempio 2. Rispetto all'arco dell'ellisse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ si ha

$$s = \int dx \left\{ \frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} = \int dx \left\{ \frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

ponendo $a^2 - b^2 = a^2 e^2$. Questo integrale per le note funzioni dei numeri precedenti non può aversi sotto forma finita. Ma ponendo $x = az$, ne viene

$$s = a \int dz \frac{(1 - e^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

e questo integrale è contenuto nell'equazione 13 del n° 70. Or integrando tra $z=0$ e $z=1$, e quindi tra $x=0$ ed $x=a$, ne risulta per lunghezza del quadrante ellittico

$$s = \int_0^a dx \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{a\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} e \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4} e^2 \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} e^2 \right)^2 - + \dots \right\}.$$

Se nell'equazione che dà il valore di s pongasi $x = a \cos \varphi$, si avrà

$$s = \int dx \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -a \int d\varphi (1 - e^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}},$$

e svolgendo $(1 - e^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$ colla formola del binomio, ne risulta

$$s = -a\varphi + \int d\varphi \left\{ \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{1 \cdot e^4}{2 \cdot 4} \cos^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 e^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^6 \varphi + \dots \right\}.$$

Or se x deve prendersi da $x = 0$ fino ad $x = a$, φ dovrà esserlo tra $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = 0$, e quindi si avrà in generale un integrale della forma

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2n} \varphi d\varphi = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varphi d\varphi.$$

Questo integrale trovasi nell'esempio 3 n° 75, e conduce all'espressione di sopra trovata.

Similmente rispetto all'iperbole $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$ si avrà l'equazione

$$s = \int dx \frac{(e^2 x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ ponendo } a^2 + b^2 = a^2 e^2.$$

Or essendo $x > a$, sostituisca $x = \frac{a}{\cos \varphi}$; si avrà tra $x = a$ ed $x = x$

$$\begin{aligned} s &= a \int_0^{\varphi} \frac{e d\varphi}{\cos^2 \varphi} \left\{ 1 - \frac{\cos^2 \varphi}{e^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ ovvero} \\ s &= a e \operatorname{tg} \varphi - \frac{a\varphi}{2e} - \frac{a}{e} \int_0^{\varphi} d\varphi \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{4e^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos^4 \varphi}{6e^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\cos^6 \varphi}{8e^6} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Esempio 3. L'equazione della catenaria

$$y = \frac{m}{2} (e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}) \text{ ci dà } \sec \alpha = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}),$$

$$\text{quindi } s = \frac{1}{2} \int (e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}) dx = \frac{m}{2} (e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}).$$

Ma per l'esempio 2 del n° 168 si ha

$$\frac{1}{2} (e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}) = \frac{dy}{dx}, \text{ quindi } s = m \frac{dy}{dx}.$$

Il punto infimo della catenaria ha l'ascissa $x=0$; quindi l'arco di questa curva, misurato dal punto più basso, è proporzionale alla tangente dell'angolo che forma coll'asse delle x la tangente menata al punto estremo dell'arco; e per un punto qualunque M (Fig. 18) avendosi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_1 R_1}{A B_1}, \text{ sarà } B_1 R_1 = A B_1 \frac{dy}{dx} = s.$$

Dalle equazioni delle coordinate della cicloide si ha

$$\sec \alpha = \left\{ 1 + \cot^2 \frac{1}{2} t \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2} t}, \quad dx = 2a \sin^2 \frac{1}{2} t dt,$$

$$\text{quindi } s = \int 2a \sin \frac{1}{2} t dt = -4a \cos \frac{1}{2} t + C.$$

Numerando gli archi da $x=0$, ne risulta

$$s = \int_0^{\pi} 2a \sin \frac{1}{2} t dt = 4a.$$

Esempio 4. L'equazione della spirale logaritmica $r = me^{\frac{1}{m}\theta}$ dà in conseguenza dell'equazione 7:

$$s = (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} r, \text{ quindi } s = T,$$

sopponendo che l'arco sia contato dal polo, e che T rappresenti la porzione della tangente, compresa tra l'asse ed il punto di contatto.

Similmente si ottiene per la spirale di Archimede, $r=At$:

$$s = (A^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{r}{2A} + \frac{A}{2} \ln \frac{r + (A^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}{2A},$$

espressione equivalente a quella della lunghezza di un arco di parabola, di cui sia r l'ordinata e $2A$ il parametro.

175.

Le superficie delle curve.

Determinare la superficie di una figura piana, terminata da linee rette e da un arco di curva, o soltanto da una curva, è ciò che dicesi quadrare la curva. Quando la curva sia riferita a coordinate parallele, allora si tratterà di una superficie, come DBCH (Fig. 29) la quale è terminata dall'arco BC, dalle ordinate BD, CH dei punti estremi e dalla corrispondente porzione DH dell'asse delle ascisse.

Or sia M un qualsivoglia punto della curva BC. Facendo crescere l'ascissa $AP = x$ di $PP_1 = \Delta x$, l'ordinata $PM = y$ varierà di Δy , vale a dire che si avrà $P_1M_1 = y + \Delta y$, e la superficie BD PM = F verrà alterata di $MPP_1M_1 = \Delta F$. Or menando MN ed M_1L parallele all'asse delle x , si avrà

$$PLM_1P_1 > PMM_1P_1 \text{ e } PMNP_1 < PMM_1P_1,$$

ovvero, nel sistema delle coordinate rettangolari,

$$\Delta F > y \Delta x \text{ e } \Delta F < (y + \Delta y) \Delta x,$$

quindi $\frac{\Delta F}{\Delta x} > y$ e nel tempo stesso $\frac{\Delta F}{\Delta x} < y + \Delta y$,

sopponendo tuttavia che Δx sia così piccolo, che l'arco MM_1 sia o soltanto convesso o soltanto concavo verso l'as-

se delle ascisse. Or se in queste ultime comparazioni Δx e ΔF pervengono ai limiti dx e dF , si avrà

$$1. \quad \frac{dF}{dx} = y, \text{ quindi } F = \int y \, dx + C.$$

L'equazione 1 suppone che la superficie F della curva, rappresentata dall'equazione $y = f(x)$, si valuti tra quei punti soltanto, pei quali la funzione non cessa di esser continua, nè siavi punto multiplo.

La costante C si determinerà riguardando la superficie come cominciata dall'ascissa $AD = a$, vale a dire che sia $F = 0$ nell'ipotesi di $x = a$. Così rispetto all'integrale

$$\int y \, dx = f(x) + C \text{ risulterà } 0 = fa + C, \text{ quindi}$$

$$2. \quad \int y \, dx = f(x) - fa.$$

Se poi la curva sia riferita a coordinate oblique inclinate sotto l'angolo φ , si troverà facilmente l'espressione della superficie dover essere

$$3. \quad F = \int y \sin \varphi \, dx + C = \sin \varphi \int y \, dx + C.$$

Quando la curva sia riferita alle coordinate polari t, r , e l'arco t si aumenti di Δt , il corrispondente raggio vettore r si aumenterà di dr , e la superficie compresa tra l'arco Δt ed i raggi vettori r ed $r + \Delta r$, si approssimerà tanto più al valore

$$\Delta F = \frac{r}{2} \cdot r \Delta t, \text{ ovvero } \frac{r + \Delta r}{2} (r + \Delta r) \Delta t,$$

per quanto Δt sarà più piccolo. Quindi nel limite dei valori di Δr sempre decrescenti si avrà

$$4. \quad dF = \frac{1}{2} r^2 dt, \text{ donde } F = \frac{1}{2} \int r^2 dt + C;$$

e la costante C di questo integrale si determinerà nello stesso modo che si è tenuto rispetto all'equazione 1.

Potremo ancora usar dell'equazione 4 in caso di coordinate parallele, quando l'ordinata y non possa esprimersi in forma esplicita; allora la sostituzione di $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} t$ ad $\frac{y}{x}$ menerà all'equazione 4 se la superficie non sia terminata che dalla curva.

Esempio 1. L'equazione della parabola $y^2 = 2px$ ci dà

$$F = \int (2px)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} (2p)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C,$$

ovvero
$$F = \frac{2}{3} xy + C.$$

Cominciando la superficie dal vertice, sarà $C = 0$, ed $F = \frac{2}{3} yx$; dunque la superficie della parabola, compresa tra l'arco cominciato dal vertice, l'ordinata dell'altro estremo dell'arco e l'asse, pareggia i due terzi del rettangolo dell'ascissa nell'ordinata. Se x ed y rappresentano diametri coniugati, la superficie sarà eguale ai due terzi del parallelogrammo $xy \operatorname{sen} \alpha$, α indicando l'angolo delle coordinate.

Dall'equazione dell'ellisse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ si ha, mercò l'equazione 7 del n° 54, rispetto alla superficie F :

$$F = \frac{b}{a} \int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{b}{a} \frac{x}{2} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{ab}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a},$$

ovvero
$$F = \frac{1}{2} yx + \frac{1}{2} ab \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$$

La prima parte di questa espressione rappresenta il triangolo delle coordinate, la seconda il settore ellittico, quando l'integrazione si comincia da $x = 0$. Estendendo l'integrale da $x = 0$ fino ad $x = a$, si ottiene la quarta parte dello spazio racchiuso dalla curva, cioè

$$F = \frac{b}{a} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \pi ab ;$$

dimodochè l'intera superficie dell'ellisse sarà πab e quella del cerchio πa^2 .

Finalmente dall'equazione dell'iperbole $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$ si ha per la superficie F :

$$F = \frac{b}{a} \int (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{b}{a} \frac{x}{2} (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} ab \ln \frac{x + (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{x - (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} + C.$$

La costante C si annulla prendendo l'integrale da $x = +a$; quindi

$$F = \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} ab \ln \left\{ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right\}.$$

Sottraendo questa superficie dal triangolo $\frac{1}{2} xy$, troveremo che $\frac{1}{2} ab \ln \left\{ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right\}$ rappresenta il settore iperbolico compreso tra il raggio vettore $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, $+a$ e l'arco iperbolico esteso dal vertice al punto x, y .

Esempio 2. L'equazione della catenaria

$$y = \frac{m}{2} (e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}})$$

ci dà la superficie

$$F = \int \frac{m}{2} (e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}) dx = \frac{m^2}{4} (e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}) + C.$$

e la costante C sparisce nell'ipotesi di $x = 0$. In questo caso, dietro l'esempio 3 del n° precedente, si avrà

$$F = m. s = m^2 \operatorname{tg} \alpha ,$$

ovvero

$$ABMP = 2AB.R_1.$$

Esempio 3. Trasportando nella cicloide l'origine dal punto A (Fig. 19) nel vertice B_1 , e prendendo le ascisse positive da B_1 verso P_1 , si avrà per le nuove coordinate, a norma dell'equazione 3 del n° 164

$$x = -a\tau + a(t - \sin t), \quad y = a(1 + \cos t);$$

$$\text{quindi} \quad F = a^2 \int \sin^2 t dt = \frac{1}{2} a^2 (t - \sin t \cos t) + C;$$

la cui costante annullandosi, quando l'integrale si prenda da $t = 0$, si avrà in questa ipotesi

$$F = \frac{1}{2} a^2 (t - \sin t \cos t) = B_1 MP_1.$$

Or essendo $\frac{1}{2} a^2 t = MCD_1$, $\frac{1}{2} a^2 \sin t \cos t = MCN$, e propriamente positivo quando si ha $\frac{\pi}{2} > t > 0$, e negativo nell'ipotesi di $\pi > t > \frac{\pi}{2}$; sarà

$$B_1 MP_1 = D_1 MN.$$

Ma se l'integrazione si estenda da $t = 0$ fino a $t = \pi$, sarà

$$B_1 MAH = \frac{1}{2} a^2 \pi, \quad \text{quindi} \quad AB_1 A_1 A = 3a^2 \pi.$$

Esempio 4. Dall'equazione della lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2t$ risulta secondo l'equazione 4:

$$F = \frac{1}{2} \int r^2 dt = \frac{1}{2} a^2 \int \cos 2t dt = \frac{1}{4} a^2 \sin 2t.$$

Questo integrale può esser preso soltanto tra i limiti $t = -\frac{4}{1}\pi$ e $t = +\frac{1}{4}\pi$, ovvero tra $t = \frac{3}{4}\pi$ e $t = \frac{5}{4}\pi$, giacchè pei valori di t compresi tra $\frac{1}{4}\pi$ e $\frac{3}{4}\pi$, ovvero tra

$\frac{5}{4}\pi$ e $\frac{7}{4}\pi$, r diviene immaginario. Si ha per conseguenza

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 dt = \frac{1}{4} a^2,$$

ed a^2 sarà lo spazio racchiuso dall'intera curva.

Esempio 3. Rispetto alla superficie F del settore MC_1A (Fig. 21) dell'epicicloide, chiamando u l'angolo MC_1A ed r il raggio vettore MC_1 , cosicchè sarà

$$\operatorname{tg} u = \frac{y}{x}, \quad u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

$$\frac{du}{dt_1} = \left\{ x \frac{dy}{dt_1} - y \frac{dx}{dt_1} \right\} : (x^2 + y^2),$$

si avrà dall'equazione 4

$$F = \frac{1}{2} \int r^2 \frac{du}{dt_1} dt_1 = \frac{1}{2} \int \left\{ x \frac{dy}{dt_1} - y \frac{dx}{dt_1} \right\} dt_1.$$

Or dalle equazioni 2 del n° 162 si ha

$$\frac{dy}{dt_1} = (a_1 + a) \left\{ \cos t_1 - \cos \frac{a_1 + a}{a} t_1 \right\},$$

$$\frac{dx}{dt_1} = -(a_1 + a) \left\{ \sin t_1 - \sin \frac{a_1 + a}{a} t_1 \right\};$$

quindi dietro la trasformazione più semplice risulterà

$$F = \frac{1}{2} (a_1 + a)(a_1 + 2a) \int \left\{ 1 - \cos \frac{a_1 t_1}{a} \right\} dt_1,$$

$$\text{ovvero } F = \frac{(a_1 + a)(a_1 + 2a)}{a_1 a} \left\{ \frac{a a_1 t_1}{2} - \frac{a^2}{2} \sin \frac{a_1 t_1}{a} \right\},$$

ed in vece si potrà scrivere

$$F = \frac{(a_1 + a)(a_1 + 2a)}{a_1 a} \left\{ \frac{a a_1 t}{2} - \frac{a^2}{2} \sin t \right\}.$$

La differenza che trovasi nel 2° membro, esprime il segmento circolare determinato dalla corda MB.

Rispetto alla spirale di Archimede $r = At$ si ha

$$F = \frac{1}{2} \int r^2 dt = \frac{1}{2} A^2 \int t^2 dt = \frac{1}{6} A^2 t^3,$$

integrale che si annulla per $t = 0$. Integrando tra i limiti $t = 2n\pi$ e $t = 2(n+1)\pi$, si avrà

$$\frac{1}{2} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} r^2 dt = 4 \left\{ n^3 + n + \frac{1}{3} \right\} \pi A^2.$$

uindi lo spazio compreso tra lo n^{esimo} e lo $(n+1)^{\text{esimo}}$ giro sarà espresso da

$$4 \left\{ n^3 + n + \frac{1}{3} \right\} \pi A^2 - 4 \left\{ (n-1)^3 + n-1 + \frac{1}{3} \right\} \pi A^2 = 8n\pi A^2,$$

cosicchè questa superficie pareggia 2n volte la superficie del cerchio descritto col raggio $2\pi A$.

176.

Continuazione.

L'equazione 3 del n° 78 offre un mezzo per quadrare approssimativamente una curva, quando siano note le ordinate che si trovano a distanze eguali ed a sufficienza vicine. Imperocchè indicando $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ queste ordinate, ovvero in rapporto all'equazione data sia

$f_a = y_0, f(a+\delta) = y_1, f(a+2\delta) = y_2, \dots, f_b = y_n,$
e facendo

$$\frac{1}{12} (f_b - f_a) = A, b - a = n\delta = c,$$

si avrà

$$1. \int_a^b f x dx = \frac{c}{n} \left\{ \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right\} - \frac{c^2}{n^2} A.$$

Nella prima parte del 2° membro di questa equazione si contiene la somma dei trapezi esistenti tra due ordinate successive, e che hanno per altezza la quantità $\frac{c}{n}$. Dall'equazione 1 si hanno inoltre talune formole, le quali ora per eccesso ed or per difetto si approssimano al vero valore della superficie. E per averne una delle più consicute, scomponiamo la superficie in istricce di tre ordinate ciascuna, supponendo che l'ascissa $b - a = c$ sia divisa in $2n$ parti eguali; e riferiamo ciascuna di queste strisce, che indichiamo con $F_1, F_2, F_3, \dots F_n$, all'equazione 1. Rispetto alla striscia F_1 , alla quale appartengono le ordinate y_0, y_1, y_2 , si ha, essendo $n = 2$:

$$2. \quad F_1 = \frac{c}{2} \left\{ \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \frac{1}{2} y_2 \right\} - \frac{c^2}{4} A.$$

Ma se si considerassero soltanto la prima e terza ordinata, y_0 ed y_2 , la superficie F_1 avrebbe il valore

$$3. \quad F = \frac{c}{2} (y_0 + y_2) - c^2 A,$$

ed F differirà così poco da F_1 che per approssimazione potremo sostituire al primo il secondo valore. Avremo così nelle equazione 2 e 3 due valori di F_1 , dai quali potremo eliminare A . In tal modo ne risulterà

$$F_1 = \frac{c}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Similmente si avrà per la striscia F_2 alla quale appartengono le ordinate y_2, y_3, y_4 ,

$$F_2 = \frac{c}{6} (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

e così ancora $F_1 = \frac{c}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3),$

$$F_n = \frac{c}{6}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Addizionando questi valori di $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, e ponendo

$$A = y_1 + y_{2n}, B = y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{2n-2},$$

$$C = y_3 + y_5 + y_7 + \dots + y_{2n-1}, \text{ e } c = 2h,$$

si avrà la superficie espressa

$$4. \quad \int_a^b f x dx = \frac{h}{3} (A + 2B + 4C),$$

nella quale espressione h rappresentata la distanza di due coordinate successive. L'equazione 4, perchè trovata da Tommaso Simpson, porta il nome di regola di Simpson.

Esempio. La superficie di un quarto di cerchio, il cui raggio sia 10, è 78, 54. Or dividendo il raggio in 10 parti eguali, e colcolando l'ordinata corrispondente a ciascun punto di divisione, si troverà ad uso dell'equazione 4, $A = 10$, $B = 32, 9631$, $C = 39, 6499$; quindi si avrà 78, 17 come valore approssimato della superficie del quarto di cerchio.

177.

Le evolute ed evolventi.

Se da un punto all'altro di una curva $y = fx$ si determini il corrispondente raggio di curvatura, questi a due a due andranno ad intersecarsi in un punto, e la serie continua dei punti d'intesezione formerà una curva, alla quale si è dato il nome di evoluta della curva $y = fx$, ed a questa il nome di evolvente della prima.

Le coordinate del centro di curvatura che nel n° 171 abbiamo indicato con α e β , dietro questa dichiarazione diverranno variabili dipendenti dall'ascissa x dell'evolvente. Quindi nelle equazioni 1, 2 e 3 del citato numero, le quali esprimono la grandezza e posizione del raggio di curvatura, cioè

$$\begin{aligned} 1. & \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2 \\ 2. & \quad (x-\alpha)dx + (y-\beta)dy = 0 \\ 3. & \quad dx^2 + dy^2 + (y-\beta)d^2y = 0, \end{aligned}$$

e che valgono per una variabile indipendente x , dovranno riguardarsi α , β e ρ come dipendenti dalla stessa x . Or differenziando l'equazione 1 rispetto ad x , y , α , β , ρ , e combinandone il differenziale coll'equazione 2, ne risulterà

$$4. (\alpha-x)d\alpha + (\beta-y)d\beta = \rho d\rho, \text{ ovvero } \frac{\alpha-x}{\rho}d\alpha + \frac{\beta-y}{\rho}d\beta = d\rho.$$

Ma $\frac{\alpha-x}{\rho}$ e $\frac{\beta-y}{\rho}$ rappresentano i coseni degli angoli che ρ forma coll'asse delle x e quello delle y ; sarà dunque

$$5. \quad \frac{\alpha-x}{\rho} = \frac{d\alpha}{d\rho}, \quad \frac{\beta-y}{\rho} = \frac{d\beta}{d\rho}.$$

Quindi la seconda dell'equazioni 4 si trasformerà in

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = d\rho^2;$$

e poichè rispetto all'arco σ dell'evoluta si ha nel tempo stesso $d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$, così ne viene

$$d\rho = d\sigma, \text{ donde } \rho = \sigma + c,$$

e rispetto a due raggi ρ e ρ_1 dell'evolvente e gli archi corrispondenti σ e σ_1 dell'evoluta si avrà la relazione

$$6. \quad \rho_1 - \rho = \sigma_1 - \sigma.$$

Differenziando inoltre l'equazione 2 rispetto a tutte le

variabili , e componendone il risultamento coll' equazione 3, si avrà

$$7. \quad dx d\alpha + dy d\beta = 0, \text{ ovvero } -\frac{dx}{dy} = +\frac{d\beta}{d\alpha};$$

vale a dire che la normale dell'evolvente si confonde colla tangente dell'evoluta. In conseguenza delle equazioni 5 e 6 l'evolvente è prodotta dall'evoluta svolgendo questa da un qualunque suo punto μ ed estendendola in linea retta. Il punto μ , del pari che ogni altro punto della tangente in μ , descrive una curva, la quale è l'evolvente; e così ogni evoluta ammetterà un'infinità di evolventi che saranno tante curve parallele, mentre a ciascuna evolvente non corrisponde che una sola evoluta.

Si ha del resto l'equazione dell'evoluta, eliminando x ed y dall'equazione dell'evolvente $y = fx$, e dalle equazioni 4 del n° 171, cioè

$$8. \quad x - \alpha = \frac{dy}{dx} \frac{ds^2}{d^2y}, \quad y - \beta = -\frac{ds^2}{d^2y}.$$

Per dedurre viceversa dall'equazione dell'evoluta quella dell'evolvente si dovrà pervenire ad una relazione tra x ed y deducendola dalle equazioni 5:

$$9. \quad x - \alpha = -\rho \frac{d\alpha}{d\rho}, \quad y - \beta = -\rho \frac{d\beta}{d\rho},$$

e da quella dell'evoluta $\beta = F(\alpha)$.

Esempio 1. Dall' esempio 1 del n° 171 si hanno le equazioni delle coordinate dell'evoluta dell'ellisse,

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^2, \quad \beta = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2,$$

riferendosi x ed y all'equazione al centro dell'ellisse. Introducendo i valori di x ed y nell'equazione di questa curva, e ponendo per brevità

$$\frac{a}{a^2-b^2} = A, \quad \frac{b}{a^2-b^2} = B,$$

si avrà per equazione dell' evoluta dell' ellisse ,

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Questa curva presenta quattro punte , che a due a due si trovano nei punti $\alpha = 0$, $\beta = B$, ed $\alpha = A$, $\beta = 0$.

Nelle medesime circostanze l' iperbole ha per evoluta la curva

$$\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\beta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = -1, \text{ essendo } A = \frac{a}{a^2+b^2}, B = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Similmente essendo

$$\alpha = p + 3x, \quad \beta = \left\{ \frac{8x^3}{p} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

le coordinate del centro di curvatura della parabola $y^2 = 2px$, si avrà per equazione dell' evoluta

$$\beta^3 = \frac{8}{27} \frac{(x-p)^3}{p},$$

, vale a dire la parabola di Neil.

Esempio 2. Dall' equazione della cicloide

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - (2ay - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

si hanno quali coordinate del centro di curvatura

$$y = -\beta, \quad x = \alpha - 2(-2\alpha\beta - \beta^2)^{\frac{1}{2}};$$

quindi l' equazione dell' evoluta sarà

$$\alpha = a \arccos \frac{a+\beta}{a} + (-2\alpha\beta - \beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ma scambiando α con $\pi\alpha - \alpha$ e β con $\beta - 2\alpha$, si ottiene

$$\alpha = a \arccos \frac{a - \beta}{a} - (2\alpha\beta - \beta^2)^{\frac{1}{2}},$$

vale a dire l'equazione primitiva della cicloide, il cui asse delle ordinate trovasi trasportato al disotto di quello delle x della quantità $2a$, e l'origine trovasi al disotto del punto medio B (Fig. 19) della AA'.

Similmente si troverà che l'evoluta della catenaria è

$$\alpha = m \ln \frac{\beta \pm (\beta^2 - 4m^2)^{\frac{1}{2}}}{2m} \mp \frac{\beta}{2} \frac{(\beta^2 - 4m^2)^{\frac{1}{2}}}{2m}$$

Esempio 5. Trasformando le equazioni 8 in modo che x cessi di essere la variabile indipendente, per la qual cosa esse divengono

$$x - \alpha = - \frac{dx ds^2}{d^2x dy - d^2y dx}, \quad y - \beta = \frac{dy ds^2}{d^2x dy - d^2y dx},$$

si potranno utilizzare queste equazioni per le curve che sono riferite a coordinate polari. Si troverà, per esempio, che l'evoluta di una spirale logaritmica è ancora una spirale logaritmica, che ha lo stesso polo, ma è diversamente situata, proprietà che già si deduce, secondo l'esempio 3 del n° 171, dal dover essere

$$\rho = \frac{r}{m} (1 + m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Imperocchè m dinotando la tangente, ed in conseguenza

$\frac{m}{(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}}$ esprimendo il seno dell'angolo φ che il raggio

vettore forma colla tangente, ossia quello che la normale forma colla retta menata dal polo perpendicolarmente al raggio vettore; quest'angolo dell'ultima retta appartenente all'evoluta sarà costante, e perciò rispetto all'evoluta si avrà $\operatorname{tg} \varphi = m$.

*

Esempio 4. Sia da cercarsi l'evolvente del cerchio

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2.$$

Avendo riguardo alle equazioni 9 si ottiene

$$d\rho = \pm \frac{r d\alpha}{\beta}, \quad \rho = \pm r \operatorname{arcsen} \frac{\alpha}{r},$$

quindi
$$x - \alpha = \pm (r^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} \frac{\alpha}{r},$$

$$y - \beta = \pm \frac{\beta}{\alpha} (r^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} \frac{\alpha}{r},$$

ovvero, eliminando $(r^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} \frac{\alpha}{r}$,

$$r^2 = \alpha x + \beta y,$$

vale a dire, secondo l'equazione 4 del n° 146, l'equazione della tangente al cerchio. La lunghezza dell'arco svolto φ essendo $r\varphi$, si avrà pel raggio vettore R di un punto N della richiesta evolvente,

$$R^2 = r^2 + r^2 \varphi^2 = x^2 + y^2,$$

dimodochè ponendo $\alpha = r \cos \varphi$, $\beta = r \sin \varphi$, si avrà dalla precedente equazione della tangente

$$r = x \cos \varphi + y \sin \varphi,$$

la quale relazione unita alla precedente espressa in r , φ , x ed y , ci dà come equazioni dell'evolvente del cerchio

$$x = r (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi), \quad y = r (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

Questi valori si possono ottenere immediatamente considerando lo svolgimento del cerchio. Ed in vero, supponendo che MN (Fig. 30) sia la lunghezza dell'arco circolare AM svolto dal punto A, e che ponendo MCA. = φ , l'asse delle ascisse vada condotto pei punti C ed A; saranno coor-

dinate rettangolari del punto N dell'evolvente AN,

$$CQ = x = CP + SN, \quad NQ = y = PM - MS.$$

In fine si troverà facilmente che la superficie del settore NCA ha per espressione

$$\frac{(R^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{6a}.$$

178.

Le traiettorie.

Dicesi *traiettoria* quella linea che secondo una data legge taglia un sistema di linee contenute in una comune equazione. Sia quindi

$$1. \quad f(x, y, a) = 0$$

l'equazione di una curva riferita ad un sistema di coordinate rettangolari, nella quale si diano successivamente ad a tutti i valori di cui sarà capace: si avrà così un sistema di curve omogenee, che saranno intersecate in modo dalla traiettoria, che le coordinate di ogni punto d'intersezione rendano soddisfatta una data equazione di condizione. Tutte le quantità che entrano in questa equazione e che sono dipendenti dalle coordinate di un punto d'intersezione, potranno esprimersi per mezzo di x, y, a dell'equazione 1; dimodochè l'equazione di condizione potrà sempre aver la forma

$$2. \quad \varphi \left\{ x, y, a, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \right\}.$$

quando le derivate $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ siano determinate mercè l'equazione della traiettoria.

All'equazione della traiettoria può pervenirsi per due di-

verse vie. Esprimendo in x, y tutte le quantità dipendenti dalla natura della traiettoria e che sono contenute nell'equazione 2, si potrà da questa e dall'equazione 1 eliminare la costante a , e l'equazione in tal modo ottenuta conterrà le condizioni appartenenti a tutti i punti d' intersezione, ed in conseguenza rappresenterà la traiettoria stessa. Intanto questa eliminazione non sempre è possibile o attuabile.

La seconda via è poi la seguente. Si riguardi l'equazione 1 come quella della traiettoria ed a come una variabile dipendente da x ; così le quantità $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ si potranno esprimere in $x, a, \frac{da}{dx}, \frac{d^2a}{dx^2}, \dots$ e si avrà un'equazione differenziale dal cui integrale e dall'equazione 1 eliminando la variabile a , si avrà l'equazione della traiettoria.

Per avere sott'occhio un caso particolare facciamoci a cercare la curva che tagli sotto un dato angolo la famiglia di linee dell'equazione 1.

L'angolo u sotto cui due curve s'inelimano, è eguale all'angolo delle loro tangenti nel punto comune, e quindi alla differenza degli angoli α ed α_1 che esprimono le inclinazioni pel medesimo verso di esse tangenti all'asse delle ascisse. Laonde indichiamo con x, y le coordinate del punto d' intersezione; scriviamo p in luogo di $\frac{dy}{dx}$, supponendo che queste derivate si riferiscano alle curve intersecate, e facciamo $\operatorname{tg} u = m$: ne risulterà l'equazione di condizione

$$3. \quad m = \frac{\frac{dy}{dx} - p}{1 + p \frac{dy}{dx}}, \text{ ovvero}$$

$$4. \quad (m + p) dx + (mp - 1) dy = 0.$$

Or differenziando l'equazione 1 ed eliminando a dal differenziale, si avrà p espressa soltanto in x ed y ; e questo valore, introdotto nell'equazione 4, ci darà l'equazione della traiettoria.

Seguendo poi l'altra via e ponendo in vece dell'equazione 1,

$$5. \quad y = F(x, a),$$

si avrà

$$6. \quad p = \frac{dF}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{da} \frac{da}{dx};$$

e così l'equazione 4 diverrà

$$7. \quad m \left[1 + \left\{ \frac{dF}{dx} \right\}^2 \right] + \left[m \frac{dF}{dx} - 1 \right] \frac{dF}{da} \frac{da}{dx} = 0.$$

Se l'angolo u , sotto cui le curve dell'equazione 1 debbono essere intersecate, è un angolo retto, la traiettoria si dirà ortogonale. Rispetto ad essa si ha $m = \infty$; quindi dalla 3 risulterà l'equazione di condizione

$$8. \quad 1 + p \frac{dy}{dx} = 0,$$

ovvero, per rispetto all'equazione 6,

$$9. \quad 1 + \left\{ \frac{dF}{dx} \right\}^2 + \frac{dF}{dx} \frac{dF}{da} \frac{da}{dx} = 0.$$

Esempio 1. La curva dell'equazione 5 sia una retta condotta per l'origine e rappresentata dall'equazione $y = ax$.

Essendo $p = a = \frac{y}{x}$, dall'equazione 4 risulterà

$$\left\{ m + \frac{y}{x} \right\} dx + \left\{ \frac{my}{x} - 1 \right\} dy = 0,$$

$$\text{ovvero} \quad m(xdx + ydy) + ydx - xdy = 0.$$

Quindi pel n° 117 si ha l'integrale

$$\operatorname{ml} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C,$$

e se le coordinate rettangolari si trasformino in polari, facendo

$$x = r \cos (t - C), \quad y = r \sin (t - C),$$

quindi
$$t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

ne risulterà $r = e^{\frac{t}{m}}$,

vale a dire l'equazione della spirale logaritmica, com'era da attendersi dietro l'esempio 3 del n° 169.

Se poi la risoluzione del problema si faccia dipendere dalle equazioni 5 e 6, cosicchè sarà

$$p = a, \quad \frac{dF}{dx} = x \frac{da}{dx},$$

si otterrà dall'equazione 7:

$$m(1 + a^2) dx + x(ma - 1) da = 0,$$

donde l'integrale

$$\operatorname{ml} (x[1 + a^2]^{\frac{1}{2}}) = \operatorname{arctga} + C,$$

ed essendo $a = \frac{y}{x}$, si avrà come sopra

$$\operatorname{ml} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C.$$

Se le rette $y = ax$ debbono essere intersecate ad angolo retto, allora si ricorrerà alle equazioni 8 e 9, o più semplicemente all'integrale già trovato, il quale nell'ipotesi di $C = \pm m/c^2$ si trasforma in

$$\operatorname{ml} \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{c^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

equazione che nell'ipotesi di $m = \infty$ ci dà

$$1(x^2 + y^2) - 1c^2 = \frac{1}{m} \arctg \frac{y}{x} = 0, \text{ quindi } x^2 + y^2 = c^2.$$

La curva è dunque un cerchio.

Esempio 2. La curva dell'equazione 5 sia una parabola della forma $y = ax^n$: se ne cerca la traiettoria ortogonale. L'equazione 8 ci dà

$$nax^{n-1} \frac{dy}{dx} + 1 = 0, \text{ e poichè } a = \frac{y}{x^n},$$

$$ny dy + x dx = 0, \text{ donde } ny^2 + x^2 = C.$$

La traiettoria è dunque un'ellisse, i cui assi 2A e 2B sono dati dalle relazioni $A^2 = C$ e $B^2 = \frac{1}{n} C$, dimodochè uno degli assi resterà indeterminato insieme con n .

La traiettoria generale ha un'espressione difficile.

Esempio 3. Per determinare la traiettoria ortogonale di tutte le curve espresse da

$$\left\{ \frac{y}{b} \right\}^n + \left\{ \frac{x}{a} \right\}^n = 1,$$

in cui a sia variabile, si ha dalla differenziazione dell'equazione data:

$$\frac{y^{n-1}}{b^n} p + \frac{x^{n-1}}{a^n} = 0,$$

ed eliminando a ,

$$xy^{n-1} p = y^n - b^n, \text{ ovvero } p = \frac{y^n - b^n}{xy^{n-1}};$$

quindi secondo l'equazione 8 si avrà per la traiettoria ortogonale

$$(y^n - b^n) \frac{dy}{dx} + xy^{n-1} = 0, \text{ ovvero } \left\{ y - \frac{b^n}{y^{n-1}} \right\} \frac{dy}{dx} = -x.$$

Questa equazione ci dà per mezzo d' integrazione

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{b^2 y^{2-n}}{2-n} = -\frac{1}{2}x^2 + C, \text{ ovvero } x^2 + y^2 = \frac{2b^2 y^{2-n}}{2-n} + C.$$

Nel caso di $n=2$, vale a dire che l'equazione data esprime una serie di ellissi che abbiano comune un medesimo asse minore, l'equazione precedente

$$\left\{y - \frac{b^2}{y^{n-1}}\right\} \frac{dy}{dx} = -x \text{ trasformasi in } \left\{y - \frac{b^2}{y}\right\} \frac{dy}{dx} = -x,$$

donde per mezzo d' integrazione si ha l'equazione

$$\frac{1}{2}y^2 - b^2 \log \frac{y}{c} = -\frac{1}{2}x^2, \text{ ovvero } x^2 + y^2 - 2b^2 \log \frac{y}{c} = 0.$$

Esempio 4. Poniamo che le date ellissi rimangano simili, vale a dire che un asse sarà ma , se l'altro sia espresso da a ; e perciò, essendo a variabile, sarà

$$y^2 = m^2 (a^2 - x^2), \quad \frac{dy}{dx} = -m^2 \frac{x}{y}.$$

La traiettoria ortogonale di queste ellissi avrà per equazione

$$-m^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

in cui la variabile è sparita da se medesima. L'integrale n'è

$$m^2 \log y = \log cx, \text{ ovvero } y^{m^2} = cx.$$

Questa traiettoria disegna, secondo Eulero, la direzione secondo la quale la forza di gravità in ogni punto della superficie terrestre spinge i corpi dentro di essa, nell'ipotesi che la terra si componga puramente di strati concentrici, i quali siano ellittici, simili ed in equilibrio in virtù della rotazione.

Esempio 5. Sia da cercarsi la curva che tagli tutte le parabole $y^2 = 4ax$ in modo che la superficie compresa tra

l'arco di parabola e le coordinate del punto d'intersezione resti costante per ciascuna parabola, vale a dire che sia

$$\int_0^x y dx = b^2.$$

Differenziando questa equazione ovvero

$$2 \int_0^x (ax)^{\frac{1}{2}} dx = b^2$$

rispetto ad a ed x , si avrà

$$2(ax)^{\frac{1}{2}} dx + \frac{da}{a} \int_0^x (ax)^{\frac{1}{2}} dx = 0,$$

ossia

$$2(ax)^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} b^2 \frac{da}{a} = 0, \text{ ovvero } x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{b^2}{4} \frac{da}{a^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Integrando quest'equazione si ha

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{b^2}{2} a^{-\frac{1}{2}} = C,$$

ovvero, introducendovi il valore di a tratto dall'equazione della parabola,

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - b^2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y} = C, \text{ ovvero } y = \frac{3b^2 x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{3}{2}} - 3C}.$$

A misura che x diviene più piccola, è d'uopo per la natura del problema che y divenga più grande; e perciò nel valore di y dovrà essere la costante $C = 0$. Donde risulta

$$2xy = 3b^2,$$

equazione dell'iperbole equilatera.

Le linee d'inviluppo.

Se l'angolo costante α che la traiettoria forma colle curve rappresentate dall'equazione 1 del n° precedente, diventa nullo, la traiettoria toccherà tutte le curve dell'equazione

$$1. \quad f(x, y, a) = 0, \text{ ovvero } y = F(x, a).$$

Allora la traiettoria dicesi linea d'inviluppo, e le curve da essa toccate diconsi linee inviluppate.

L'equazione 7 del n° precedente divenendo pel caso di $m = 0$

$$\frac{dF}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0, \text{ ovvero } \frac{dF}{da} = 0,$$

egli è chiaro che per ottenere l'equazione della linea d'inviluppo bisognerà eliminare la variabile a dalle equazioni

$$2. \quad y = F(x, a) = 0, \quad \frac{dF}{da} = 0,$$

$$\text{ovvero} \quad f(x, y, a) = 0, \quad \frac{df}{da} = 0$$

Se l'equazione generale delle curve inviluppate è

$$3. \quad f(x, y, a, b) = 0,$$

l'equazione della linea d'inviluppo si avrà da un integrale particolare di un'equazione differenziale del 2° ordine. Questa equazione si ottiene eliminando a e b dall'equazione 2 e dalla prima e seconda sua derivata.

Esempio 1. I punti estremi di una retta di lunghezza costante A , scorrono su i lati di un angolo retto. Quale sarà la linea d'inviluppo di questa retta?

Prendendo i lati dell'angolo retto ad assi coordinati, ed

indicando con α l'angolo che la retta forma coll'asse delle ascisse, la sua equazione sarà

$$\frac{y}{A \operatorname{sen} \alpha} + \frac{x}{A \cos \alpha} = 1, \text{ ovvero } y = -x \operatorname{tg} \alpha + A \operatorname{sen} \alpha.$$

Differenziando questa equazione rispetto ad α , ne risulta

$$0 = -\frac{x}{\cos^2 \alpha} + A \cos \alpha, \text{ quindi } \cos \alpha = \left\{ \frac{x}{A} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Con ciò l'equazione della retta si trasforma in

$$y = A \left[1 - \left\{ \frac{x}{A} \right\}^{\frac{2}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ ovvero } y^{\frac{2}{2}} + x^{\frac{2}{2}} = A^{\frac{2}{2}},$$

vale a dire in un'equazione simile a quella dell'evoluta dell'ellisse.

Esempio 2. Sulla retta B_1B (Fig. 31) sono dati due punti fissi B_1 , B . Un'altra retta G_1G muovesi in modo che il prodotto delle ordinate B_1D_1 e BD rimane eguale ad una quantità data c^2 : qual è la linea d'involuppo della retta mobile?

Sia C l'origine, $CB = CB_1 = A$, B_1B l'asse delle ascisse, e

$$y = ax + b$$

l'equazione generale della retta. Pei punti B e B_1 , ossia $x = A$ ed $x = -A$ si avrà

$$y = aA + b, \quad y = -aA + b,$$

quindi a norma del problema sarà

$$b^2 - a^2 A^2 = c^2,$$

ed eliminando b da questa equazione e da quella della retta, ne risulterà

$$y = ax \pm (c^2 + a^2 A^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Differenziando questa equazione rispetto ad a , ne risulta

$$0 = x \pm \frac{a\Lambda^2}{(c^2 + a^2\Lambda^2)^{\frac{1}{2}}};$$

ed eliminando a dalle due ultime equazioni, si ottiene

$$\Lambda^2 y^2 + c^2 x^2 = \Lambda^2 c^2,$$

equazione di un'ellisse, come era da attendersi in conseguenza dell'esempio 4 del n° 136.

Collo stesso metodo si troverà che una retta $ay + bx = ab$ sarà involupata da un'iperbole, se essa da due rette inclinate sotto l'angolo α taglia due segmenti tali che il triangolo $absen\alpha$ resti costante, mentre a , ed in conseguenza b , è variabile.

Esempio 3. Il centro di un cerchio muovesi sopra una retta in modo che il quadrato del suo raggio variabile risulta proporzionale all'ascissa del centro.

Essendo $y^2 + (a - x)^2 = ap$

l'equazione del cerchio, e p indicando il fattore della proporzionalità, si avrà dalla differenziazione rispetto ad a :

$$a = \frac{1}{2}p + x;$$

e $y^2 = px + \frac{1}{4}p^2$

sarà l'equazione della curva involupante, che sarà in conseguenza una parabola

Esempio 4. Una curva C , a cui va unito un punto M , si aggira sopra una curva fissa K . Qual'è la curva descritta dal punto M ?

Sia D il punto comune alle due curve in qualsiasi posizione della prima, e col punto D come centro e con $DM = r$ come raggio descrivasi un cerchio, la curva richie-

sta sarà determinata dai punti d'intersezione dei cerchi successivamente descritti. Siano quindi x, y le coordinate della curva fissa K , ed X, Y quelle dei centri dei cerchi, sarà

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = r^2$$

l'equazione di uno di questi cerchi, in cui y del pari che r dipenderanno da x . Quindi differenziando questa equazione rispetto ad x , si avrà la relazione

$$X - x + (Y - y) \frac{dy}{dx} + \frac{rdr}{dx} = 0,$$

dalla quale coll'aiuto dell'equazione del cerchio si avranno le coordinate X, Y dalla linea d'involuppo. Così si avranno, usando della relazione $dx^2 + dy^2 = ds^2$,

$$X = x - \frac{rdrdx}{ds^2} - \frac{r dy}{ds^2} (ds^2 - dr^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$Y = y - \frac{rdrdy}{ds^2} - \frac{r dx}{ds^2} (ds^2 - dr^2)^{\frac{1}{2}},$$

che sono le coordinate delle linee prodotte dal rotolare di una curva sopra un'altra, ed alle quali appartengono la cicloide, l'epicicloide, l'ipocicloide.

Sia p. e. la curva fissa K una retta che tolga ad asse delle ascisse, cosicchè sarà $y = 0$; e sia inoltre la curva mobile un cerchio di raggio a , ed il punto descrivente allontanisi dal centro di questo cerchio della quantità c ; si avrà così per ogni posizione del punto M , quando t designi la lunghezza dell'arco circolare che si è distaccato dalla retta,

$$x = t, \quad r^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{t}{a}, \quad \text{ed} \quad \frac{rdr}{dt} = c \sin \frac{t}{a}.$$

Così i valori di X, Y diverranno

$$X = t - c \sin \frac{t}{a}, \quad Y = a - c \cos \frac{t}{a},$$

i quali rappresentano la cicloide , sia allungata , raccorciata o comune.

180.

Curve simili.

Due curve piane C e C_1 (Fig. 32) diconsi simili rispetto alla forma , quando per un punto qualunque A della curva C avviene un altro A_1 nella curva C_1 , tali che i raggi AM ed AN , A_1M_1 ed A_1N_1 , i quali racchiudono angoli eguali , siano in un medesimo rapporto k , dimodochè si abbia

$$\frac{A_1M_1}{A_1N_1} = \frac{AM}{AN} = k.$$

Se gl' indicati raggi siano inoltre paralleli e diretti nel medesimo senso , le curve C e C_1 si diranno simili rispetto al sito , ed i punti A ed A_1 si diranno punti di simiglianza.

Due curve , simili per forma e sito , avranno infiniti punti di simiglianza. Imperocchè se due punti B e B_1 stiano , l' uno rispetto ad A , l' altro rispetto ad A_1 in modo che sia $\frac{AB_1}{AB} = k$, la somiglianza dei triangoli dimostra che anche le rette B_1M_1 e BM , B_1N_1 e BN si troveranno nel medesimo rapporto.

Or disegnino in generale

$$1. \quad f(x, y) = 0, \quad 2. \quad f_1(x_1, y_1) = 0$$

due curve C e C_1 , simili e similmente poste ; pongasi in un punto A della prima curva C l' origine delle coordinate , e dicansi α , β le coordinate del punto di simiglianza A_1 , corrispondente ad A : le coordinate x , y ed x_1 , y_1 di due punti similmente posti M ed M_1 ci daranno

$$\frac{A_1 P_1}{AP} = k, \quad \frac{M_1 P_1}{MP} = k, \quad \text{ossia}$$

$$8. \quad \frac{x_1 - \alpha}{x} = k, \quad \frac{y_1 - \beta}{y} = k,$$

k disegnando un numero costante assoluto, il quale sarebbe negativo nel caso che i raggi AM ed $A_1 M_1$, ecc. avessero opposte direzioni. In conseguenza le coordinate delle curve simili e similmente poste, dovranno soddisfare le condizioni espresse nelle equazioni 3. Quindi se da esse togliamo i valori x ed y e l'introduciamo nell'equazione 1, l'equazione risultante

$$4. \quad f\left\{\frac{x_1 - \alpha}{k}, \frac{y_1 - \beta}{k}\right\} = 0$$

dovrà essere identica all'equazione 2. Laonde si formerà per due curve date l'equazione 4, e questa si farà identica all'equazione 2. Se da essa si potranno ottenere valori reali di α , β , k , le curve date saranno simili.

Siano p. e. date le due curve di 2° ordine

$$5. \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$6. \quad A_1 x_1^2 + B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1^2 + D_1 x_1 + E_1 y_1 + F_1 = 0.$$

Trasportando nell'equazione 5 i valori di x ed y tolti dalle equazioni 3, si ottiene

$$Ax_1^2 + Bx_1 y_1 + Cy_1^2 + (Dk - 2C\beta - B\alpha)x_1 + (Ek - 2A\alpha - B\beta)y_1 + A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 - Dk\alpha - Dk\beta + Fk^2 = 0.$$

Or se questa equazione debba essere identica alla 6, dovranno aver luogo le cinque relazioni

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}, \quad \frac{A}{A_1} = \frac{C}{C_1}, \quad \frac{A}{A_1} = \frac{Dk - 2C\beta - B\alpha}{D_1},$$

$$\frac{A}{A_1} = \frac{Ek - 2A\alpha - B\beta}{E_1}, \quad \frac{A}{A_1} = \frac{A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 - Dk\alpha - Dk\beta + Fk^2}{F_1}.$$

Le ultime tre equazioni determinano le quantità α, β, k ; le due prime conterranno dunque le condizioni della simiglianza delle curve. Quindi se due sezioni coniche abbiano coefficienti proporzionali nei tre termini di 2° grado, come nelle equazioni 5 e 6

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1},$$

le due curve saranno simili per forma e sito.

Se queste linee sono riferite ai loro diametri principali, ed in conseguenza è $B = B_1 = 0$, basterà alla simiglianza la condizione

$$\frac{A}{A_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Se le curve sono iperboli, gli assintoti dell'una saranno paralleli a quelli dell'altra.

Se in fine di due parabole sia l'una riferita all'asse ed al vertice, ciò che darà $B = C = D = F = 0$, resteranno soddisfatte le cinque condizioni, quando sia $B_1 = C_1 = 0$. Quindi due parabole, i cui assi siano paralleli, saranno sempre simili per sito e forma, qualunque siano per essere i loro parametri.

CAPO SECONDO.

Geometria nello spazio.

A. Introduzione.

181.

Il punto.

Per determinare la posizione di un punto nello spazio, si adopera, egualmente che nel piano, un sistema di coordinate parallele o polari.

Il sistema delle coordinate parallele è formato da tre piani che hanno un punto comune, l'origine, e che si tagliano, come ordinariamente si assume per semplicità, ad angolo retto. Ciascuno di questi tre piani coordinati divide lo spazio in due regioni, l'una di qua l'altra di là del piano; quindi si trovano intorno all'origine otto angoli solidi o regioni dello spazio, ciascuna delle quali è limitata dai tre piani. Or un punto sarà dato di posizione nello spazio, quando insieme alla regione in cui giace saranno note le sue distanze dai tre piani coordinati. Imperochè indicando questi tre piani con L , M , N , e con a la distanza del punto m dal primo piano L , il luogo di m sarà da cercarsi nei due piani paralleli che distano di a dal piano L . Or supponendo noto il lato del piano L , in cui giace il punto m , questo potrà soltanto trovarsi in quello dei due piani paralleli che giace dal medesimo lato di L . Sia L_1 questo piano. Sia inoltre b la distanza del punto m dal secondo piano M ; dovrà similmente cercarsi nei due piani paralleli che distano di b dallo stesso piano M , e propriamente in quello dei due piani paralleli che giace nel lato di M , in cui dovrà trovarsi il punto m . Sia M_1 questo piano. Il punto m giacerà dun-

*

que nel tempo stesso nei due piani L_1 ed M_1 ; ed in conseguenza nella loro intersezione s . Se in fine il punto m dovrà essere alla distanza c dal terzo piano N , dovrà similmente cercarsi nei due piani paralleli che di c distano da N , e propriamente in quello dei due che trovasi con m nel medesimo lato di N . Sia N_1 questo piano, ed il punto m starà nel tempo stesso nel piano N_1 e nella intersezione s , vale a dire nel loro unico punto d'incontro.

Le intersezioni dei tre piani coordinati diconsi assi, ed ogni asse, nel caso che i piani coordinati si tagliano ad angolo retto, sarà perpendicolare al piano degli altri due. Or siano (Fig. 33) XX_1 , YY_1 , ZZ_1 i tre assi che si tagliano ad angolo retto nell'origine A ; la posizione di un punto M in una delle regioni dello spazio sarà definita mercè i segni apposti ai semiasse che partono da A . Prendansi, per esempio, positivi i semiasse AX , AY , AZ , e quindi negativi AX_1 , AY_1 , AZ_1 , e dinotino x , y , z le coordinate del punto M , rispettivamente parallele ad XX_1 , YY_1 , ZZ_1 : si avranno pel punto M , quando trovasi tra gli assi:

AX , AY , AZ le coordinate	$+x$, $+y$, $+z$,
AX_1 , AY , AZ	$-x$, $+y$, $+z$,
AX , AY_1 , AZ	$+x$, $-y$, $+z$,
AX_1 , AY_1 , AZ	$-x$, $-y$, $+z$,
AX , AY , AZ_1	$+x$, $+y$, $-z$,
AX_1 , AY , AZ_1	$-x$, $+y$, $-z$,
AX , AY_1 , AZ_1	$+x$, $-y$, $-z$,
AX_1 , AY_1 , AZ_1	$-x$, $-y$, $-z$,

né avvi altra combinazione di segni rispetto alle tre coordinate x , y , z .

Quindi se un punto trovisi nel piano XAY , cioè nel piano delle x , y , la sua ordinata parallela all'asse AZ sarà $z=0$; e se trovasi nell'asse stesso delle x , sarà $z=0$ ed $y=0$. Lo stesso vale pei punti che si trovano nel pia-

no delle x, z , in quello delle y, z , ovvero nell'asse delle y o in quello delle z .

Nel sistema poi delle coordinate polari il punto è riferito ad un piano fisso (la base) ad una retta fissa in questo piano (l'asse), e ad un punto fisso di questa retta (il polo), e la posizione del punto M sarà definita, quando siano dati i segni ed i valori assoluti della sua distanza dal polo (il raggio vettore), dell'angolo d'inclinazione del raggio vettore all'asse, e dell'angolo che il piano condotto pel raggio vettore e l'asse, forma colla base.

182.

Trasformazione delle coordinate.

1. Le coordinate parallele e polari.

Sia M (Fig. 33) un punto riferito agli assi rettangolari AX, AY, AZ , e quindi la z ne sia rappresentata dalla retta MP parallela ad AZ ; ne sarà y la PQ parallela ad AY , ed AQ la x ; cosicchè AQ forma angolo retto con QM e QP , ed MQP disegnerà l'angolo d'inclinazione del piano AMQ al piano xy . Pongasi ora il polo delle coordinate polari nell'origine A , la base nel piano xy e l'asse polare nell'asse AX , s'indichi inoltre l'angolo MAQ con α , l'angolo MQP con λ ed il raggio vettore con r : si avrà

$$AQ = AM \cos \alpha, \quad MQ = AM \sin \alpha,$$

$$PQ = MQ \cos \lambda, \quad MP = MQ \sin \lambda,$$

e quindi rispetto alle coordinate x, y, z risulteranno le equazioni

$$1. \quad x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha \cos \lambda, \quad z = r \sin \alpha \sin \lambda,$$

le quali servono egualmente a poter tradurre le coordinate parallele in polari, e queste in quelle. Imperocchè si ot-

terranno facilmente le equazioni

$$2. \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \cos \alpha = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \lg \lambda = \frac{z}{y}.$$

Indicando inoltre con β e γ gli angoli che il raggio vettore r forma cogli assi delle y e z , si avrà $y = r \cos \beta$, $z = r \cos \gamma$; quindi dalla prima delle equazioni 2 risulta

$$3. \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

II. Siano gli assi A_1X_1 , A_1Y_1 , A_1Z_1 del nuovo sistema di coordinate rettangolari rispettivamente paralleli agli antichi assi AX , AY , AZ .

In questo caso basterà conoscere le coordinate a , b , c della origine A_1 dei nuovi assi per passare da un sistema all'altro; imperocchè si avrà

$$4. \quad x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b, \quad z = z_1 + c.$$

III. Rimanga rettangolare il nuovo sistema, e conservi un asse inalterato.

Rimanga inalterato l'asse delle z e con esso l'origine A ; e gli assi delle x , y siano trasportati nel piano delle x , y in modo che l'asse x_1 faccia coll'asse x , ed in conseguenza y_1 con y , l'angolo φ . In questo caso avremo nelle equazioni 1 del n° 139 quelle della trasformazione richiesta:

$$5. \quad x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, \quad y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi.$$

IV. Gli assi rettangolari AX_1 , AY_1 , AZ_1 del nuovo sistema taglino quelli dell'antico nell'origine A .

La posizione del nuovo sistema rispetto all'antico sarà nota, quando siano date le inclinazioni della retta AE , in cui si tagliano i piani XAY , X_1AY_1 (*Fig. 34*) ossia i piani xy ed x_1y_1 , verso gli assi delle x ed x_1 , e quella del piano x_1y_1 verso il piano xy .

Or sia $EAX = \varphi$, $EAX_1 = \psi$, e θ l'angolo d'inclinazio-

ne dei piani xy ed x_1y_1 , o ciò che vale lo stesso, l'angolo degli assi z e z_1 .

Conducendo nel piano xy la AF perpendicolare ad AE , le tre rette AZ , AE , AF formeranno un sistema, il quale ha comune col sistema primitivo l'asse delle z . Quindi per le coordinte x_1 , y_1 , z_1 di un punto M , prese parallelamente agli assi, si hanno in conseguenza delle equazioni 5 le relazioni

$$6. \quad x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, \quad y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi, \quad z = z_1.$$

Poichè la retta AE giace ancora nel piano x, y_1 , sarà essa perpendicolare all'asse AZ_1 , e le due rette potranno riguardarsi come assi di un sistema rettangolare, quando vi si aggiunga la retta AG , la quale giacendo nel piano x, y_1 tagli la retta AE ad angolo retto. Se dunque indichiamo con x_1 , y_1 , z_1 le coordinate del punto M , parallele ad AE , AG , AZ_1 , avremo per trasformare le coordinate x_1, y_1, z_1 le relazioni.

$$7. \quad x_1 = x, \quad y_1 = z_1 \sin \theta + y \cos \theta, \quad z_1 = z \cos \theta - y \sin \theta.$$

Riconducendo in fine questo sistema alle coordinate parallele agli assi AX_1 ed AY_1 , mentre l'asse AZ_1 rimane invariato, si avrà similmente

$$8. \quad x_1 = x \cos \psi + y_1 \sin \psi, \quad y_1 = y \cos \psi - x_1 \sin \psi, \quad z_1 = z_1.$$

Componendo le equazioni 6, 7, 8, le coordinate sussidiarie x_1, y_1, z_1 ed x, y, z , spariranno, e si perverrà alle equazioni

$$\begin{aligned} 9. \quad x &= x_1 (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) \\ &\quad + y_1 (\cos \varphi \sin \psi - \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) \\ &\quad - z_1 \sin \varphi \sin \theta, \\ y &= x_1 (\cos \psi \sin \varphi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta) \\ &\quad + y_1 (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) \\ &\quad + z_1 \cos \psi \sin \theta, \\ z &= x_1 \sin \psi \sin \theta - y_1 \cos \psi \sin \theta + z_1 \cos \theta. \end{aligned}$$

Le equazioni 9 contengono in pari tempo i teoremi fondamentali della trigonometria sferica. Imperocchè trasportando il punto M nell'asse AX_1 , spariranno y_1 e z_1 , e rispetto ad x , y , z si avranno le equazioni

$$\begin{aligned} 10. \quad x &= x_1 (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \theta), \\ y &= x_1 (\cos \psi \sin \varphi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta), \\ z &= x_1 \sin \psi \sin \theta. \end{aligned}$$

Ma x_1 essendo il raggio vettore del punto M, in conseguenza delle equazioni 1 si avranno per l'angolo $XAX_1 = \alpha$ e l'angolo d'inclinazione λ dei piani XAX_1 ed XAY le equazioni

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \sin \alpha \cos \lambda &= \cos \psi \sin \varphi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \sin \alpha \sin \lambda &= \sin \psi \sin \theta, \end{aligned}$$

in cui si contengono le relazioni che hanno luogo tra i lati e gli angoli di un triangolo sferico.

V. Gli assi del nuovo sistema siano obbliqui.

Siano (Fig. 35) AX , AY , AZ gli antichi assi rettangolari ed AX_1 , AY_1 , AZ_1 i nuovi assi obbliqui, dinodochè si abbia

$$\begin{aligned} AQ &= x, \quad QP = y, \quad PM = z, \\ AQ_1 &= x_1, \quad Q_1P_1 = y_1, \quad P_1M = z_1, \end{aligned}$$

e si proietti la linea spezzata $x_1 + y_1 + z_1$ sull'asse AX , mentre dai punti Q_1 , P_1 , M si conducono all'asse AX le perpendicolari Q_1q , P_1p , MQ . Cadendo la proiezione di M su Q , sarà x eguale alla somma delle proiezioni di x_1 , y_1 , z_1 . In conseguenza indicando con a , b , c i coseni degli angoli che gli assi x_1 , y_1 , z_1 formano con quello delle x , si avrà

$$x = ax_1 + by_1 + cz_1.$$

I segni di questa equazione rimarranno inalterati nel caso che uno dei nuovi assi debba prendersi negativamente,

poichè ne deriverà che l'angolo da esso formato coll' asse delle x sarà maggiore del retto.

Una forma consimile prenderanno le equazioni rispetto alle proiezioni della linea spezzata $x_1 + y_1 + z_1$, sugli assi delle y e z , dimodochè si avrà il sistema delle tre equazioni di trasformazione

$$\begin{aligned} 11. \quad x &= a x_1 + b y_1 + c z_1, \\ y &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1, \\ z &= a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1, \end{aligned}$$

$a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ disegnando ordinatamente i coseni degli angoli che gli assi delle x, y, z fanno coi nuovi assi x_1, y_1, z_1 .

E tra i coseni di questi nuovi angoli hanno luogo, in forza dell'equazione 3, le relazioni

$$12. \quad a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad b^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1, \quad c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1.$$

Se il nuovo sistema ancora è rettangolare, proiettando le antiche coordinate su i nuovi assi si avranno similmente le relazioni

$$\begin{aligned} 13. \quad x_1 &= ax + a_1 y + a_2 z, \\ y_1 &= bx + b_1 y + b_2 z, \\ z_1 &= cx + c_1 y + c_2 z, \end{aligned}$$

donde risulteranno le nuove equazioni di condizione

$$14. \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1.$$

Ed in fine, dovendo rispetto alla distanza del punto M dall'origine A aver luogo le equazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2,$$

ne avremo mercè l'introduzione dei valori dati dalle equazioni 11 o 13, le seguenti relazioni tra gli angoli

$$15. \quad ab + a_1b_1 + a_2b_2 = 0, \quad ac + a_1c_1 + a_2c_2 = 0 \\ bc + b_1c_1 + b_2c_2 = 0$$

$$16. \quad aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0, \quad aa_2 + bb_2 + cc_2 = 0 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

183.

La retta.

Se son date le proiezioni di un punto M su due piani intersecatisi ad angolo retto, sarà data ancora la posizione del punto. Quindi se sia dato la serie continua dei punti, come proiezioni dei punti di una retta G su due piani che s'intersecano ad angolo retto, sarà data ancora la posizione della retta rispetto ai piani di proiezione. Or la proiezione di una retta essendo ancora una linea retta, ne segue che le equazioni

$$1. \quad x = az + p, \quad y = bz + q$$

indicando le proiezioni di una retta G su i piani coordinati xz ed yz , il sito della retta G sarà determinato dalle quattro costanti a, b, p, q . E mercè queste proiezioni sarà definita ancora quella della G sul piano xy . Imperocchè dalle equazioni 1 si rileva che nel punto $z=0, x=p$ l'asse delle x è incontrato dalla prima proiezione, e che l'asse delle y lo è dalla seconda nel punto $z=0, y=q$: per questi due punti passerà in conseguenza la proiezione della retta sul piano xy . Questa terza proiezione si avrà ancora dalle equazioni 1, eliminandone la z .

Per determinare la posizione della retta rispetto agli assi coordinati, indichiamo con α, β, γ gli angoli formati dalla retta cogli assi delle x, y, z , vale a dire gli angoli che coi medesimi assi farebbe la retta G , menata per l'origine parallelamente alla retta 1. Le omonime proiezioni di

questa retta condotta per l'origine, dovendo esser parallele a quelle della retta G , esse saranno rappresentate dalle equazioni

$$2. \quad x = az, \quad y = bz.$$

Or se x_i, y_i, z_i , dinotino le proiezioni di quel punto della retta G_i , il quale disti di r dall'origine; si avrà

$$r^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2;$$

quindi dalle equazioni 2 risulteranno

$$z_i = \frac{r}{(a^2 + b^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad y_i = \frac{br}{(a^2 + b^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad x_i = \frac{ar}{(a^2 + b^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ma per essere

$$z_i = r \cos \gamma, \quad y_i = r \cos \beta, \quad x_i = r \cos \alpha,$$

i valori di x_i, y_i, z_i ci somministrano le relazioni

$$3. \cos \alpha = \frac{a}{(a^2 + b^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{(a^2 + b^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{(a^2 + b^2 + 1)^{\frac{1}{2}}},$$

le quali conducendo alle equazioni

$$a = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}, \quad b = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma},$$

le equazioni 1 si trasformeranno in

$$4. \quad x = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} z + p, \quad y = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} z + q.$$

Se la retta giace parallela al piano delle yz , e quindi è perpendicolare all'asse delle x , essa sarà espressa, com'è chiaro, dalle proiezioni

$$5. \quad x = p, \quad y = bz + q;$$

quindi se la retta giace nel piano yz , le sue equazioni saranno

6. $x = 0, y = bz + q.$

Inoltre, se la retta G è perpendicolare al piano yz e quindi parallela all'asse delle x , le sue equazioni saranno

7. $x = p, y = q.$

Se il punto x_1, y_1, z_1 giace nella retta 1, a questa converranno secondo l'equazione 3 del n° 141 le equazioni

8. $x - x_1 = a(z - z_1), y - y_1 = b(z - z_1),$

e se essa contiene ancora il punto x_2, y_2, z_2 , avremo secondo lo stesso n° 141 le equazioni

9. $x - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} (z - z_1), y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} (z - z_1).$

Considerando in fine che la distanza d dei due punti è diagonale del parallelepipedo rettangolare, i cui spigoli sono $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$, avremo

10. $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$

184.

Due rette.

Se le due rette

1. $x = az + p, y = bz + q$

2. $x = a_1 z + p_1, y = b_1 z + q_1,$

sono in un piano, le costanti delle loro proiezioni dipenderanno dall'esser le due rette parallele o dall'intersecarsi.

Se le rette 1 e 2 debbono esser parallele, tali saranno ancora le loro omonime proiezioni, vale a dire che sarà $a = a_1, b = b_1$, dimodochè le equazioni

3. $x = az + p, y = bz + q$

$x = az + p_1, y = bz + q_1,$

rappresentano due rette parallele, e le equazioni

$$4. \quad x - x_1 = a(z - z_1), \quad y - y_1 = b(z - z_1)$$

disegnano la retta condotta pel punto x_1, y_1, z_1 parallelamente alla retta 1.

Se le rette 1 e 2 debbono intersecarsi, le coordinate del punto d'intersezione dovranno soddisfare le equazioni delle due rette, e quindi dalle equazioni 1 e 2 si avrà

$$az + p = a_1z + p_1, \quad bz + q = b_1z + q_1,$$

donde risulta l'equazione di condizione

$$(a - a_1)(q - q_1) = (b - b_1)(p - p_1),$$

la quale dovrà esser soddisfatta, affinchè l'intersezione sia possibile.

Or sia ν l'angolo delle due rette, siano o pur no nel medesimo piano, purchè in questo secondo caso s'intenda per ν l'angolo che forma colla retta 1 un'altra retta che intersecando la 1 sia parallela alla retta 2, o in generale l'angolo formato da due rette che da un medesimo punto siano condotte parallelamente alle rette 1 e 2. Siano inoltre $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ gli angoli che le rette 1 e 2 formano rispettivamente cogli assi delle x, y, z . Or se la retta

$$x = az, \quad y = bz$$

condotta per l'origine, sia parallela alla retta 1, e l'altra menata per lo stesso punto

$$x = a_1z, \quad y = b_1z$$

sia parallela alla retta 2, la posizione delle due rette, condotte per l'origine, si rispetto agli assi che tra loro, sarà la stessa che quella delle rette 1 e 2.

Ma se a contare dall'origine si prenda sull'una delle due rette la porzione r e sull'altra r' , avremo per la distan-

za d dei punti estremi x, y, z, x_1, y_1, z_1 , la relazione

$$d^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos v,$$

donde mercè l'equazione 10 del n° precedente risulta

$$\begin{aligned} & (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2rr_1 \cos v. \end{aligned}$$

ovvero, riducendo,

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = rr_1 \cos v.$$

Ma poichè $x = r \cos \alpha$, $y = r \cos \beta$, $z = r \cos \gamma$,
 $x_1 = r_1 \cos \alpha_1$, $y_1 = r_1 \cos \beta_1$, $z_1 = r_1 \cos \gamma_1$,

così l'ultima equazione ci dà la relazione

$$6. \quad \cos v = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1.$$

Or essendo nel tempo stesso

$$x = az, y = bz, x_1 = a_1 z_1, y_1 = b_1 z_1,$$

si avrà puranche, avendo riguardo alle equazioni 3 del n° precedente, per l'angolo d'inclinazione v delle rette 1 e 2 la relazione

$$7. \quad \cos v = \frac{1 + aa_1 + bb_1}{(1 + a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}(1 + a_1^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Se le rette 1 e 2 sono parallele, l'equazione 7 ci darà

$$\cos v = 1, \text{ quindi } a = a_1, b = b_1,$$

come è già noto. Ma se le due rette siano inclinate ad angolo retto, sarà

$$8. \quad \cos v = 0, \text{ ovvero } 1 + aa_1 + bb_1 = 0.$$

Se la retta 2 debba esser perpendicolare alla retta 1 e passare nel tempo stesso pel punto x_1, y_1, z_1 , allora si

dovranno determinare le costanti a_1, b_1 , e le coordinate del punto d'intersezione. Or la retta 2 sarà espressa per l'equazione 8 del n° 183 dalle due equazioni

$$9. \quad (x - x_1) = a_1(z - z_1), \quad y - y_1 = b_1(z - z_1),$$

e poichè essa deve incontrare la retta 1, così dovrà per l'equazione 5 esser soddisfatta la relazione

$$a_1(y_1 - b_1 z_1 - q) - b_1(x_1 - a_1 z_1 - p) = a(y_1 - q) - b(x_1 - p),$$

e dovendo inoltre esser perpendicolare alla retta 1, dovrà aver luogo ancora la relazione

$$1 + aa_1 + bb_1 = 0.$$

Queste due ultime equazioni assumono mercè l'equazione 9 la forma

$$\begin{aligned} a(x - x_1) + b(y - y_1) + z - z_1 &= 0, \\ (y_1 - b_1 z_1 - q)(x - x_1) - (x_1 - a_1 z_1 - p)(y - y_1) \\ &= a(y_1 - q)(z - z_1) - b(x_1 - p)(z - z_1), \end{aligned}$$

dalle quali si avranno i valori di $x - x_1, y - y_1, z - z_1$, quando si riuniscano alle equazioni 1, essendochè il punto d'intersezione x, y, z è comune alle due rette.

185.

Il piano.

Se tutti i punti di un piano comunque situato nello spazio si riferiscano ad un sistema di coordinate, tra quelle di ogni punto dovrà esistere una relazione, dipendente soltanto dalla legge di esser del piano, e che esprimerà in conseguenza la natura e posizione dello stesso piano. Tra i diversi modi di generazione del piano scegliamo quello per lo quale esso risulta da una retta che movendosi parallelamente alla sua prima posizione, nel tempo stesso si appoggia co-

stantemente ad una retta fissa. Siano

$$1. \quad x = az + m, \quad y = bz + n$$

le equazioni della retta fissa, e

$$2. \quad x = a_1 z + m_1, \quad y = b_1 z + n_1$$

quelle della retta mobile. Or se la retta 2 si move nell' indicato modo, le equazioni che in ogni sua posizione dovranno sostituire le equazioni 2 conserveranno inalterati i valori di a_1 e b_1 , ma dovranno aver sempre varii quelli di m_1 ed n_1 . E poichè essa dovrà in ogni posizione intersecare la retta 1, così per ogni coppia di valori di m_1 ed n_1 dovrà esser soddisfatta in conseguenza dell' equazione 5 la relazione

$$(a - a_1)(n_1 - n) - (b_1 - b)(m_1 - m) = 0.$$

Se dunque in questa espressione s'introducano i valori di m_1 ed n_1 tolti dalle equazioni 2, quella che ne risulterà, sarà l' espressione della legge del movimento a cui sarà sottoposta la retta 2. L' indicata sostituzione ci darà

$$(a_1 - a)(y - b_1 z - n) - (b_1 - b)(x - a_1 z - m) = 0,$$

vale a dire un' equazione della forma

$$3. \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

ch' è appunto l' equazione del piano.

Ogni altro modo di genesi del piano condurrebbe ad un' equazione della stessa forma dell' equazione 3. Poniamo p. e: che il piano sia generato dal moto di un lato di un angolo retto, che aggirasi intorno all' altro lato fisso. Indichiamo con x_1, y_1, z_1 il punto comune, colle equazioni

$$x - x_1 = a(z - z_1), \quad y - y_1 = b(z - z_1)$$

dinotiamo il lato fisso, e con

$$x - x_1 = a_1(z - z_1), \quad y - y_1 = b_1(z - z_1)$$

il lato mobile: per ottenere l'equazione del piano bisognerà, attesa l'inclinazione rettangolare delle due linee, sostituire i valori di a_1 e b_1 in

$$1 + aa_1 + bb_1 = 0;$$

e l'equazione, che ne otterremo, sarà di 1° primo grado rispetto alle variabili x, y, z , poichè a_1 e b_1 soltanto in questa forma si presentano.

Laonde un'equazione fra tre variabili a primo grado rappresenterà un piano riferito a coordinate parallele. Le quattro costanti di questa equazione potranno ridursi a tre, dividendole per una di esse; e così l'equazione assumerà la forma

$$4. \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

L'intersezione del piano dell'equazione 3 con quello delle xy , ossia la traccia del primo sul secondo, conterrà tutti quei punti pei quali sarà $z = 0$; quindi dinoteranno

$$\begin{aligned} 5. \quad z = 0, Ax + By + D = 0 & \text{ la traccia sul piano } xy, \\ y = 0, Ax + Cz + D = 0 & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad xz, \\ x = 0, By + Cz + D = 0 & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad yz; \end{aligned}$$

dimodochè il piano intersecherà gli assi delle x, y, z ordinatamente nei punti

$$6. \quad x = -\frac{D}{A}, \quad y = -\frac{D}{B}, \quad z = -\frac{D}{C}.$$

Indicando queste porzioni ordinatamente con a, b, c ; con d la retta menata dall'origine perpendicolarmente al piano, e con α, β, γ gli angoli che forma cogli assi, avremo le relazioni

$$d = a \cos \alpha = b \cos \beta = c \cos \gamma;$$

e poichè a, b, c rappresentano i valori di x, y, z nelle equazioni 6, si ha

$$a = -\frac{D}{A} = \frac{d}{\cos \alpha}, \text{ ovvero } A = -\frac{D \cos \alpha}{d},$$

$$\text{e similmente } B = -\frac{D \cos \beta}{d}, C = -\frac{D \cos \gamma}{d}.$$

Questi valori di A, B, C trasformano l'equazione 3 nella seguente

$$7. \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = d.$$

Quindi per le equazioni 3 del n° 182 avrà luogo tra le costanti delle equazioni 3 e 7 la relazione

$$(A^2 + B^2 + C^2)d^2 = (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)D^2 = D^2;$$

in conseguenza

$$8. \quad \cos \alpha = \frac{A}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad d = -\frac{D}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Quindi se il piano 3 è perpendicolare al piano xy , sarà $\gamma = \frac{\pi}{2}$, in conseguenza $C = 0$; cosicchè

$$9. \quad Ax + By + D = 0$$

sarà l'equazione di un piano perpendicolare al piano xy , mentre per l'equazione 5 le equazioni

$$z = 0, Ax + By + D = 0$$

rappresentano le intersezioni dei due piani.

Ma se il piano dell'equazione 3 è parallelo a quello delle x, y , sarà $\gamma = 0$, quindi $\cos \gamma = 1$, ovvero

$$C = (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}},$$

cioè $A^2 + B^2 = 0$, quindi $A = 0$, $B = 0$, e

$$10. \quad Cz + D = 0$$

esprimerà un piano parallelo al piano xy , e da questo distante di $z = -\frac{D}{C}$.

186.

Il piano e la retta.

Se il piano

$$1. \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

e la retta G

$$2. \quad x = az + p, \quad y = bz + q$$

abbiamo comune un punto x_1, y_1, z_1 , queste coordinate dovranno soddisfare sì l'equazione 1 che l'equazione 2, dimodochè dalla prima di esse si avrà

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

e

$$x_1 = az_1 + p, \quad y_1 = bz_1 + q$$

dalla seconda. Eliminando da queste tre equazioni x_1 ed y_1 , si otterrà

$$3. \quad (Aa + Bb + C)z_1 + Ap + Bq + D = 0.$$

Similmente potranno aver si i valori di x_1 ed y_1 .

Se la retta 2 coincida col piano 1, l'equazione 3 dovrà esser soddisfatta per ogni valore di z_1 , vale a dire che dovranno aver luogo le equazioni

$$4. \quad Aa + Bb + C = 0, \quad Ap + Bq + D = 0.$$

Se la retta 2 è parallela al piano 1, z dovrà divenire infinita nell'equazione 3,

$$z = -\frac{Ap + Bq + D}{Aa + Bb + C},$$

»

quindi

5.

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Per determinare l'angolo v della retta 2 col piano 1 si osservi che questo angolo è complemento di quello che la stessa retta forma con una perpendicolare al piano. Quindi se questa perpendicolare è rappresentata dalle equazioni

6.

$$x = a_1 z + p_1, \quad y = b_1 z + q_1,$$

saranno note le sue proiezioni, perpendicolari alle omonime tracce del piano 1.

Queste tracce su i piani xz ed yz hanno per equazioni, in conseguenza delle 5 del n° precedente,

$$Ax + Cz + D = 0, \quad By + Cz + D = 0,$$

e poichè la prima di queste tracce dev'esser perpendicolare alla retta

$$x = a_1 z + p_1,$$

e la seconda alla retta

$$y = b_1 z + q_1,$$

così le equazioni

$$a_1 = \frac{A}{C}, \quad b_1 = \frac{B}{C}$$

esprimeranno le condizioni della posizione perpendicolare della retta 2 al piano 1. E quanto all'angolo u delle rette 2 e 6 si avrà per l'equazione 7 del n° 184 la relazione

$$\cos u = \frac{1 + aa_1 + bb_1}{(1 + a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (1 + a_1^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Quindi se in questa s'introducano i valori di a_1 e b_1 tolti dall'equazione 7, e si consideri essere $u = \frac{\pi}{2} - v$, si avrà

$$8. \quad \text{sen } v = \frac{Aa + Bb + C}{(1 + a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} ;$$

donde si rileva, e come ha già mostrato l'equazione 5, che la condizione di essere la retta 2 parallela al piano 1 debba riporsi nell'espressione

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Potremo quindi trovar gli angoli (E, x) , (E, y) , (E, z) che il piano E rappresentato dall'equazione 1 forma cogli assi del x , y , z . Imperocchè, se

$$x = az, \quad y = bz$$

sono le equazioni di una retta G che dall'origine vada perpendicolare al piano E, esse per l'equazione 7 si trasformano in

$$x = \frac{A}{C} z, \quad y = \frac{B}{C} z.$$

E per l'equazione 3 del n° 183 le espressioni

$$\frac{a}{(1 + a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{b}{(1 + a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{(1 + a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

rappresenteranno i coseni degli angoli α, β, γ che la retta G forma rispettivamente cogli assi x, y, z . Considerando ancora che questi coseni sono ordinatamente eguali ai seni degli angoli che il piano E forma cogli assi, ne segue che esprimendo a e b per mezzo dei valori tolti dall'equazione del piano E, si avrà

$$9. \quad \text{sen}(E, x) = \frac{A}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{sen}(E, y) = \frac{B}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \text{sen}(E, z) = \frac{C}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

In conseguenza delle equazioni 7 la retta

$$10. \quad x = \frac{A}{C} z + p, \quad y = \frac{B}{C} z + q$$

sarà perpendicolare al piano 1, e se essa passa pel punto x_1, y_1, z_1 , le sue equazioni saranno

$$11. \quad x - x_1 = \frac{A}{C} (z - z_1), \quad y - y_1 = \frac{B}{C} (z - z_1).$$

Or la distanza P del punto x_1, y_1, z_1 dal punto x, y, z , in cui la retta incontra il piano dell'equazione 1, sarà determinata mercè l'equazione

$$12. \quad P^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Ma dando all'equazione 1 la forma

$$13. \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) + D' = 0,$$

nella quale si pone $D' = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$,

si potranno, mercè le equazioni 11 e 13 facilmente separare le quantità $x - x_1, y - y_1, z - z_1$, ed ottenere il valore

$$14. \quad P = \frac{D'}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

187.

Due piani.

Poichè l'intersezione dei due piani E ed E_1 ,

$$1. \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$2. \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

ha la proprietà che le omonime sue coordinate sono eguali, da qualunque di queste due equazioni siano dedotte, così potremo da esse eliminare p. e. z , ed avremo per equazione della proiezione di essa intersezione sul piano xy ,

$$a. (AC_1 - A_1C) x + (BC_1 - B_1C) y + DC_1 - D_1C = 0.$$

E similmente si avranno le sue proiezioni sul piano xz o yz , eliminando y od x .

Se i due piani sono paralleli, non vi sarà valore di x od y che possa render soddisfatta l'equazione a , ossia che questa equazione non potrà aver luogo per ciascun valore di x od y , senza che siano nulli i fattori di queste due variabili; dovrà dunque esser

$$\frac{A}{C} = \frac{A_1}{C_1} \text{ e } \frac{B}{C} = \frac{B_1}{C_1},$$

come era facile a prevedersi. Donde poi segue che l'equazione 1 rappresenterà piani paralleli, quando A, B, C conservandosi costanti, D vada prendendo valori diversi.

Per definire l'angolo v dei piani 1 e 2, si determinerà l'angolo formato da due rette G e G_1 rispettivamente perpendicolari ai due piani. Siano equazioni della retta

$$G \dots x = az + p, y = bz + q,$$

$$G_1 \dots x = a_1z + p_1, y = b_1z + q_1;$$

per l'equazione 7 del n° 183, rispetto all'angolo (G, G_1) da esse formato, si avrà la relazione

$$\cos(G, G_1) = \frac{1 + aa_1 + bb_1}{(1 + a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (1 + a_1^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ma l'angolo (G, G_1) è eguale all'angolo d'inclinazione v o (E, E_1) dei due piani; sarà dunque per l'equazione 10 del n° 186

$$a = \frac{A}{C}, b = \frac{B}{C}, a_1 = \frac{A_1}{C_1}, b_1 = \frac{B_1}{C_1},$$

ed in conseguenza

$$3. \quad \cos(E, E_1) = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}} (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Se i due piani son paralleli, sarà, come per lo innanzi,

$$4. \quad \frac{A}{C} = \frac{A_1}{C_1}, \quad \frac{B}{C} = \frac{B_1}{C_1};$$

e se sono inclinati ad angolo retto, avrà luogo l'equazione

$$5. \quad AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

B. Formazione delle superficie.

188.

Rappresentazione delle superficie.

In senso geometrico l'equazione

$$1. \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

indica il luogo geometrico di un punto x, y, z riferito a coordinate parallele. Se questa equazione è reale per alcuni valori soltanto delle coordinate, essa esprimerà altrettanti punti isolati dello spazio. Ma se essa è reale per tutti i valori di x, y, z che siano compresi tra certi limiti, il suo significato sarà quello di un sistema continuo di punti. Per conoscere la natura di questo sistema poniamo che l'equazione 1 sia reale per $x = a$; avremo così le equazioni

$$2. \quad x = a, \quad \varphi(y, z, a) = 0,$$

la prima delle quali indica un piano parallelo a quello delle y, z , e che ne dista della quantità a , mentre la seconda esprime una curva esistente nel piano yz , o nel piano ad esso parallelo $x = a$. Or se nell'equazione 2 introducansi tutti i valori di x , pei quali l'equazione 1 conservasi reale, e prenda per y e z tutti i valori compresi tra

i limiti reali, si avrà un sistema d' infinite curve parallele al piano yz ed infinitamente vicine le une alle altre. Questo sistema di curve formerà in conseguenza una superficie.

Alle stesse conseguenze si perverrà, quando in vece della coordinata x si diano alla y ovvero alla z tutti i valori compresi tra limiti reali. L' equazione dunque tra le tre variabili x, y, z ,

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

è l' espressione di una superficie.

Sia inoltre

$$3. \quad \varphi(x, y) = 0$$

l' espressione di un sistema continuo di punti che non siano soltanto nel piano xy , e dinotino

$$4. \quad x = a, y = b$$

due valori reali; avremo in queste equazioni 4 l' espressione di una parallela all' asse delle z , e se ad x ed y nell' equazione 3 si sostituiscano tutti i valori reali, ne risulterà un sistema continuo di rette parallele, ossia una superficie cilindrica, la cui intersezione col piano xy sarà rappresentata dalle equazioni

$$5. \quad z = 0, \varphi(x, y) = 0.$$

Finalmente l' equazione

$$6. \quad \varphi(x) = 0$$

rappresenterà, com' è chiaro, tanti piani paralleli a quello delle y, z , quante ne sono le radici reali.

Da queste osservazioni segue che l' equazione

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

è l' espressione più generale di una superficie riferita a coordinate parallele.

E questa proposizione non cesserà di esser vera, quando le coordinate parallele siano trasformate in coordinate polari. Imperocchè dicendo r il raggio vettore di un punto m della superficie, t l'angolo che esso forma colla sua proiezione sul piano E , ed u l'angolo che questa proiezione fa con una retta G condotta nel piano E , si potranno esprimere le coordinate x, y, z in funzione di r, t, u ; dimodochè l'equazione 1 si trasformerà in

$$f(r, t, u) = 0,$$

e questa equazione rappresenterà una curva, quando si ponga costante t ovvero u . Il piano della curva si confonderà col piano E , quando sia $t = 0$, e lo incontrerà ad angolo retto nell'ipotesi di u costante.

Esempio 1. Secondo l'equazione 10 del n° 183 la distanza r di due punti a, b, c ed x, y, z sarà espressa dalla relazione

$$8. \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Or disegnino x, y, z ogni punto dello spazio che renda soddisfatta questa relazione, ed a, b, c un punto fisso, esprimerà l'equazione 8 la superficie di una sfera, il cui raggio avrà la lunghezza r , ed il cui centro giacerà nel punto a, b, c . Se il centro cada nell'origine delle coordinate, l'equazione della sfera diverrà

$$9. \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

In simil guisa l'equazione

$$10. \quad L(x-a)^2 + M(y-b)^2 + N(z-c)^2 = P$$

rappresenta una superficie descritta da un punto m di una retta G , la quale movesi in modo che ciascuno di tre suoi punti determinati rimanga nel medesimo piano coordinato.

Esempio 2. L'equazione

11. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

disegna un cerchio di raggio r giacente nel piano xy , ed il cui centro trovasi nel punto a, b . Or se questa equazione debba rappresentare tutti i punti dello spazio che la renderanno soddisfatta per ciascun valore di z , essa sarà l'espressione della superficie cilindrica conosciuta per la Geometria elementare, ed il cui asse sarà parallelo a quello delle z .

189.

Rappresentazione delle curve nello spazio.

Se le due superficie

1. $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$

si tagliano, le coordinate dei punti d'intersezione dovranno render soddisfatte le due equazioni, ed ogni punto x, y, z , comune alle due superficie dovrà esser un punto dell'intersezione. Ma due equazioni con tre variabili ammettono in generale infiniti valori diversi, e perciò due superficie si toglieranno in infiniti punti infinitamente vicini. La loro intersezione sarà dunque una linea, ed in conseguenza le equazioni 1 rappresenteranno una linea.

Se da queste equazioni sia eliminata una delle variabili, la z per esempio, si otterrà un'equazione tra x ed y ,

2. $f(x, y) = 0,$

la quale esprime una superficie cilindrica parallela all'asse delle z . La curva d'intersezione dunque delle due superficie 1 giacerà nella superficie cilindrica 2, la cui traccia sul piano xy sarà rappresentata dalle equazioni

$$z = 0, f(x, y) = 0.$$

A questa superficie cilindrica si dà il nome di cilindro proiettante.

Eliminando similmente la y dalle equazioni 1, si otterrà un'equazione tra x e z ,

$$3. \quad f(x, z) = 0,$$

la quale rappresenta una superficie cilindrica parallela all'asse delle y , ed in cui dovrà trovarsi egualmente la curva d'intersezione delle superficie 1. Donde si rileva che questa curva potrà riguardarsi come intersezione delle superficie cilindriche 2 e 3. Quindi ogni curva nello spazio potrà riguardarsi come intersezione di due superficie, il cui più semplice sistema è quello di due superficie cilindriche.

Esempio 1. Un punto M (Fig. 36) movesi in modo sulla superficie cilindrica

$$() \quad x^2 + y^2 = r^2$$

che la sua ordinata $MP = z$ trovasi in una ragione costante k coll'ascissa circolare $CP = s$ contata dal punto fisso C , ovvero che sia $s = kz$. Per trovare la curva, riferita a coordinate rettangolari, è da cercarsi una seconda superficie che tagli la superficie cilindrica nella curva richiesta.

Or si hanno rispetto alle coordinate x ed y dell'arco CP le relazioni

$$5. \quad x = r \cos s, \quad y = r \sin s, \quad \text{ovvero}$$

$$x = r \cos kz, \quad y = r \sin kz,$$

donde risulta

$$6. \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} kz, \quad \text{ovvero} \quad z = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Quest'ultima superficie, la superficie dell'elica, taglia la superficie 4 nella curva richiesta, l'elica cilindrica, la quale è definita dalle equazioni 4 e 5, od anche da due di esse. L'equazione 6 poi dimostra che la superficie dell'elica è intersecata in una retta da ogni piano $z = a$ parallelo a quello delle x, y .

Esempio 2. Una retta BM (Fig. 37) scorre sopra un cono retto in modo da fare un angolo costante β colla generatrice ZP, ed incontrare coll' estremo B la tangente BP al punto P del cerchio.

Siano z, r, t le coordinate di qualsivoglia punto della superficie conica, r e t le coordinate polari nel piano xy , ed asse delle z sia l'asse del cono: per ogni punto M di una generatrice ZP del cono, la quale incontri il piano xy sotto l'angolo α si avrà, a causa dei triangoli ZAP ed MA₁P rettangoli in A ed A₁ e ponendo $ZA = c$, la relazione

$$r = (c - z) \cot \alpha.$$

Ogni piano parallelo al piano xy taglia la superficie in un cerchio di raggio r cosicchè sarà $r^2 = x^2 + y^2$, ed in conseguenza l'equazione precedente

$$7. \quad x^2 + y^2 = (c - z)^2 \cot^2 \alpha$$

avrà luogo per ogni punto della superficie conica.

Or siano M ed M₁ due punti della superficie infinitamente vicini, ed MN l'arco del cerchio parallelo al piano xy e condotto pel punto M; si avranno facilmente

$$M_1N^2 = dr^2 + dz^2, \quad M_1N = r dt \operatorname{tg} \beta,$$

e dall'equazione della superficie conica

$$dz = - dr \operatorname{tg} \alpha.$$

Dalle quali tre ultime equazioni risulterà

$$r^2 dt^2 \operatorname{tg}^2 \beta = dr^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha), \quad \text{ovvero} \quad \frac{dr}{r} = \cos \alpha \operatorname{tg} \beta. dt,$$

ed integrando,

$$\ln r = \cos \alpha \operatorname{tg} \beta. t + C.$$

Or indicando con a il raggio del cerchio di base, si avrà per $r = a$ l'angolo CAP ovvero $t = 0$,

quindi
$$1 \frac{r}{a} = \cos \alpha \operatorname{tg} \beta. t,$$

e se facciamo $\cos \alpha \operatorname{tg} \beta = n$, ed esprimiamo r in x ed y , ne risulterà

8.
$$r = ae^{nt}, \text{ ovvero } (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = e^{n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}}$$

come equazione della superficie cilindrica, la cui intersezione colla superficie conica 7 ci dà la curva richiesta, l'elica conica. L'equazione 8 ci fa vedere d'altronde come la spirale logarithmica sia proiezione di questa elica.

Esempio 5. Siano da cercarsi le equazioni della lossodromica, ossia della curva che taglia tutti i meridiani di una superficie sferica sotto un angolo costante α .

Un punto qualunque M (Fig. 38) della lossodromica sia riferito all'arco $AQ = u$ dell'equatore AB ed all'arco $MP = v$ del meridiano PQ , P rappresentando il polo dell'equatore AB . Or sia PQ_1 il meridiano infinitamente vicino a PQ , ed MN l'arco di un parallelo, ed in conseguenza MNM_1 un angolo retto: si avrà rispetto all'angolo costante $AMQ = \alpha$ l'equazione $MN = M_1N \operatorname{tg} \alpha$. Ma nel triangolo MPN ha luogo la relazione

$$\frac{\operatorname{sen} MN}{\operatorname{sen} MP} = \frac{\operatorname{sen} QQ_1}{\operatorname{sen} PNM}, \text{ ossia } \frac{MN}{\operatorname{sen} v} = du,$$

potendosi ai seni degli archi infinitesimi MN e QQ_1 sostituire gli archi stessi. I due valori di MN conducono all'equazione

$$\operatorname{sen} v du = M_1N \operatorname{tg} \alpha.$$

Or è $M_1N = dv$, e se u aumenta, v diminuisce, e quindi dall'ultima equazione risulta la relazione

$$du = - \frac{dv}{\operatorname{sen} v} \operatorname{tg} \alpha,$$

la quale integrata ci dà

$$9. \quad u = \operatorname{tg} \alpha \log \cot \frac{1}{2} v + C.$$

Ponendo $u = 0$, sarà $v = \frac{\pi}{2}$, quindi $C = 0$. Questa equazione dimostra d'altronde che la curva con infiniti giri si avvolge intorno al polo, poichè facendo $v = 0$ si ha $u = \infty$.

Per eliminare gli archi u e v poniamo il piano xy in quello dell'equatore, e conduciamo l'asse delle z pel polo; così ponendo il raggio vettore r nel piano xy ed il raggio della sfera $= 1$, avremo

$$10. \quad z = \cos v, \quad r = \sin v, \quad y = r \sin u, \quad x = r \cos u,$$

$$\text{quindi} \quad \cot v = \frac{z}{r} = \frac{\cot^2 \frac{1}{2} v - 1}{2 \cot \frac{1}{2} v},$$

$$\cot \frac{1}{2} v = \frac{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \pm z}{r}, \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} u = \frac{y}{x},$$

quindi dall'equazione 9, ponendo $\cot \alpha = n$, si ottiene

$$n \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 1 \frac{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \pm z}{r},$$

ovvero, risolvendo rispetto a z ,

$$11. \quad 2z = r \left(e^{\operatorname{narc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}} - e^{-\operatorname{narc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}} \right).$$

Questa equazione, congiunta all'altra della superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

dà la lossodromica, la cui proiezione sul piano xy , in conseguenza delle equazioni 9 e 10, è una spirale logaritmica.

Generazione delle superficie per mezzo di linee.

Una linea produrrà una superficie, variando la sua posizione nello spazio, anche la sua forma e grandezza, e scorrendo sempre sopra una o più linee fisse. Or sia la linea generatrice rappresentata dalle equazioni

$$1. \quad f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0,$$

$$2. \quad f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0.$$

Poichè le funzioni f ed f_1 si suppongono note, sarà determinato il genere della superficie generata, ma l'estensione, la curvatura, ecc. di ciascuna superficie resterà indeterminata, essendochè queste cose dipendono dalle n costanti arbitrarie, ossia parametri variabili $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Or nella scambievole relazione di questi parametri dovrà trovarsi espressa la legge del movimento, se dal moto della curva debba risultare una superficie. Ed in vero poniamo che una simile relazione non abbia luogo, e che dalle equazioni 1 e 2 sia eliminato uno dei parametri, per esempio α , si avrà così un'equazione

$$3. \quad f_2(x, y, z, \beta, \gamma, \dots) = 0,$$

la quale converrà a tutte le posizioni corrispondenti ai diversi valori di α . Ma questa equazione esprime nel tempo stesso una superficie la quale può assumere infiniti stati diversi, attesochè d'infiniti valori diversi son capaci $\beta, \gamma, \dots$. Non si avrà dunque veruna superficie determinata, ma piuttosto uno spazio corporeo, e questo anche illimitato, e perciò indeterminato. Dal che segue che tra le n costanti arbitrarie $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ debba aver luogo tale una relazione, che determinatane una, lo saranno ancora le

rimanenti $n - 1$; e quindi dovranno tra esse esistere le $n - 1$ equazioni indipendenti

$$\begin{aligned} 4. \quad & \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0, \\ & \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0, \\ & \varphi_3(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0, \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Queste $n - 1$ equazioni rappresentano altrettante curve direttrici, e quindi esprimono la legge del movimento della curva generatrice. Ordinariamente la natura di una superficie si fa dipendere dalla curva generatrice, da una o più curve direttrici e da una legge di movimento, dimodochè si giudicano esser della stessa famiglia quelle curve che vengono generate da una stessa curva e secondo una stessa legge di moto, qualunque sia la natura della curva direttrice.

Avendosi una sola curva direttrice

$$5. \quad F(x, y, z) = 0, F_1(x, y, z) = 0,$$

ed in conseguenza delle osservazioni precedenti contenendosi soltanto due parametri arbitrari α, β nella generatrice delle equazioni 1 e 2, questa curva in tutte le sue posizioni sarà rappresentata dal sistema di equazioni

$$6. \quad f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, f_1(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \text{ e}$$

$$7. \quad \varphi(\alpha, \beta) = 0, \text{ ovvero } \beta = \varphi(\alpha).$$

Or se le due prime equazioni siano risolute rispetto ad α e β , dimodochè risulteranno le due seguenti:

$$8. \quad \psi(x, y, z) = \alpha, \psi_1(x, y, z) = \beta,$$

l'eliminazione di α e β da queste due ultime e da $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ darà un'equazione in x, y, z , vale a dire l'equazione della superficie

$$9. \quad L(x, y, z) = 0.$$

Dalle equazioni 7 e 8 risulta la nuova equazione della superficie

$$10. \quad \psi_1(x, y, z) = \varphi(\psi[x, y, z]),$$

in cui φ rappresenta una funzione arbitraria, la quale proviene dall'eliminazione delle variabili x, y, z dalle equazioni della curva direttrice e della generatrice; la direttrice però, ed in conseguenza le sue equazioni ancora, restano indeterminate.

L'equazione 10 è di quelle a tre variabili ed una funzione arbitraria. Il carattere proprio di questa specie di equazioni si è quello che per mezzo di una trasformazione sempre possibile esse possono ridursi a due variabili. Ed in vero, ponendo

$$\psi_1(x, y, z) = t, \text{ e } \psi(x, y, z) = u,$$

due delle coordinate potranno sempre esprimersi in funzione della terza, di t ed u , dimodochè si avranno due equazioni determinate

$$x = \Phi_1(t, u, z), \quad y = \Phi(t, u, z).$$

Unendo ora queste due equazioni ad una terza data

$$11. \quad X(x, y, z) = 0,$$

le due prime potranno esser liberate da z e passare nella forma $t = \varphi u$. Ma la possibilità dell'eliminazione di z dipende dalla natura dell'equazione 11, la quale sotto questa veduta non può esser arbitraria. La proprietà dell'equazione 10 dipende da ciò che all'equazione

$$\psi_1(x, y, z) = b$$

appartiene un'equazione

$$\psi(x, y, z) = a,$$

quindi b indicando nella prima un parametro arbitrario, a questo apparterrà un nuovo parametro a .

Superficie ellindriche.

La famiglia di queste superficie è generata da una retta, che rimanendo parallela ad una data direzione, scorre per una curva. La retta mobile essendo rappresentata dalle equazioni

$$1. \quad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

le grandezze angolari a e b resteranno costanti attesa l'unità della direzione, ed all'opposto saranno variabili parametri lineari α e β . Quindi per avere l'equazione di queste superficie basterà introdurre nell'equazione 7 del n° 190 i valori

$$\alpha = x - az, \quad \beta = y - bz,$$

e così l'equazione delle superficie cilindriche sarà

$$2. \quad y - bz = \varphi(x - az).$$

La funzione arbitraria φ verrà determinata, eliminando le tre variabili x , y , z dalle equazioni 1 della retta mobile e da quelle della curva direttrice

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

e ciò a cagione dei punti comuni alle due linee. Si poverà così alla relazione $\beta = \varphi\alpha$; ma vi si giungerà più facilmente quando la curva direttrice si ponga in uno dei piani coordinati. Imperocchè prendendo a direttrice, per esempio, la traccia orizzontale di una superficie

$$3. \quad z = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

esprimerà sempre l'equazione

$$f(\alpha, \beta) = 0$$

*

la relazione tra α e β , e quindi

$$4. \quad f(x - az, y - bz) = 0$$

sarà l'equazione del cilindro.

E per conoscere se una data superficie

$$f(x, y, z) = 0$$

appartenga alla famiglia delle superficie cilindriche, s'introdurranno in questa equazione, dietro le osservazioni del n° precedente,

$$5. \quad x = az + t, \quad y = bz + u,$$

e si vedrà se l'equazione che ne risulta

$$6. \quad f(az + t, bz + u, z) = 0$$

possa riuscire indipendente da z . Ma poichè z anzichè sparire arbitrariamente suppone una condizione di sito nella retta mobile, così potranno utilizzarsi i parametri fissi a e b all'eliminazione di essa z ; essendochè una data superficie non potrà esser cilindrica, quando la direzione della retta non sia determinata. Quindi perchè la z sparisca dall'equazione 6, si dovranno scegliere a e b tali che i fattori di z , z^2 , . . . vadano a zero: se due di essi siano pareggiati a zero, i valori che ne risulteranno per a e b , annulleranno i rimanenti, quando siano definite le costanti dell'equazioni data.

Esempio 1. Si vuol trovare il cilindro, di cui sia direttrice l'ellisse

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Eliminando x, y, z da queste equazioni e da quelle della retta

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

l'equazione di relazione $\beta = \varphi(\alpha)$ diverrà

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} = 1,$$

ed in conseguenza l'equazione del cilindro richiesto sarà

$$\frac{(x-az)^2}{A^2} + \frac{(y-bz)^2}{B^2} = 1.$$

Esempio 2. Si vuol sapere se l'equazione

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz = 1$$

esprima una superficie cilindrica. Introducendo nell'equazione 5 gl' indicati valori di x ed y , si ha

$$(a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2)z^2 + (2a - 2)tz + (2b - 2)uz + t^2 + u^2 = 1.$$

Perchè questa equazione divenga indipendente da z , si dovrà supporre

$$2a - 2 = 0, 2b - 2 = 0, a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = 0.$$

Due qualunque di queste condizioni menano alla terza. E così essendo soddisfatte le necessarie condizioni, è chiaro che l'equazione proposta esprime una superficie cilindrica. La sua traccia sul piano orizzontale ci dà il cerchio

$$z = 0, x^2 + y^2 = 1.$$

Se la superficie data fosse espressa da un'equazione con parametri indeterminati, si utilizzerebbero a e b a ricercare le relazioni che dovranno aver luogo tra le costanti, affinchè la superficie sia cilindrica. E poichè queste costanti possono annullare due soltanto dei termini in $z^2, tz, uz, ..$ ed intanto tutti i fattori di z debbono esser nulli, è chiaro che delle relazioni dovranno esistere tra le costanti dell'equazione data. Così per esempio l'equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz = 1,$$

quando vi si pongono i valori di x ed y tolti dalle equa-

zioni 5, ci dà quattro termini

$$z^a, tz, uz, z,$$

i cui fattori debbono esser nulli, e poichè due di essi sono determinati per mezzo di a e b , così due relazioni dovranno aver luogo tra le nove costanti della superficie, affinchè essa sia cilindrica.

192.

Equazione differenziale delle superficie cilindriche.

Per dare all'equazione della superficie cilindrica

$$1. \quad y - bz = \varphi(x - az)$$

una forma indipendente dalla funzione φ , e quindi far che l'equazione non dipenda dalla natura della curva direttrice, bisognerà considerar z come funzione di due variabili indipendenti x ed y , e differenziar l'equazione rispetto ad x ed y : così, ponendo per brevità $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, si ottiene

$$\begin{aligned} -bp &= (1 - ap)\varphi'(x - az) \\ 1 - bq &= -aq\varphi'(x - az), \end{aligned}$$

donde, dividendo, come dimostra l'esempio 2 del n° 44, si ha l'equazione differenziale delle superficie cilindriche

$$2. \quad ap + bq = 1.$$

Questa equazione per una via più breve di quella indicata nel n° precedente, mena a distinguere se una data superficie

$$L(x, y, z) = 0$$

sia o pur no cilindrica; imperocchè differenziata questa rispetto ad x ed y , ed ottenute così le equazioni

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dz} p = 0, \quad \frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dz} q = 0,$$

da queste avremo i valori di p e q , i quali venendo introdotti nell'equazione 2, equazione caratteristica delle superficie cilindriche, la trasformano in

$$3. \quad a \frac{dL}{dx} + b \frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dz} = 0,$$

che dovrà convenire a tutti i punti della superficie $L = 0$, quando questa sia cilindrica. Ma essendo, com'è chiaro, indeterminati i valori di a e b , bisognerà ordinare l'equazione 3 rispetto alle potenze delle coordinate e pareggiare a zero ciascun fattore di esse, per vedere se ne risulteranno per a e b valori reali od immaginari.

Se in vece della curva direttrice sia data la superficie

$$4. \quad L(x, y, z) = 0$$

colla condizione di aver tangente la superficie cilindrica, le due superficie allora s'incontreranno in una curva, a cui apparterranno le equazioni 3 e 4, essendochè esse avranno, come in appresso sarà dimostrato, un medesimo piano tangente per ogni punto di detta curva.

Esempio 1. Facciamoci a ricercare se la superficie

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz = 1$$

sia o pur no cilindrica.

Ne risulteranno a norma dell'equazione 3:

$$a(Ax + Dy + Ez + G) + b(By + Dx + Fz + H) + (Cz + Ex + Fy + K) = 0,$$

ovvero, ordinando rispetto alle variabili x, y, z ,

$$(aA + bD + E)x + (bB + aD + F)y + (aE + bF + C)z + (aG + bH + K) = 0.$$

Questa equazione dovrà esser soddisfatta per ogni valore di x, y, z ; e quindi si avrà

$$\begin{aligned} aA + bD + E &= 0, & bB + aD + F &= 0, \\ aE + bF + C &= 0, & aG + bH + K &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando a e b da queste quattro equazioni, si avranno due equazioni di condizione che la superficie dovrà render soddisfatte, perchè essa sia cilindrica.

Esempio 2. Ponendo che la superficie cilindrica debba esser tangente alla superficie

$$5. \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

si avrà dall'equazione 3:

$$6. \quad Aax + Bby + Cz = 0,$$

vale a dire l'equazione di un piano che passa per l'origine; e quindi la linea di contatto sarà una curva piana.

Le equazioni 5 e 6 di questa curva di contatto, unite alle equazioni della retta

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

danno tra α e β la relazione

$$(A\alpha^2 + B\beta^2 - 1)(Aa^2 + Bb^2 + C) = (Aa\alpha + Bb\beta)^2,$$

dalla quale, mercè la sostituzione dei valori di α e β , si avrà per la richiesta superficie cilindrica l'equazione

$$\begin{aligned} [A(x - az)^2 + B(y - bz)^2 - 1](Aa^2 + Bb^2 + C) \\ = [Aa(x - az) + Bb(y - bz)]^2, \end{aligned}$$

la quale può ridursi alla forma più semplice

$$(Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1)(Aa^2 + Bb^2 + C) = (Aax + Bby + Cz)^2.$$

Superficie coniche.

Le superficie coniche sono generate da una retta che passando sempre per un punto fisso a, b, c , va poi correndo lungo una curva direttrice. Le equazioni di questa retta saranno dunque

$$1. \quad (x-a) = \alpha(z-c), \quad y-b = \beta(z-c),$$

α e β indicando valori variabili. Or se la curva direttrice sia rappresentata dalle equazioni

$$2. \quad F(x, y, z) = 0, \quad F_z(x, y, z) = 0,$$

si dovranno unire le equazioni 1 e 2 coll'equazione $\beta = \varphi(\alpha)$, la quale in ogni caso si avrà per mezzo dell'eliminazione di x, y, z dalle equazioni 1 e 2. Con ciò si avranno le tre equazioni

$$\frac{x-a}{z-c} = \alpha, \quad \frac{y-b}{z-c} = \beta, \quad \beta = \varphi(\alpha),$$

dalle quali eliminando α e β risulterà l'equazione generale delle superficie coniche

$$3. \quad \frac{y-b}{z-c} = \varphi\left\{\frac{x-a}{z-c}\right\}.$$

Se il punto fisso, denominato vertice od anche centro, trovasi nell'origine delle coordinate, l'equazione 3 assumerà la forma più semplice

$$4. \quad \frac{y}{z} = \varphi\left\{\frac{x}{z}\right\},$$

e rappresenta in conseguenza una funzione omogenea rispetto ad $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{z}$.

Per conoscere se una data superficie $f(x, y, z) = 0$ sia conica, bisognerà introdurre nella sua equazione in vece di x ed y i valori $a + t(z-c)$ e $b + u(z-c)$; con ciò l'equazione $f[a + t(z-c), b + u(z-c), z] = 0$ sarà resa indipendente da z . La qual cosa sarà possibile, quando si potranno definire le coordinate a, b, c del vertice, annullando i coefficienti di $\dots z^2, tz, uz, z$.

Esempio 1. Poniamo che la superficie conica abbia per vertice il punto a, b, c e per direttrice l'ellisse

$$z = 0, \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

dimodochè la generatrice sarà espressa da

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c).$$

L'eliminazione di x, y, z ci darà tra α e β la relazione

$$\frac{(a - \alpha c)^2}{A^2} + \frac{(b - \beta c)^2}{B^2} = 1;$$

e se dalle tre ultime equazioni siano eliminate α e β , si avrà qual equazione della superficie conica

$$\frac{(az - cx)^2}{A^2} + \frac{(bz - cy)^2}{B^2} = (z - c)^2.$$

Se il cono debba esser retto e circolare, si avrà

$$a = 0, \quad b = 0, \quad A = B,$$

e così l'equazione precedente si trasforma in

$$x^2 + y^2 = \frac{A^2}{c^2} (z^2 - c^2), \quad \text{ovvero} \quad x^2 + y^2 = (z^2 - c^2) \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

in cui α rappresenta l'angolo della generatrice coll'asse. Quest'ultima equazione si è trovata immediatamente nel n° 189.

Esempio 2. Le superficie coniche trovano la loro appli-

cazione nel disegno delle carte geografiche, quando si cerca la prospettiva di un cerchio della sfera terrestre, il quale sarà veduto da un punto di un meridiano, e che in conseguenza avrà proiezione centrale.

Pongasi l'origine delle coordinate nel centro della terra, l'asse delle z in quello dei poli, e facendo passare quello delle y pel polo del meridiano, nel piano di questo si avrà quello delle x, z ; ed in fine suppongasì l'occhio, ossia il vertice del cono formato dai raggi visuali, nel polo del meridiano. Così le equazioni di qualsiasi cerchio della sfera terrestre, il quale sarà di base al cono, saranno pel n° 188

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad z = ax + by + c,$$

e quelle della generatrice

$$x = \alpha x, \quad y = \beta z + r.$$

Quindi come equazione di condizione per l'incontro di queste due linee si avrà

$$[x^2 + (y-r)^2 + z^2](c+br) = 2r(y-r)(ax+by-br-z),$$

nella quale ponendo $y = 0$, si ottiene per prospettiva del cerchio nel piano delle xz

$$x^2 + y^2 + 2 \frac{ar^2}{c+br} x - 2 \frac{r^2}{c+br} z + \frac{(c-br)r^2}{c+br} = 0,$$

equazione che dimostra la prospettiva esser anche essa un cerchio. E se di questo cerchio siano x_1 e z_1 le coordinate del centro ed R il raggio, dall'equazione 1 del n° 144 si avrà

$$x_1 = -\frac{ar^2}{br+c}, \quad z_1 = \frac{r^2}{br+c}, \quad R = \frac{r}{br+c} \sqrt{(a^2+b^2+1)r^2 - c^2}$$

Nella geografia si adopera soltanto il valore di R , e questo solamente pei paralleli e meridiani. Ponendo $z = c$ nella precedente equazione del piano, si ha quello di un pa-

parallelo, ed in vece si avrà quello di un meridiano facendovi $y = hx$. Nel primo caso si avrà $R = \frac{r}{c} \sqrt{r^2 - c^2}$, e nel secondo $R = -r(1 + h^2)^{\frac{1}{2}}$; vale a dire che il raggio del parallelo è misurato dalla cotangente della latitudine, e quello del meridiano della secante della longitudine.

194.

Equazione differenziale delle superficie coniche.

Per eliminare dall'equazione 3 del n° 193 la funzione arbitraria φ , la quale varia colla curva direttrice, bisogna differenziare una volta rispetto ad x , indi rispetto ad y , e considerare z come dipendente da x ed y . Con ciò si ha

$$\begin{aligned} -\frac{(y-b)p}{(z-c)^2} &= \frac{(z-c) - (x-a)p}{(z-c)^2} \cdot \varphi' \left\{ \frac{x-a}{z-c} \right\}, \\ \frac{(z-c) - (y-b)q}{(z-c)^2} &= \frac{-(x-a)q}{(z-c)^2} \cdot \varphi' \left\{ \frac{x-a}{z-c} \right\}. \end{aligned}$$

Or dividendo l'una per l'altra queste due equazioni e semplificando, si ha

$$1. \quad p(x-a) + q(y-b) = z-c.$$

Mercè questa equazione 1 può determinarsi se una superficie $L(x, y, z) = 0$ sia o pur no conica. Potranno utilizzarsi le incognite per rappresentar le condizioni a cui la superficie deve esser sottoposta.

Si potrà ancora sostituire alla curva direttrice una superficie a cui dovrà esser circoscritta la superficie conica. Per trovare la curva di contatto, che dovrà far le veci della curva direttrice, è da osservarsi che il piano tangente a qualsivoglia punto di essa curva dovrà esser comune alle due superficie. Ma la posizione del piano tangente dipende,

come sarà dimostrato nel n° 211, dai valori $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$.

Questi valori dunque, dedotti dalla data superficie $L(x, y, z) = 0$, dovranno soddisfare l'equazione 1. Quindi l'equazione della curva di contatto sarà rappresentata da

$$2. \quad L(x, y, z) = 0, \quad (x-a) \frac{dL}{dx} + (y-b) \frac{dL}{dy} + (z-c) \frac{dL}{dz} = 0.$$

Esempio Poniamo che la superficie conica debba esser tangente alla superficie

$$3. \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Dall'equazione 2 si ha

$$4. \quad Ax(x-a) + By(y-b) + Cz(z-c) = 0;$$

e queste due equazioni dinotano la curva di contatto. Ma da esse risulta nel tempo stesso

$$5. \quad Aax + Bby + Ccz = 1;$$

quindi le equazioni 3 e 5 possono riguardarsi come definizione della curva di contatto.

Or per esprimere che la generatrice avrà sempre un punto comune con questa curva, bisognerà eliminare x , y , z dalle equazioni 3 e 5, e da quelle della retta

$$6. \quad x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c).$$

Primieramente da 4 e 6 eliminandone $x - a$ ed $y - b$ si ha

$$7. \quad A\alpha x + B\beta y + Cz = 0,$$

e da 5, 6, 7

$$(A\alpha^2 + B\beta^2 + C)(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - 1) = (Aa\alpha + Bb\beta + Cc)^2.$$

Ed introducendo dinuovo i valori di α e β tolti dalle equazioni 6, si perverrà all'equazione

$$(Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1)(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - 1) \\ = (Aax + Bby + Ccz - 1)^2.$$

Superficie di rotazione.

Queste superficie sono prodotte da una curva C , la quale rota intorno ad una retta fissa A , l'asse, finchè ritorni alla prima posizione. Quindi ogni piano condotto per l'asse taglierà la superficie in una curva sempre identica, denominata meridiano, ed ogui piano perpendicolare all'asse la taglierà in un cerchio che dicesi parallelo.

Per condurre queste superficie al modo di genesi stabilito nel n° 190., bisognerà considerarle come prodotte da un cerchio, il cui centro muovasi sopra una retta, mentre il suo piano rimane perpendicolare a questa retta, ed il raggio scorre sopra una data curva direttrice. Or siano

$$1. \quad F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

le equazioni della curva direttrice, e

$$2. \quad x - a = m(z - c), \quad y - b = n(z - c)$$

quelle dell'asse condotto pel punto a, b, c . Ogni parallelo della superficie potrà riguardarsi come intersezione di un piano perpendicolare all'asse e di una sfera che ha centro sullo stesso asse. Quindi se a, b, c sono le coordinate del centro, avremo per le equazioni 10 del n° 186 e le equazioni 8 del n° 188 che quelle del cerchio saranno

$$3. \quad mx + ny + z = \beta$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \alpha,$$

Ma se il cerchio debba essere un parallelo della superficie, dovrà esservi una relazione

$$4. \quad \beta = \varphi \alpha,$$

la quale esprima che il cerchio in tutte le sue posizioni do-

vrà avere un punto comune colla curva direttrice 1; e questa relazione si avrà sempre che siano eliminate x, y, z dalle equazioni 3 e 4. Da ciò risulta

$$5. \quad mx + ny + z = \varphi[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]$$

qual equazione delle superficie di rotazione.

Togliendo ad asse di rotazione quello delle z , si avrà $m=0, n=0$; e supponendo inoltre che il centro della sfera sia nell'origine, l'equazione 5 assumerà la forma

$$6. \quad z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2) \text{ ovvero } z = \varphi(x^2 + y^2)$$

Esempio 1. Muovasi una retta

$$x = az + h, \quad y = bz + k$$

intorno all'asse in modo che queste facciano le veci delle equazioni 1. Unendo queste equazioni a quella del cerchio parallelo

$$x^2 + y^2 = \alpha, \quad z = \beta,$$

ed eliminando tra esse le coordinate, si perviene alla relazione

$$(a\beta + h)^2 + (b\beta + k)^2 = \alpha;$$

e se in fine siano eliminate α e β dalle tre ultime equazioni, si avrà l'equazione della superficie

$$x^2 + y^2 - (a^2 + b^2)z^2 - 2(ah + bk)z = h^2 + k^2.$$

Prendasi l'asse delle x come la retta che rappresenti la distanza più breve della retta mobile dall'asse di rotazione, dimodochè questa retta mobile si troverà in un piano parallelo a quello delle yz , e quindi sarà $a=0, k=0$, e l'equazione della superficie diverrà

$$x^2 + y^2 - b^2z^2 = h^2.$$

Tosto si riconosce che il meridiano è un'iperbole, essendo

representato dalle equazioni

$$y = 0, \quad x^2 - b^2 z^2 = h^2,$$

ed in conseguenza sarà h il semiasse reale.

Per vie analoghe si troveranno le superficie di rotazione che abbiano come meridiano un'ellisse, una parabola, ecc.

Esempio 2. Sia il meridiano un cerchio, il cui centro non sia nell'asse, ma trovisi nel piano del cerchio: si avrà così una superficie anelliforme di rotazione. In questo caso le equazioni del cerchio

$$y = 0, \quad (x-1)^2 + z^2 = R^2$$

unite alle equazioni del parallelo

$$z = \beta, \quad x^2 + y^2 = \alpha,$$

danno la relazione

$$(\sqrt{\alpha}-1)^2 + \beta^2 = R^2,$$

e se da questa siano eliminate α e β mercè l'equazioni del parallelo, si avrà quella della anelliforme superficie di rotazione

$$7. \quad (1 \pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = R^2.$$

Questa equazione è di quarto grado, e rappresenta o una superficie con uno spazio vuoto intorno all'asse delle z , o una superficie a forma di botte, secondochè sarà

$$1 > R, \quad \text{ovvero} \quad 1 < R.$$

Ma se si avesse zero invece di 1, vale a dire che il centro del cerchio di raggio R cadesse nell'asse, si avrebbe l'equazione della superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Equazione differenziale delle superficie di rotazione.

Elimineremo dall'equazione delle superficie di rotazione

$$z + mx + ny = r[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]$$

la funzione arbitraria r , differenziando parzialmente z rispetto ad x ed y . Avremo così

$$\begin{aligned} 1. \quad p + m &= [2(x-a) + 2(z-c)p]r', \\ q + n &= [2(y-b) + 2(z-c)q]r', \end{aligned}$$

e quindi dividendo :

$$2. \quad \frac{p+m}{q+n} = \frac{(x-a) + (z-c)p}{(y-b) + (z-c)q},$$

ovvero

$$\begin{aligned} 3. \quad [(y-b) - n(z-c)]p - [(x-a) - m(z-c)]q \\ = n(x-a) - m(y-b). \end{aligned}$$

Se l'asse di rotazione si confonda con quello delle z , spariranno le quantità m, n, a, b, c , e l'equazione si semplifica in

$$4. \quad yp - xq = 0.$$

L'equazione 3 indica se una data superficie $L(x, y, z) = 0$ sia o pur no di rotazione. Imperocchè togliendo i valori di p e q dalle equazioni

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dz} p = 0, \quad \frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dz} q = 0,$$

questi valori, qualunque grandezza si abbiano x, y, z , dovranno soddisfare l'equazione 3; si dovranno in conseguenza pareggiare a zero i fattori di x, y, z , e dalle relazioni tra le costanti arbitrarie m, n, a, b, c dedurre le

equazioni di condizione che dovranno esser soddisfatte, affinché l'equazione $L(x, y, z) = 0$ rappresenti una superficie di rotazione.

In vece di farci a determinare immediatamente la generatrice di una superficie di rotazione, vale a dire la curva direttrice del parallelo, si potrà venire alla determinazione che la superficie richiesta sia circonscritta ad una data superficie $M(x, y, z) = 0$. Così la quistione riducesi a dover trovare la linea di contatto. Or in ogni punto di questa curva le due superficie hanno lo stesso piano tangente, ed in conseguenza le derivate p e q tolte da $M=0$, ed introdotte nell'equazione 3, debbono soddisfarla almeno per tutti i punti di questa curva; quindi fatta questa introduzione, l'equazione 3 ed $M(x, y, z) = 0$ definiranno completamente la linea di contatto.

Se l'asse di rotazione confondasi con quello delle z , dimodochè l'equazione 3 si trasformi nell'equazione 4, i valori di p e q , tratti dalle equazioni

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dz} p = 0, \quad \frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dz} q = 0,$$

condurranno alla relazione

$$y \frac{dL}{dx} - x \frac{dL}{dy} = 0,$$

la quale unita all'equazione $M(x, y, z) = 0$, rappresenterà la curva di contatto.

Esempio. La superficie

$$A(x-a)^2 + B(y-b)^2 + C(z-c)^2 = 1$$

rappresenta in conseguenza del n° 199 un'ellissoide, i cui diametri principali sono paralleli agli assi coordinati. Pel n° 5 ne risulterà

$$(A-B)xy - Aay + Bbx = 0,$$

e queste due equazioni rappresenteranno la curva di contatto. Questa non potrà essere una curva piana, giacchè l'ultima equazione non è quella di un piano. Ma se pongasi $B = A$, cosicchè l'ellissoide stessa risulti da rotazione, l'ultima equazione diverrà

$$y = \frac{b}{a} x,$$

vale a dire quella di un piano che passa per l'asse di rotazione, dimodochè la linea di contatto disegna un meridiano dell'ellissoide, il quale se venga a girare intorno all'asse delle z produrrà una superficie anulare.

Compiendo il calcolo, le equazioni

$$A(x-a)^2 + B(y-b)^2 + C(z-c)^2 = 1, \quad y = \frac{b}{a} x,$$

congiunte all'equazione di un parallelo

$$z = \beta, \quad x^2 + y^2 = \alpha^2,$$

ci daranno tra α e β la relazione

$A(D - \alpha)^2 + C(c - \beta)^2 = 1$, ponendo $a^2 + b^2 = D^2$, la quale, quando vi si pongano i valori di α e β , menerà all'equazione della superficie anulare con meridiano ellittico

$$A[D \pm (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}]^2 + C(z - c)^2 = 1.$$

197.

Superficie del 2° grado.

Quando una curva

$$1. \quad F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

scorra sopra un'altra espressa dalle equazioni

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0,$$

in modo da rimaner simile per sito e forma, essa produrrà una superficie, che può denominarsi superficie di scorrimento. L'equazione generale di queste superficie si troverà nello stesso modo che quella delle superficie considerate per lo innanzi, tostochè sarà data la proprietà specifica della generatrice e siano da questa eliminate le variabili che in conseguenza del n° 180 esprimono la somiglianza di sito e forma delle curve.

Per esaminare una speciale famiglia di queste superficie, prendiamo per curva direttrice una linea di 2° grado che si trovi nel piano yz e sia rappresentata dalle equazioni

$$3. \quad My^2 + Nz^2 + Pz + Q = 0, \quad x = 0.$$

Sia ancora dello stesso grado la generatrice, che supponiamo aver centro e giacere in un piano parallelo ad yz , cioè

$$4. \quad Hx^2 + Ky^2 = \alpha, \quad z = \beta.$$

Quest'ultima curva resterà simile per forma e sito, se α valga come variabile, cosicchè dal sistema di queste quattro equazioni si avrà la condizione

$$\frac{M}{K} \alpha + N\beta^2 + P\beta + Q = 0,$$

donde eliminando le variabili α e β , si otterrà

$$5. \quad Lx^2 + My^2 + Nz^2 + Pz + Q = 0, \quad \text{ponendo } L = \frac{HM}{K}.$$

Questa equazione comprende le superficie del 2° grado, e prende una forma meno semplice quando si cangi la posizione della generatrice e direttrice rispetto ai piani coordinati, o viceversa. Trasportando l'origine nel punto a, b, c in modo che i nuovi piani coordinati restino paralleli agli antichi, ne risulterà l'equazione

$$6. \quad L(x - a)^2 + M(y - b)^2 + N(z - c)^2 + P(z - c) + Q = 0,$$

in cui trovasi espressa la forma più composta

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Pz + 2Qy + 2Rx + S = 0.$$

Ma se i nuovi piani si volessero inclinati agli antichi, dall'equazione 5 coll'aiuto delle equazioni 9 ed 11 del n° 182 risulterebbe la forma generale delle equazioni di 2° grado

$$7. \quad Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Cxy + 2Dxz + 2Eyz + 2Px + 2Qy + 2Rz + S = 0,$$

la quale disegna il luogo geometrico di un punto nello spazio, rispetto al quale il quadrato della sua distanza da un punto fisso conserva un rapporto costante al rettangolo delle distanze da due piani fissi che s'intersecano.

Le superficie dell'equazione 5 hanno la proprietà di non poter essere incontrate da una retta in più di due punti. Imperocchè se questa retta è rappresentata dalle equazioni

$$x = mz + p, \quad y = nz + q,$$

per tutti i punti comuni alla retta ed alla superficie le coordinate omonime dovranno esser le stesse. Eliminandone due di esse, p. e. x ed y , risulterà rispetto alla terza un'equazione quadratica, e quindi al massimo due valori.

Similmente si troverà che queste superficie non possono dare altra intersezione con un piano, se non una linea retta od una sezione conica, imperocchè le coordinate della linea d'intersezione sono nel tempo stesso comuni alla superficie ed al piano

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

e l'eliminazione di una di esse, di z per esempio, condurrà ad un'equazione di 2° grado tra le altre due, x ed y , della forma

$$A_1x^2 + B_1y^2 + 2C_1xy + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0.$$

Questa equazione esprime una superficie cilindrica, in cui

dovrà trovarsi la linea d'intersezione; e la proiezione di questa linea sarà espressa da questa medesima equazione, congiunta a $z=0$. Ma questa proiezione rappresenta una curva, che al massimo è di 2° grado, così la linea d'intersezione non potrà risultare di grado superiore, essendochè la proiezione G , di una corda G dovrà avere tanti punti comuni colla proiezione di una curva C , quanti la corda G ne ha colla stessa curva C .

198.

Superficie del 2° grado con centro.

Facciamoci a ricercare le singole superficie dell'equazione 5 del n° precedente, assegnando speciali caratteri sì alla curva generatrice che alla direttrice.

Se l'equazione 3 del n° precedente debba rappresentare una sezione conica con centro, essa prenderà la forma $Ly^2 + Mz^2 + Q = 0$, dimodochè l'equazione 5 riceverà la forma più semplice;

$$1. \quad Lx^2 + My^2 + Nz^2 + Q = 0.$$

Le superficie di questa famiglia hanno un centro, vale a dire un punto che divide per metà ogni corda per esso condotta. Imperocchè per un punto M ovvero x_1, y_1, z_1 della superficie dovrà esser soddisfatta l'equazione

$$Lx_1^2 + My_1^2 + Nz_1^2 + Q = 0;$$

ma questa stessa equazione è soddisfatta dalle coordinate — x_1 , — y_1 , — z_1 del punto M_1 , e la retta MM_1 passa per; l'origine. L'origine delle coordinate è dunque centro della superficie.

Ma se l'equazione 1 ha la forma

$$2. \quad L(x-a)^2 + M(y-b)^2 + N(z-c)^2 + Q = 0,$$

si troverà subito che ogni retta

$$x - a = m(z - c), \quad y - b = n(z - c)$$

la quale passa pel punto a, b, c , sarà in questo punto divisa per metà, e che in conseguenza la superficie ha centro nel punto a, b, c , comunque potessero variare m ed n .

Quando il punto M ossia x, y, z , si trova nella superficie dell'equazione 1, vi giaceranno non solamente i punti M ed M' , ma tutti quelli ancora che saranno dinotati da tre qualunque delle sei coordinate

$$x, y, z, -x, -y, -z,$$

imperocchè ciascuno degl' indicati punti, per esempio $+x, +y, -z$, ovvero $+x, -y, -z$, rende soddisfatta l'equazione 1. Or essendo i due punti

$$+x, +y, +z \text{ e } +x, +y, -z$$

egualmente lontani dal piano xy , e la loro congiungente essendo parallela all'asse delle z , ne segue che il piano xy divide per metà tutte le corde parallele all'asse delle z . La stessa cosa vale per ciascuno dei tre piani coordinati e pei corrispondenti assi. Perciò questi piani diconsi piani diametrali, e propriamente piani diametrali coniugati, perchè ciascuno di essi biseca le corde parallele agli altri due.

Non i tre piani coordinati soltanto hanno la nominata proprietà; ma in vece si hanno infiniti sistemi di piani diametrali coniugati ad angoli obliqui, che hanno comune intersezione nel centro. Ed in vero, essendo

$$3. \quad x = mz + p, \quad y = nz + q$$

le equazioni di una corda, dalla loro unione all'equazione 1, si potrà ottenere l'espressione di un'ordinata, della z per esempio, mercè un'equazione della forma

$$4. \quad Az^2 + Bz + C = 0,$$

L'ordinata z , del punto medio di questa corda sarà data dalla semisomma dei valori di z , vale a dire che sarà

$$z_1 = -\frac{B}{2A};$$

e questo valore di z , è quello che risulta rispetto z dalla derivata dell'equazione 4, cioè da $2Az + B = 0$. Quindi il luogo geometrico dei punti medii delle corde parallele alla retta 3 sarà dato da una superficie diametrale. Ed in vece di trovare questa superficie per mezzo delle equazioni 1 e 3, potremo ottenerla dalla superficie $F(x, y, z) = 0$, differenziandone l'equazione rispetto ad x , y , z e considerando z qual variabile indipendente. Così si ottiene

$$\frac{dF}{dx} \frac{dx}{dz} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dz} + \frac{dF}{dz} = 0,$$

quindi, essendo $\frac{dx}{dz} = m$, $\frac{dy}{dz} = n$,

$$5. \quad m \frac{dF}{dx} + n \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} = 0.$$

Questa equazione, non contenendo più le quantità p e q appartenenti alla retta, e che variano dall'una all'altra corda parallela, sarà quella della superficie diametrale di $F(x, y, z) = 0$.

Applicando questa equazione 5 all'equazione 1, avremo che

$$Lmx + Mny + Nz = 0$$

esprimerà il luogo geometrico dei punti medii delle corde parallele alla retta 3. Questo luogo è dunque un piano, il quale attesa la varietà di m ed n potrà prendere infinite posizioni diverse.

Finalmente le superficie dell'equazione 1, come ancora tutte le superficie di 2° grado, hanno il carattere comune

di esser intersecate da piani paralleli secondo curve simili e similmente poste. Imperocchè componendo l'equazione 1 con quella di qualsiasi piano

$$6. \quad z = Ax + By + D,$$

ed eliminandone z , l'equazione risultante

$$7. \quad (L + NA^2)x^2 + (M + NB^2)y^2 + 2NABxy \\ + 2NADx + 2NBDy + ND^2 + Q = 0$$

dinoterà la proiezione della curva d'intersezione sul piano xy ; ed è chiaro che per ogni altro piano parallelo al piano 6,

$$z = Ax + By + D_1,$$

non si dovrà far altro che scambiare D con D_1 nell'equazione 7 per ottenere la proiezione della nuova intersezione. Ma poichè i fattori di x^2 , y^2 , yx non variano con D , ne segue in conseguenza del n° 180 che l'equazione 7 col variare di D , rappresenta curve simili per forma e sito. Donde poi segue che anche simili saranno le curve a cui queste proiezioni appartengono. Ed in vero rappresentino C e C_1 (Fig. 32) due di queste proiezioni, AM ed A_1M_1 , AN ed A_1N_1 due coppie di corde parallele; i piani proiettanti di queste rette incontreranno i piani paralleli in cui giacciono le curve corrispondenti alle proiezioni C e C_1 , in due coppie di corde parallele am ed a_1m_1 , an ed a_1n_1 , dimodochè tra queste rette e le loro proiezioni avranno luogo le relazioni

$$AM = am \cos \alpha, \quad AN = an \cos \beta,$$

$$A_1M_1 = a_1m_1 \cos \alpha_1, \quad A_1N_1 = a_1n_1 \cos \beta_1,$$

indicando con α l'angolo di AM con am , e con β quello di AN con an . Or dovendo per la simiglianza delle curve C e C_1 esser

$$\frac{AM}{A_1M_1} = \frac{AN}{A_1N_1} = k, \text{ dovrà essere ancora } \frac{am}{a_1m_1} = \frac{an}{a_1n_1} = k.$$

Or per trovare il luogo dei centri di tutte le curve d'intersezione parallele, date dai piani 6, osserviamo che le proiezioni di questi centri saranno ancora centri delle curve nel piano xy . Ma si avrà il centro della curva 7, scambiandovi x con $x + x_1$, y con $y + y_1$, indi pareggiando a zero i fattori di x ed y , ed in fine determinando le coordinate x , ed y , del centro per mezzo di queste due equazioni ottenute; o ciò che vale lo stesso, differenziando l'equazione 7 rispetto ad x ed y , e riguardando queste due variabili come coordinato del centro. Si avrà così

$$(L + NA'')x + NAB_y + NAD = 0,$$

$$(M + NB'')y + NAB_x + NBD = 0,$$

e poichè il centro richiesto dovrà trovarsi nel piano 6, si potrà da questo e dalle due ultime equazioni eliminare la variabile D , e si avranno così le due equazioni

$$8. \quad Lx + NAz = 0, \quad My + NBz = 0,$$

le quali apparterranno a tutti i centri delle sezioni parallele. Questi centri staranno dunque in un diametro della superficie. Dietro una breve meditazione si troverà che tutte le corde parallele alla retta delle equazioni 8, saranno divise per metà dal piano

$$z = Ax + By$$

parallelo a quello dell'equazione 6, e che in conseguenza esso piano sarà coniugato al diametro delle equazioni 8.

L' ellissoide.

Per meglio dichiarare le singole superficie del 2° grado con centro, supponiamo primieramente che tanto la curva direttrice $My^2 + Nz^2 + Q = 0$ che la generatrice $Hx^2 + Ky^2 = \alpha$ siano ellissi. Quindi M ed N, del pari che H e K saranno nel tempo stesso positivi o negativi. Senza pregiudizio della generalità noi supporremo positivi M ed N, H e K, dimodochè Q dovrà esser negativo. Prendiamo dunque $-Q$ in vece di Q, ed osserviamo che essendo $L = \frac{MH}{K}$, sarà positivo ancora L, e quindi dall' equazione 1 del n° precedente si avrà

$$1. \quad Lx^2 + My^2 + Nz^2 = Q,$$

se le quantità costanti senza eccezione son positive. Una superficie di questa specie dicesi ellissoide.

Gli assi delle x, y, z sono intersecati nei punti

$$x_1 = \pm \left\{ \frac{Q}{L} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad y_1 = \pm \left\{ \frac{Q}{M} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad z_1 = \pm \left\{ \frac{Q}{N} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

dimodochè se questi valori siano rappresentati ordinatamente con a, b, c , l' equazione 1 assumerà la forma

$$2. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Se poniamo $b = a$, l' equazione che ne risulta,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dimostra che da piani paralleli ad xy da $z = -c$ fino a $z = +c$ l' ellissoide è tagliata in cerchi, e che in con-

seguenza questa superficie è stata prodotta dalla rotazione dell'ellisse $c^2x^2 + a^2z^2 = a^2c^2$ intorno all'asse delle z . Se in fine sia $a = b = c$, l'ellissoide si trasforma in una superficie sferica.

Se un piano

$$x = Ay + Bz + D$$

taglia la superficie 1, si avrà mercè l'eliminazione di x la proiezione della curva d'intersezione sul piano yz , cioè

$$3. \quad (LA^2 + M)y^2 + (LB^2 + N)z^2 + 2LAByz + 2LADy + 2LBDz = Q - LD^2.$$

Questa equazione indica un'ellisse, poichè i fattori di y^2 e z^2 hanno lo stesso segno. La curva d'intersezione sarà dunque anch'essa un'ellisse.

Applicando questa conseguenza ad una seconda proiezione della stessa intersezione, si verrà a conoscere esser la superficie limitata da ogni lato.

Per risolvere la questione se una sezione piana o un sistema di sezioni piane possa dare per figura della sezione un cerchio, supponiamo $a > b > c$, e per l'asse medio $AB_1 = b$ (fig. 30) immaginiamo condotto il piano B_1AD , il quale tagli il piano xz secondo AD . Le rette AB_1 e AD si confonderanno cogli assi della figura d'intersezione AB_1D , e dovrà essere $AD < AA_1$, e nel tempo stesso $AD > AC_1$, essendochè $AA_1 = a$ è supposta più grande di $AC_1 = c$. Dovrà dunque esservi per AD una posizione tra AA_1 ed AC_1 per la quale si avrà $AD = AB_1$; ed allora l'intersezione sarà circolare.

Per definire la posizione del piano B_1AD , scriviamo l'equazione 2 sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{x^2}{h^2} + \frac{z^2}{b^2},$$

ovvero sotto la forma:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{b^2} = 1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2 c^2} z^2.$$

Quest'ultima equazione è soddisfatta dalle due equazioni simultanee

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2} z^2,$$

di cui la prima rappresenta una superficie sferica di raggio b , e che ha centro nell'origine, mentre la seconda, ossia

$$x = \pm \frac{a}{c} \left\{ \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2} \right\}^{\frac{1}{2}} z,$$

rappresenta due piani condotti per l'asse delle y , i quali sono egualmente inclinati al piano xz e che sono possibili soltanto nell'ipotesi di $a > b > c$. Ogni sistema di piani paralleli ad uno di questi taglierà l'ellissoide in un cerchio.

Ad ogni altra superficie di 2° grado, che sia tagliata in ellisse da un piano qualunque, potremo applicare lo stesso ragionamento per determinare la posizione dei piani che la taglieranno in un cerchio.

200.

L'iperboloido semplice.

Supponiamo rispetto alla superficie dell'equazione 1 n° 198 che la curva direttrice $My' + Nz' + Q = 0$ sia un'iperbole, vale a dire che siano N e Q negativi ed M positivo, e che la curva generatrice $Lx^2 + Ky' = \alpha$ sia un'ellisse. Perciò la suddetta equazione 1 si trasformerà in

$$1. \quad Lx^2 + My^2 - Nz^2 = Q,$$

nel caso che tutte le costanti disegnino numeri positivi, imperocchè essendo $L = \frac{HM}{K}$, sarà ancora L quantità po-

sitiva. Gli assi delle x , y , z saranno incontrati nei punti

$$x_1 = \pm \left\{ \frac{Q}{L} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad y_1 = \pm \left\{ \frac{Q}{M} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad z_1 = \pm \left\{ -\frac{Q}{N} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

z_1 sarà dunque immaginaria, e perciò questo asse è denominato asse immaginario della superficie. In conseguenza rappresentando x_1 , y_1 , z_1 con a , b , $c \sqrt{-1}$, l'equazione 1 prenderà la forma

$$2. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Questa superficie, come facilmente si riconosce, sarà intersecata da qualsiasi piano condotto pel centro, e quindi essa costituisce una figura continua, ed è denominata iperboloide semplice.

Se $b = a$, la superficie è un'iperboloide di rivoluzione, generata dalla rotazione dell'iperbole $c^2 x^2 - a^2 z^2 = a^2 c^2$ intorno all'asse delle z .

Se la superficie è tagliata da un piano

$$x = Ay + Bz + D,$$

in conseguenza delle osservazioni fatte nel n° precedente sarà

$$3. (LA^2 + M)y^2 + (LB^2 - N)z^2 + 2LAByz + 2LADy + 2LBDz = Q - LD^2$$

la proiezione della curva d'intersezione sul piano yz . Or l'equazione generale delle sezioni coniche

$$ay^2 + byz + cz^2 + dy + ez + h = 0$$

rappresenterà un'ellisse, iperbole o parabola, secondochè $b^2 - 4ac$ rappresenterà una quantità negativa, positiva o nulla. Questi tre casi possono aver luogo nella curva 3, essendochè l'indicata differenza si trova espressa da

$$-4(LMB^2 - LNA^2 - MN).$$

E passando dalla proiezione alla curva proiettata, ne segue che l'iperboloide semplice potrà esser tagliata da un piano in un'ellisse, iperbole o parabola.

Se il piano di sezione sia parallelo a quello delle y, z e nella distanza $x = \pm a$, l'equazione 2 ci darà per proiezione della curva di sezione l'equazione

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ ovvero } y = \pm \frac{b}{c} z,$$

la quale rappresenta due rette che s'incontrano nell'origine, e sono egualmente inclinate all'asse delle z . Queste rette hanno le posizioni degli assintoti di tutte le iperbole simili, i cui piani sono paralleli al piano yz . Laonde il piano $x = \pm a$ incontra la superficie in due rette. Ciò vale ancora per ogni piano che parallelamente all'asse delle z sia condotto pel punto estremo di un diametro dell'ellisse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0,$$

imperocchè l'equazione di questa ellisse può ridursi ad un'equazione di stessa forma riferita a diametri coniugati, cosicchè i piani condotti pei punti estremi di un diametro parallelamente al piano yz , daranno sezioni che si troveranno proiettate in linee della forma

$$4. \quad y = \pm \frac{b}{c} z.$$

L'iperboloide semplice potrà dunque esser generata da due sistemi di linee rette.

Le proiezioni di queste rette sul piano yz si tagliano nel centro della superficie, e quindi formano una superficie conica, denominata cono degli assintoti, la cui equazione

$$5. \quad Lx^2 + My^2 - Nz^2 = 0$$

si ottiene da ciò che l'equazione 1 può esistere insieme al-

l'equazione 4 soltanto nel caso di $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$,
e quindi $Q=0$.

201.

L'iperboloida doppia.

Rimanendo la stessa ellisse generatrice del n° precedente, supponiamo che l'asse immaginario dell'iperbole direttrice cada in quello delle y . Le equazioni di queste due curve

$$Nz^* - My^* = Q, \quad Hx^* + Ky^* = \alpha$$

ci condurranno allora all'equazione

$$-Lx^* - My^* + Nz^* = Q,$$

ovvero, scambiando l'asse delle x con quello delle z , all'equazione

$$1. \quad Lx^* - My^* - Nz^* = Q,$$

che rappresenta l'iperboloida doppia.

Questa superficie incontra gli assi coordinati nei punti

$$x_1 = \pm \left\{ \frac{Q}{L} \right\}^{\frac{1}{2}} = a, \quad y_1 = \pm \left\{ -\frac{Q}{M} \right\}^{\frac{1}{2}} = b\sqrt{-1}$$

$$z_1 = \pm \left\{ -\frac{Q}{N} \right\}^{\frac{1}{2}} = c\sqrt{-1} :$$

essa ha dunque un sol asse reale e due immaginari, i cui valori trasformano l'equazione 1 in

$$2. \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La superficie sarà tagliata dal piano xz , ossia dal piano $y=0$, in una iperbole, e del pari, in conseguenza, da tutti gli altri piani a questo paralleli. Lo stesso avrà luogo per i piani paralleli al piano xy . Un piano poi parallelo a quello delle yz ed alla distanza $x = \pm h$, taglierà la superficie

nella curva

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1,$$

la quale rappresenta un'ellisse, che è possibile soltanto nell'ipotesi di $h > a$. Quindi la superficie componesi di due eguali ed opposte cellule, le quali da $x = \pm a$ vanno estendendosi all'infinito.

Come nel n° precedente rispetto all'iperboloide semplice, così ancora sarà facile dimostrare quanto all'iperboloide doppia che questa superficie potrà essere intersecata da un piano in una qualunque sezione conica, e che ad essa appartiene ancora un cono assintotico, la cui equazione è

$$Lx^2 - My^2 - Nz^2 = 0.$$

Le superficie dell'ellissoide ed iperboloide risultano, per le cose già dette, da un'ellisse generatrice. Ma se si ponesse come generatrice un'iperbole, e come direttrice un'ellisse, si perverrebbe nuovamente ad una delle tre superficie con centro.

202.

Superficie del 2° grado senza centro.

Ritorniamo sul n° 197 per introdurre nelle equazioni 3 e 5 come curva direttrice una parabola situata nel piano yz . L'equazione della parabola avendo la forma semplice

$$My^2 = Pz, \quad x = 0,$$

ne risulterà dalla sua unione alle equazioni 4 dello stesso numero

$$1. \quad Lx^2 + My^2 = Pz, \quad \text{essendo } L = \frac{HM}{K}.$$

Le superficie di questo genere non hanno centro, poichè se le coordinate x, y, z , di un punto M soddisfano l'equa-

zione, il punto $-x_1, -y_1, -z_1$ non potrà giacere nella superficie.

Al contrario essa possiede piani diametrali, imperocchè applicando all'equazione 1 l'equazione 5 del n° 198, ne risulta

$$2 Lmx + 2 Mny = P,$$

equazione che rappresenta un piano parallelo all'asse z . Quindi tutti i piani diametrali e con ciò tutti i diametri della superficie sono paralleli all'asse delle z .

Tagliando la superficie con un sistema di piani paralleli

$$z = Ax + By + D,$$

l'eliminazione di z da questa e dall'equazione 1 dimostra che la forma della curva d'intersezione non si altera col variare di D ; dimodochè la conseguenza, tratta nel n° 198 da questa proprietà delle sezioni parallele, valerà ancora per le superficie del 2° grado senza centro, e che perciò queste superficie sono tagliate da piani paralleli in curve simili e similmente poste.

La generatrice della superficie 1 potrà essere un'ellisse od anche un'iperbole. Nel primo caso sarà

$$2. \quad Lx^2 + My^2 = Pz$$

l'equazione della superficie, L, M, P indicando numeri positivi. Questa superficie nomasi paraboloidi ellittica. Nel secondo caso indicando K un numero negativo nell'equazione $Hx^2 + Ky^2 = \alpha$ della generatrice, l'equazione della superficie sarà

$$-Lx^2 + My^2 = Pz,$$

ovvero, scambiando gli assi delle x ed y ,

$$3. \quad Lx^2 - My^2 = Pz,$$

e la superficie prenderà il nome di paraboloidi iperbolica.

Paraboloido ellittica.

La superficie

1. $Lx^2 + My^2 = Pz$

è intersecata dal piano xz nella curva

$$y = 0, Lx^2 = Pz,$$

vale a dire in una parabola; ed egualmente nella parabola

$$x = 0, My^2 = Pz$$

lo sarà dal piano yz ; ed essa superficie, ponendovi $\frac{P}{L} = q$,

$\frac{P}{M} = p$, potrà essere rappresentata dall'equazione più semplice

2. $px^2 + qy^2 = pqz.$

Dal piano

$$x = Ay + Bz + D$$

la superficie 1 sarà tagliata in una curva, la cui proiezione sul piano yz sarà

3. $(LA^2 + M)y^2 + LB^2z^2 + 2LAByz + 2LADy + (2LBD - P)z + LD^2 = 0.$

E se le osservazioni fatte sull'equazione 3 del n° 200 per conoscere la natura della curva, siano applicate a questa equazione 3, si avrà per l'indicato binomio $b^2 - 4ac$ il valore

$$-4 LMB^2,$$

il quale dimostra che la curva d'intersezione è un'ellisse, ma non già un'iperbole, finchè B è diversa da zero, e sarà poi una parabola nell'ipotesi di $B = 0$. In quest'ultimo caso

l' equazione

$$x = Ay + D$$

dimostra esser il piano parallelo all' asse delle z . Quindi ogni piano parallelo all' asse delle z taglierà la paraboloida ellittica in una parabola.

204.

Paraboloida Iperbolica.

La superficie

$$1. \quad Lx^2 - My^2 = Pz$$

egualmente che la paraboloida ellittica, dà sezioni paraboliche coi piani xz ed yz , come dimostrano le equazioni

$$y = 0, \quad Lx^2 = Pz$$

$$x = 0, \quad My^2 = -Pz,$$

Gli assi di queste parabole si confondono con quello delle z ; ma se le ascisse dell' una sono positive, quelle dell' altra saranno negative. Ponendo $\frac{P}{L} = q$, $\frac{P}{M} = p$, l' equazione 1 prende la forma

$$2. \quad px^2 - qy^2 = pqz.$$

Tagliando la superficie con un piano

$$x = Ay + Bz + D,$$

avremo la proiezione della curva d' intersezione dall' equazione 3 del n° precedente, scambiandovi M con $-M$. Onde segue che

$$b^2 - 4ac = +4LMB^2$$

resterà sempre quantità positiva, dimodochè in generale la sezione è un' iperbole, la quale si trasforma in parabola, quando $B = 0$, vale a dire quando il piano segante è parallelo all' asse delle z .

Poichè in fine per $Z = 0$ l'equazione 2 ci mena alla relazione

$$x = \pm \frac{q}{p} y,$$

così la superficie sarà tagliata dal piano xy secondo due rette egualmente inclinate all'asse delle y . Queste rette sono proiezioni di tutti gli assintoti delle iperbole, secondo le quali la superficie è intersecata da piani paralleli al piano xy . Per ogni coppia di piani $z = \pm h$, le iperbole sono coniugate, essendochè l'asse ch'è reale per $z = +h$ diviene immaginario per $z = -h$.

Se la superficie fosse riferita ad un sistema di coordinate oblique, e la sua equazione ridotta alla forma dell'equazione 1, il piano xy continuerebbe a tagliare la superficie in una coppia di rette.

205.

Superficie conoidali.

Queste superficie risultano dal moto di una retta, la quale su due direttrici, una delle quali è pur linea retta, scorre in modo da rimaner sempre parallela ad un piano (piano direttore). La superficie così generata è storta. Improcchè se G e G_1 dinotino due posizioni prossime della generatrice, s ed s_1 le ascisse determinate sulle direttrici, e sia s quella della direttrice curvilinea, la tangente alla curva tra G e G_1 avrà la direzione dell'arco s . Or se questa tangente fosse in un medesimo piano colla direttrice rettilinea, la generatrice descriverebbe una superficie piana.

Or sia xy il piano a cui debba rimaner parallela la generatrice. A questa in conseguenza converranno le equazioni

1.
$$z = \beta, \quad y = ax + \gamma,$$

in cui α , β , γ rappresentano quantità variabili. Ponendo inoltre nel punto d'incontro della direttrice rettilinea col piano direttore l'origine delle coordinate, saranno le direttrici rappresentate dalle equazioni

$$2. \quad x = mz, \quad y = nz$$

$$3. \quad F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0.$$

Or perchè la retta 1 incontri la retta 2, dovrà tra α , β , γ aver luogo la relazione

$$4. \quad n\beta = m\alpha\beta + \gamma,$$

per mezzo della quale potrà determinarsi una delle variabili, la γ per esempio, e così le equazioni 1 della generatrice si trasformeranno in

$$5. \quad z = \beta, \quad y - n\beta = \alpha(x - m\beta).$$

Rimane tuttavia ad esprimere che la generatrice taglia costantemente la curva 3, vale a dire che dalle quattro equazioni 3 e 5 deve risultare tra α e β una relazione

$$6. \quad \beta = \varphi(\alpha),$$

dalla quale, introducendovi i valori di α e β tolti dalle equazioni 5, si avrà

$$7. \quad z = \varphi \left\{ \frac{y - nz}{x - mz} \right\}.$$

La conoide si dice retta, quando la direttrice rettilinea è perpendicolare al piano direttore; e poichè questo nella nostra ipotesi si confonde col piano xy , così la suindicata retta coinciderà coll'asse delle z . Quindi basterà nell'equazione 7 porre $m = 0$ ed $n = 0$, per ottenere l'equazione della conoide retta

$$8. \quad z = \varphi \left\{ \frac{y}{x} \right\}.$$

La funzione φ dell'equazione 7 dipende dalla natura del-

la curva direttrice 3. E per eliminare φ , basterà, come si è veduto nei nⁱ 192, 194, 196, differenziare parzialmente l'equazione 7 rispetto ad x ed y , e poi eliminare φ' . Ne risulterà

$$9. \quad p(x - mz) + q(y - nz) = 0,$$

e nel caso che la direttrice rettilinea coincida coll'asse delle z ,

$$10. \quad px + qy = 0.$$

Nei citati numeri si trova ancora indicata la via per la quale si perverrebbe alla linea di contatto con una data superficie $L(x, y, z) = 0$, se in vece della curva 3 fosse data questa superficie a cui la conoide dovesse esser tangente.

Esempio 1. La conoide dell'anulare volta a croce risulta da una retta orizzontale, che appoggiasi alla verticale AZ (Fig. 40) ed all'ellisse BCB_1 , il cui centro giace nell' AX ed i cui semiassi $DB = b$ $DC = c$ stanno paralleli agli assi delle y e z . In conseguenza ponendo $AD = a$, le equazioni di questa ellisse saranno

$$x = a, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

le quali unite alle equazioni della generatrice,

$$z = \beta, \quad y = \alpha x,$$

danno mercè l'eliminazione di x, y, z , la relazione tra α e β

$$\frac{a^2 \alpha^2}{b^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = 1,$$

dalla quale coll'aiuto delle equazioni della generatrice, si ottiene quella della superficie

$$a^2 c^2 y^2 = b^2 x^2 (c^2 - z^2).$$

Tagliando questa superficie con piani paralleli al piano yz , per esempio $x = h$, si hanno ellissi, il cui semiasse paral-

lelo a quello delle z ha il costante valore c , e che si trasformano in cerchio per $x = \pm \frac{ac}{b}$. I piani poi paralleli ad xz tagliano la superficie in curve del 4° grado, che hanno due assintoti paralleli all'asse delle x nella distanza $z = \pm c$.

Esempio 2. Sia direttrice l'elica dell'equazione 5 n° 189

$$x = r \cos nz, \quad y = r \sin nz;$$

da queste e dalle equazioni della generatrice,

$$z = \beta, \quad y = \alpha x,$$

ne risulta la condizione

$$\alpha = \operatorname{tg} n\beta;$$

quindi si ha l'equazione della superficie della vite

$$y = x \operatorname{tg} nz,$$

la quale coincide coll'equazione 6 del n° 189.

Questa equazione appartiene alla superficie della chiocciola quadrangolare. Quella della chiocciola triangolare non è una conoide, poichè la generatrice non rimane parallela a verun piano, ma forma coll'asse un angolo costante $k < \frac{\pi}{2}$. Le equazioni di questa retta sono

$$y = \alpha x, \quad x = \frac{\operatorname{tg} k}{\sqrt{1 + \alpha^2}} z + \gamma,$$

l'ultima delle quali risulta evidentemente da ciò che la retta incontra l'asse delle z sotto l'angolo costante k . Or le equazioni dell'elica, qual intersezione della superficie, sono

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} nz;$$

quindi risulta la condizione

$$\alpha = \operatorname{tg} \left\{ n \frac{r - \gamma \sqrt{1 + \alpha^2}}{\operatorname{tg} k} \right\},$$

donde poi coll'aiuto dell'equazione della generatrice si ottiene

$$y = x \operatorname{tg} \frac{n(r + \gamma \operatorname{tg} k - \sqrt{x^2 + y^2})}{\operatorname{tg} k}.$$

Ponendovi $k = \frac{\pi}{2}$ si avrà l'equazione della cliocciola quadrangolare.

206

Superficie rettilinee.

Eccetto la conoide, tutte le altre superficie finora considerate non hanno che una sola direttrice di natura variabile; quindi l'equazione $\beta = \varphi(\alpha)$ contiene una sola funzione arbitraria, dalla quale l'equazione può rendersi indipendente mercè derivate parziali di primo ordine. Ma se la generatrice appoggiasi a più direttrici, l'equazione della superficie conterrà più funzioni arbitrarie, e l'equazione con differenziali parziali salirà ad un grado più elevato, il quale supera in generale il numero delle funzioni arbitrarie. Imperocchè differenziando per esempio due volte un'equazione con due funzioni φ e ψ , si avranno in tutto sei equazioni, le quali non basteranno per eliminare le sei funzioni che vi si contengono, φ , φ' , φ'' , ψ , ψ' , ψ'' , se l'equazione primitiva, qual'è appunto il caso delle superficie rettilinee, non renda possibile un'eliminazione.

Una retta scorre su due direttrici L ed L' , mentre essa rimane parallela ad un piano. Questa superficie, a cui appartengono la conoide e la paraboloide iperbolica, evidentemente è superficie storta. Or supponendo la generatrice parallela al piano xy , le sue equazioni saranno

$$1. \quad z = \alpha, \quad y = \beta x + \gamma;$$

e poichè questa generatrice deve scorrere sulle due direttrici L ed L_1 , ne risulteranno le due equazioni di condizione

$$2. \quad \phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \text{ovvero}$$

$$3. \quad \beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \psi(\alpha).$$

Quindi eliminando le variabili α, β, γ tra le quattro equazioni 1 e 2, o 1 e 3, si avrà l'equazione generale della famiglia di queste superficie

$$4. \quad y = x\varphi(z) + \psi(z).$$

Or perchè da questa si ottenga l'equazione differenziale parziale, si differenzierà prima rispetto ad x , indi rispetto ad y ; ed in questo modo si avrà

$$0 = \varphi z + x p \varphi' z + p \psi'$$

$$1 = x q \varphi' z + q \psi' z,$$

ovvero, dividendo,

$$p = -q\varphi z.$$

Ne sono interamente sparite le funzioni φ', ψ, ψ' ; fa d' uopo, in conseguenza, del differenziale del 2° ordine per eliminare la rimanente funzione φ . Or si ponga, come d' ordinario,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2 z}{dx dy} = s, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = t,$$

e si differenzii l'ultima equazione rispetto ad x ed y , si avrà

$$\frac{qr - ps}{q^2} = -p\varphi' z, \quad \frac{qs - pt}{q^2} = -q\varphi' z,$$

e dividendo ne risulterà l'equazione generale

$$5. \quad q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

Esempio. Una retta parallelamente al piano xy muovesi

sull' ellisse

$$x = h, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

e sul cerchio $x = k, \quad y^2 + z^2 = c^2$.

Dall' unione di queste equazioni con quelle della retta,

$$z = \alpha, \quad y = \beta x + \gamma,$$

si ottengono le due relazioni

$$\frac{(\beta h + \gamma)^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{c^2} = 1, \quad (\beta k + \gamma)^2 + \alpha^2 = c^2.$$

Or per abbassare le potenze superiori eliminiamo primieramente dalle quattro ultime equazioni α e β , ed avremo

$$\beta(h-x) + y = \pm \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - z^2}, \quad \beta(k-x) + y = \pm \sqrt{c^2 - z^2},$$

ovvero, eliminando β ,

$$6. \quad (h-x)(y \pm \sqrt{c^2 - z^2}) = (k-x)(y \pm \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - z^2}).$$

Dando al radicale nei due membri uno stesso segno, si viene a determinare che la retta generatrice incontra due punti della curva direttrice, i quali stanno dal medesimo lato del piano xz , stantechè queste radici dinotano le ordinate y degl' indicati punti. In questo caso l' equazione della curva si trasforma in

$$(h-k)cy = [(b-c)x + ch - bk]\sqrt{c^2 - z^2},$$

che rappresenta la conoide dell' esempio 1 del n° precedente; imperocchè tutte le generatrici incontrano il piano xz in una verticale, che giace fuori i piani delle curve.

Se poi i radicali dell' equazione 6 si prendono con segni diversi, ne risulterà ancora una conoide, ma la retta, secondo la quale sarà intersecato il piano xz , giacerà tra i piani delle curve.

Continuazione.

Se una retta scorra su tre curve direttrici L , L_1 , L_2 , la superficie prodotta sarà determinata e storta, come sarà facile a dimostrarsi. La generatrice, che non deve soddisfare ad altra condizione che a quella di essere una linea retta, sarà rappresentata dalle equazioni

$$1. \quad x = \alpha z + \gamma, \quad y = \beta z + \delta,$$

nelle quali α , β , γ , δ dinotano quattro parametri variabili. Or dal dover essa scorrere su ciascuna delle tre curve L , L_1 , L_2 ne risultano tra i parametri tre equazioni di condizione, riducibili alle forme

$$2. \quad \beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \psi(\alpha), \quad \delta = \chi(\alpha).$$

Eliminando i quattro parametri dalle cinque equazioni 1 e 2, si avrà l'equazione della superficie. Le equazioni 1 ci danno immediatamente

$$3. \quad x = \alpha z + \psi(\alpha), \quad y = \varphi(\alpha)z + \chi(\alpha),$$

dalle quali potrà sparire α , quando siano date le equazioni delle tre direttrici.

L'equazione con differenziali parziali, che libera da α e dalle funzioni φ , ψ , χ rappresenta la superficie, elevasi al terzo grado.

Esempio. Su gli opposti lati di un parallelogrammo orizzontale siano descritti due cerchi verticali, ed una retta debba scorrere su questi cerchi in modo da tagliare nel tempo stesso un'altra retta che dal centro A del parallelogrammo è menata perpendicolarmente ai piani dei semicerchi. Prendendo questa retta per asse delle y , e gli altri due assi perpendicolarmente ad essa vadano condotti pel punto A , sa-

ranno equazioni delle tre direttrici

$$\begin{aligned}x &= 0, & z &= 0 \\y &= -b, & (x-a)^2 + z^2 &= r^2 \\y &= +b, & (x+a)^2 + z^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Or dando alle equazioni della retta generatrice la forma

$$4. \quad x = \alpha (y - \beta), \quad z = \gamma (y - \beta),$$

queste indicheranno in pari tempo che la retta taglia l'asse delle y . Qual condizione poi che la retta incontri i due cerchi, si hanno le relazioni

$$5. \quad [\alpha (b + \beta) + a]^2 + \gamma^2 (b + \beta)^2 = r^2$$

$$6. \quad [\alpha (b - \beta) + a]^2 + \gamma^2 (b - \beta)^2 = r^2,$$

donde, per sottrazione,

$$\beta (b\alpha^2 + a\alpha + b\gamma^2) = 0.$$

Questa equazione è soddisfatta dalle due condizioni

$$\beta = 0, \quad b\alpha^2 + a\alpha + b\gamma^2 = 0.$$

La prima condizione, $\beta = 0$, esprime che la retta passa sempre per l'origine, ed in conseguenza descrive una superficie conica, mentre scorre sul lato superiore di uno dei cerchi e sull'inferiore dell'altro. L'equazione di questa superficie conica obliqua risulta dalle equazioni 4, 5, 6 colla condizione $\beta = 0$.

La seconda equazione

$$7. \quad b\alpha^2 + a\alpha + b\gamma^2 = 0$$

congiunta all'equazione 5 per eliminare γ , ci dà la relazione

$$8. \quad (b^2 - \beta^2) a\alpha = b (r^2 - a^2);$$

cosicchè si ha lo stesso risultamento, che si sarebbe ottenuto eliminando α , β , γ dalle equazioni 4, 7 ed 8. Or

prendendo i valori di α e γ dalle equazioni 4 ed introducendoli nell'equazione 7, si ottiene

$$\beta = \gamma + \frac{b(x^2 + z^2)}{ax}, \quad \alpha = -\frac{ax^2}{b(x^2 + z^2)};$$

i quali valori uniti all'equazione 8 danno

$$9. \quad [axy \pm b(x^2 + z^2)]^2 = b^2 r^2 x^2 + b^2 (r^2 - a^2) z^2.$$

La superficie ha dunque un centro e propriamente nell'origine, ed il piano xy è un piano diametrale.

Le proiezioni delle generatrici nel piano xy formano colle loro intersezioni una curva, la quale inviluppa tutte queste rette. L'equazione di questa curva si ottiene dall'equazione

$$x = \alpha (y - \beta),$$

la quale unita all'altra:

$$(b^2 - \beta^2) \alpha x = b(r^2 - a^2),$$

concede l'eliminazione di una delle variabili α e β . Eliminando α si ha la proiezione della retta mobile

$$10. \quad y - \beta = \frac{a(b^2 - \beta^2)}{b(r^2 - a^2)} x.$$

Or se, in conseguenza del n° 179, si differenzii questa equazione rispetto a β , e dalla relazione che ne risulta si elimini coll'aiuto dell'equazione 10 la variabile β , si otterrà

$$x^2 - \frac{(r^2 - a^2)}{ab} xy + \frac{(r^2 - a^2)^2}{4a^2} = 0,$$

vale a dire l'equazione dell'iperbole, di cui un assintoto coincide coll'asse delle y .

C. Proprietà generali delle curve.

208.

La tangente ed il piano normale.

La tangente di una curva C , siane semplice o doppia la curvatura, si proietterà sulla tangente alla proiezione della curva C , poichè la tangente e la sua proiezione non sono che limiti della secante e proiezione di essa (Vedi n° 168). Quindi se la curva C sia nota per le sue proiezioni

$$x = \varphi z, \quad y = \psi z,$$

la tangente ad essa nel punto x, y, z sarà rappresentata dalle equazioni

$$x_1 - x = \frac{d\varphi}{dz}(z_1 - z), \quad y_1 - y = \frac{d\psi}{dz}(z_1 - z),$$

$$\text{ovvero } x_1 - x = \frac{d\varphi}{dz}(z_1 - z), \quad y_1 - y = \frac{d\psi}{dz}(z_1 - z),$$

x_1, y_1, z_1 dinotando le sue coordinate correnti.

Ma se la curva C non sia data per mezzo delle sue proiezioni, ma dell' intersezione delle due superficie

$$2. \quad F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0;$$

allora supporremo che la secante alla curva, menata dal punto x, y, z al punto $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$, faccia cogli assi delle x, y, z gli angoli α, β, γ . Indicando per brevità con Δs la quantità $(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{1}{2}}$, avremo pel n° 183 rispetto agli angoli α, β, γ le equazioni

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta s}, \quad \cos \beta = \frac{\Delta y}{\Delta s}, \quad \cos \gamma = \frac{\Delta z}{\Delta s},$$

quindi
$$\frac{\cos \alpha}{\Delta x} = \frac{\cos \beta}{\Delta y} = \frac{\cos \gamma}{\Delta z}.$$

Ma se indichiamo con x_1, y_1, z_1 , le coordinate correnti della corda, troveremo ancora le relazioni

$$\frac{x_1 - x}{\cos \alpha} = \frac{y_1 - y}{\cos \beta} = \frac{z_1 - z}{\cos \gamma},$$

e perciò
$$\frac{x_1 - x}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{\Delta y} = \frac{z_1 - z}{\Delta z}.$$

Or se il punto $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ si avvicini al punto x, y, z fino a toccarlo, la secante diverrà tangente, ed indicando con x_1, y_1, z_1 le sue coordinate correnti e con α, β, γ gli angoli che esse formano cogli assi, per determinarne la posizione si avranno dalle equazioni precedenti le relazioni

3.
$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \cos \gamma = \frac{dz}{ds},$$

supponendo
$$ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}},$$

4.
$$\frac{\cos \alpha}{dx} = \frac{\cos \beta}{dy} = \frac{\cos \gamma}{dz},$$

5.
$$\frac{x_1 - x}{\cos \alpha} = \frac{y_1 - y}{\cos \beta} = \frac{z_1 - z}{\cos \gamma},$$

6.
$$\frac{x_1 - x}{dx} = \frac{y_1 - y}{dy} = \frac{z_1 - z}{dz}.$$

I valori di dx, dy, dz dovranno prendersi dalle equazioni 2. Or essendo

7.
$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0,$$

8.
$$\frac{dF_1}{dx} dx + \frac{dF_1}{dy} dy + \frac{dF_1}{dz} dz = 0,$$

si avranno dalle equazioni 4 le due relazioni

$$9. \quad \frac{dF}{dx} \cos \alpha + \frac{dF}{dy} \cos \beta + \frac{dF}{dz} \cos \gamma = 0,$$

$$10. \quad \frac{dF_1}{dx} \cos \alpha + \frac{dF_1}{dy} \cos \beta + \frac{dF_1}{dz} \cos \gamma = 0,$$

le quali congiunte alla nota equazione

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

faranno determinare gli angoli α , β , γ che la tangente forma cogli assi coordinati.

Finalmente dalle equazioni 5, 9, 10 si hanno le relazioni

$$11. \quad (x_1 - x) \frac{dF}{dx} + (y_1 - y) \frac{dF}{dy} + (z_1 - z) \frac{dF}{dz} = 0,$$

$$(x_1 - x) \frac{dF_1}{dx} + (y_1 - y) \frac{dF_1}{dy} + (z_1 - z) \frac{dF_1}{dz} = 0,$$

le quali, come in seguito apprenderemo, rappresentano i piani tangenti le superficie 2 nel punto x, y, z mentre x_1, y_1, z_1 , ne dinotano le coordinate correnti.

La curva C ha in ogni suo punto x, y, z una sola tangente, ma infinite normali che giacciono nel piano menato perpendicolarmente alla tangente. Questo piano dicesi piano normale, e la sua equazione è della forma

$$(x_1 - x)A + (y_1 - y)B + (z_1 - z)C = 0,$$

x_1, y_1, z_1 , indicando le coordinate correnti del piano. E poichè attesa la sua posizione rettangolare rispetto alla tangente si ha pel n° 186

$$\frac{A}{C} = \frac{dx}{dz}, \quad \frac{B}{C} = \frac{dy}{dz},$$

così l'equazione del piano normale sarà

$$12. \quad (x_1 - x) dx + (y_1 - y) dy + (z_1 - z) dz = 0.$$

Esempio 1. Sia da cercarsi la tangente alla curva risultante dall'intersezione del cono retto a base circolare

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2$$

col piano $Ax + By + Cz + D = 0$.

Dalle equazioni 10 ed 11 avremo per la determinazione della tangente

$$\begin{aligned} (x_1 - x)x + (y_1 - y)y &= a^2(z_1 - z)z, \\ (x_1 - x)A + (y_1 - y)B + (z_1 - z)C &= 0, \end{aligned}$$

ovvero, riducendo,

$$xx_1 + yy_1 = a^2 zz_1, Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0;$$

in conseguenza due piani, il primo dei quali passa per l'origine e (vedi n° 193) per una generatrice della superficie conica, ed il secondo coincide col piano della curva.

Per ottenere il piano normale si prenderanno i valori di dx e dy dalle equazioni differenziali della curva, e questi valori, cioè

$$dy = \frac{Aa^2z + Cx}{Ay - Bx} dz, \quad dx = - \frac{Ba^2z + Cy}{Ay - Bx} dz$$

s'introdurranno nell'equazione 12, la quale dietro tutte le riduzioni darà

$$C(xy_1 - x_1y) + (Ay_1 - Bx_1)a^2z + (Ay - Bx)(z_1 - z - a^2z) = 0.$$

Esempio 2. L'elica cilindrica, secondo l'esempio 2 del n° 189, è rappresentata dalle due equazioni

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{ar},$$

a cui potranno sostituirsi le tre altre

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = ar \varphi,$$

a indicando la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente alla curva forma colla generatrice della superficie cilindrica. In conseguenza delle equazioni 5 si avrà per la tangente alla curva:

$$-\frac{x_1-x}{\sin \varphi} = \frac{y_1-y}{\cos \varphi} = \frac{z_1-z}{a},$$

e dall'equazione 12 risulterà il piano normale

$$(x_1-x) \sin \varphi - (y_1-y) \cos \varphi - a(z_1-z) = 0.$$

209.

Piano e cerchio di curvatura.

Ogni piano, che passa per la tangente ad una curva, diviene piano tangente di essa. Se questo piano contenga le tangenti di due punti prossimi x, y, z ed $x+dx, y+dy, z+dz$, la sua posizione sarà definita, ed allora si dirà piano di curvatura o piano di osculazione della curva.

Or sia

$$1. \quad X(x_1-x) + Y(y_1-y) + Z(z_1-z) = 0$$

l'equazione del piano di curvatura della curva

$$2. \quad F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

x_1, y_1, z_1 disegnando le coordinate correnti del piano. Il quale essendo in conseguenza della sua definizione piano tangente della curva nei punti

$$x, y, z \text{ ed } x+dx, y+dy, z+dz,$$

risulterà nel tempo stesso dall'equazione 1 la relazione

$$3. \quad X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Or dall'equazioni 1 e 3 non potendosi eliminare che due dei tre coefficienti indeterminati X, Y, Z , ne segue che questo piano tangente ad un punto definito x, y, z , può prendere infinite posizioni diverse. Ma il piano di curvatura ha comuni colla curva due elementi di essa, vale a dire tre punti consecutivi, e come tale è tra tutti i piani

*

tangenti quello che più intimamente tocca la curva. Quindi le equazioni 1 e 3 valeranno per questo piano, quando in esse ad x , y , z si sostituiscano $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; dimodochè si avrà

$$4. \quad X d^2x + Y d^2y + Z d^2z = 0$$

Or dalle equazioni 1, 3 e 4 si avranno dei coefficienti X , Y , Z i valori

$$\begin{aligned} 5. \quad X &= dy d^2z - dz d^2y, \\ Y &= dz d^2x - dx d^2z, \\ Z &= dx d^2y - dy d^2x. \end{aligned}$$

Secondo l'equazione 12 del n° precedente il piano normale nel punto x , y , z ha per equazione

$$6. \quad (x_1 - x) dx + (y_1 - y) dy + (z_1 - z) dz = 0.$$

Ma l'equazione del piano normale al punto $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ si ottiene aggiungendo all'equazione 6 il suo differenziale rispetto a tutte le variabili; quindi per l'intersezione di questi due piani si avrà oltre l'equazione 6 anche l'equazione

$$7. \quad (x_1 - x) d^2x + (y_1 - y) d^2y + (z_1 - z) d^2z = 0.$$

Indicando inoltre con x_1 , y_1 , z_1 il punto in cui s'incontrano i tre piani 1, 6 e 7, si avranno dalle dette equazioni le coordinate $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, moltiplicando le equazioni 6 e 7 pei coefficienti indeterminati m ed n , e poi aggiungendole all'equazione 1: in questo modo si avrà

$$8. \quad (X + m dx + n d^2x)(x_1 - x) + (Y + m dy + n d^2y)(y_1 - y) + (Z + m dz + n d^2z)(z_1 - z) - nds^2 = 0,$$

$$\text{ponendo} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Dall'equazione 8 si avrà ciascuna delle tre coordinate, pareggiando a zero i fattori delle altre due a fine di determinare m ed n . Così per $z_1 - z$ si ha

$$X + m dx + n d^2 x = 0, \quad Y + m dy + n d^2 y = 0,$$

$$\text{quindi } n = \frac{X dy - Y dx}{dx d^2 y - dy d^2 x}, \quad m = \frac{Y d^2 x - X d^2 y}{dx d^2 y - dy d^2 x},$$

ovvero, considerando la terza delle equazioni 5,

$$n = \frac{X dy - Y dx}{Z}, \quad m = \frac{Y d^2 x - X d^2 y}{Z}.$$

Con ciò l'equazione 8 si trasforma in

$$(Z^2 + Y d^2 x dz - X d^2 y dz + X dy d^2 z - Y dx d^2 z)(z_1 - z) = ds^2 (X dy - Y dx),$$

ovvero, avendo in considerazione le equazioni 5,

$$9. \quad z_1 - z = \frac{X dy - Y dx}{X^2 + Y^2 + Z^2} ds^2.$$

Per analogia o per semplice scambio si avranno similmente

$$9. \quad y_1 - y = \frac{Z dx - X dz}{X^2 + Y^2 + Z^2} ds^2$$

$$x_1 - x = \frac{Y dz - Z dy}{X^2 + Y^2 + Z^2} ds^2.$$

Il suddetto punto x_1, y_1, z_1 è centro di un cerchio che ha comuni colla curva tre punti consecutivi, ossia due elementi lineari. Questi due elementi fissano esattamente la posizione del piano in cui giace il cerchio; il quale dice-si cerchio di curvatura o di osculazione della curva. Il suo raggio ρ è dato dall'equazione

$$10. \quad \rho^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2,$$

ovvero, avendo riguardo alle equazioni 9 e 3, dall'equazione

$$11. \quad \rho = \pm \frac{ds^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'equazione 10 prende un'altra forma, quando si considera che

$Xdy - Ydx = d^2z(dx^2 + dy^2) - dz(dx d^2x + dy d^2y)$,
ovvero, introducendo in quest' ultima $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
ed il suo differenziale

$$ds d^2s = dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z,$$

$$Xdy - Ydx = d^2z(ds^2 - dz^2) - dz(ds d^2s - dz d^2z),$$

vale a dire $Xdy - Ydx = ds^2 d \frac{dz}{ds}.$

Quindi dall' equazione 11 e dalla prima 9 si ha la relazione

$$z_1 - z = \rho^2 \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds},$$

e similmente rispetto ad $y_1 - y$ ed $x_1 - x$

$$y_1 - y = \rho^2 \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad x_1 - x = \rho^2 \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds};$$

dimodochè per mezzo di questi valori si avrà dall' equazione 10

$$\frac{1}{\rho} = \pm \left[\left\{ d \frac{dx}{ds} \right\}^2 + \left\{ d \frac{dy}{ds} \right\}^2 + \left\{ d \frac{dz}{ds} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} : ds.$$

Se in fine si dinotino con λ , μ , ν gli angoli che il raggio di curvatura forma cogli assi coordinati, si avrà

$$\cos \lambda = \frac{x_1 - x}{\rho}, \quad \cos \mu = \frac{y_1 - y}{\rho}, \quad \cos \nu = \frac{z_1 - z}{\rho},$$

ovvero

$$12. \quad \cos \lambda = \pm \rho \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos \mu = \pm \rho \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos \nu = \pm \rho \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds}.$$

210.

Gli archi delle curve.

L' espressione adoperata nei due n° precedenti

$$1. \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

appartiene al differenziale ds dell' arco s di una curva a doppia curvatura. Imperocchè indicando con

$$x, y, z \text{ ed } x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$$

le coordinate dei punti estremi di una corda di essa, si avrà secondo il n° 183 per la loro distanza Δs la relazione

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Or se la corda facciasi girare intorno al punto x, y, z in modo che il secondo punto vada a coincidere col punto immediatamente consecutivo al primo, le differenze $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ delle coordinate si trasformeranno in dx, dy, dz e Δs in ds , finchè le equazioni della curva rappresenteranno funzioni continue, dimodochè dall' ultima equazione risulterà immediatamente l' equazione 1.

Da questa stessa equazione 1 si ha

$$ds = \pm (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{ovvero } ds = \pm dx \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

cosicchè l' arco avrà il segno $+$, quando cresce o diminuisce insieme ad x , ed all' opposto il segno $-$, quando le variazioni di s ed x procedono in senso contrario.

Esempio 1. In conseguenza dell' esempio 3 n° 189 sono per $r = \sin v$

$$x = r \cos u, y = r \sin u, z = \cos v$$

le coordinate polari della lossodromica, la cui equazione si è trovato essere

$$-\frac{dv}{\sin v} = \cot \alpha. du.$$

Ma dalle equazioni delle coordinate risultano per $dx, dy,$

dalle relazioni

$$dx = r \cos u - r du \sin u, \quad dy = r \sin u + r du \cos u,$$

$$dz = -dv \sin v = -rdv \quad \text{e} \quad dr = dv \cos v;$$

quindi secondo l'equazione 1 si avrà

$$ds^2 = dr^2 + r^2 du^2 + r^2 dv^2 = dv^2 + \sec^2 v du^2,$$

ovvero $ds = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) dv$, ed in conseguenza $ds = -\frac{dv}{\cos \alpha}$,

essendo che s aumenta mentre v diminuisce. Quindi si ottiene

$$s = -\frac{v}{\cos \alpha} + C.$$

Laonde se pongasi $\frac{\pi}{2} - \varphi$ in vece di v , e s' integri da φ_1 a φ_2 , si avrà per espressione dell' arco

$$s = (\varphi_2 - \varphi_1) \sec \alpha,$$

ovvero, indicando con R il raggio della sfera,

$$s = R (\varphi_2 - \varphi_1) \sec \alpha.$$

Esempio 2. Dalle equazioni dell' elica cilindrica (Vedi n° 208) si dedurrà facilmente

$$ds = (1 + a^2)^{\frac{1}{2}} r d\varphi, \quad \text{e} \quad \rho = (1 + a^2) r;$$

il raggio di curvatura è dunque costante. Inoltre si ha in conseguenza delle equazioni 9

$$x_1 = -a^2 r \cos \varphi, \quad y_1 = -a^2 r \sin \varphi, \quad z_1 = z = a r \varphi;$$

i centri dunque dei cerchi di curvatura stanno sopra una nuova elica, che ha lo stesso asse della prima e giace sopra un cilindro di raggio $a^2 r$.

D. Proprietà generali delle superficie.

211.

Il piano tangente.

Quando è data l'equazione di una superficie riferita a coordinate polari, si potrà sempre riguardar due di esse, per esempio x ed y , come indipendenti, dimodochè z sarà una funzione delle altre due, e se ne potrà esprimere il differenziale totale dz per mezzo delle derivate parziali p e q di primo ordine sotto la forma

$$dz = p dx + q dy.$$

Or s'immagini disegnata sulla superficie una curva, che passi pel punto x, y, z di essa; la proiezione $y = \varphi x$ di essa curva sul piano xy dimostra che per ogni punto di essa avvi una relazione tra x ed y , e quindi tra dx e dy , dimodochè si potrà porre

$$dy = y' dx, \quad dz = (p + qy') dx,$$

essendo $y' = \frac{dy}{dx} = \varphi' x$. Siano inoltre x_1, y_1, z_1 le coordinate correnti della tangente alla curva nel punto x, y, z ; dimodochè secondo l'equazione 1 n° 208 apparterranno a questa retta le equazioni

$$y_1 - y = y' (x_1 - x), \quad z_1 - z = (p + qy') (x_1 - x).$$

Da queste equazioni si potrà eliminare la funzione y' , dalla quale dipende la natura della curva, e l'equazione risultante rappresenterà la superficie, luogo delle tangenti a tutte le curve che passano pel punto x, y, z . Questa equazione essendo

$$1. \quad z_1 - z = p (x_1 - x) + q (y_1 - y),$$

e quindi di primo grado rispetto alle coordinate correnti

x_1, y_1, z_1 , dimostra che le tangenti a tutte le curve che giacciono sulla superficie s'intersecano nel punto x, y, z , si trovano in un piano, ch'è il piano tangente al punto x, y, z .

In questo sviluppo è sottinteso che l'indicato punto della superficie sia semplice, vale a dire che il punto sia semplice rispetto ad ogni curva per esso condotta.

Del resto la superficie può estendersi intorno al punto di contatto da un lato soltanto del piano tangente, come avviene nell'ellissoide o la paraboloide ellittica, o pure il piano tangente può tagliare la superficie, e propriamente in un punto o in una linea, come nella superficie conica o nell'iperboloide semplice.

Se la superficie è rappresentata dall'equazione $F(x, y, z) = 0$, l'equazione 1 assumerà la forma più generale

$$2. \quad (x_1 - x) \frac{dF}{dx} + (y_1 - y) \frac{dF}{dy} + (z_1 - z) \frac{dF}{dz} = 0.$$

Immaginiamo la normale al piano tangente, vale a dire la perpendicolare a questo piano menata pel punto di contatto. Ogni piano condotto per la normale sarà un piano normale, e sarà sezione normale ogni sezione fatta da piano normale, in opposizione ad ogni altra sezione, denominata sezione obliqua. Dalle equazioni 1 e 2 risultano quelle della normale, cioè:

$$3. \quad \frac{x_1 - x}{p} = \frac{y_1 - y}{q} = -(z_1 - z),$$

ovvero

$$4. \quad (x_1 - x) : \frac{dF}{dx} = (y_1 - y) : \frac{dF}{dy} = (z_1 - z) : \frac{dF}{dz}.$$

Inoltre sia essa inclinata agli assi delle x, y, z sotto gli angoli λ, μ, ν ; ne risulterà pel n° 186

$$\cos \lambda = \frac{\pm p}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \mu = \frac{\pm q}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$5. \quad \cos \nu = \frac{\pm 1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}},$$

od anche , ponendo

$$\left\{ \frac{dF}{dx} \right\}^2 + \left\{ \frac{dF}{dy} \right\}^2 + \left\{ \frac{dF}{dz} \right\}^2 = R^2,$$

$$6. \quad \cos \lambda = \frac{1}{R} \cdot \frac{dF}{dx}, \quad \cos \mu = \frac{1}{R} \cdot \frac{dF}{dy}, \quad \cos \nu = \frac{1}{R} \cdot \frac{dF}{dz}.$$

È chiaro inoltre che λ , μ , ν disegneranno ancora gli angoli che i piani yz , xz , xy formano col piano tangente.

Esempio 1. Dall'equazione della superficie sferica, il cui centro è nell'origine,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

risulta pel piano tangente, a norma dell'equazione 2,

$$(x_1 - x)x + (y_1 - y)y + (z_1 - z)z = 0,$$

$$\text{ovvero} \quad x_1 x + y_1 y + z_1 z = r^2.$$

Or considerando nella prima di queste due equazioni le quantità x_1 , y_1 , z_1 come costanti, essa esprimerà una nuova superficie sferica, il cui diametro sarà eguale alla distanza del punto x_1 , y_1 , z_1 dall'origine. La seconda equazione poi esprime nella stessa ipotesi un piano che taglia le due superficie secondo un medesimo cerchio. Questo cerchio è il luogo geometrico di tutti i piani tangenti menati pel punto x_1 , y_1 , z_1 .

Dalle equazioni 4 poi si ha per la normale

$$\frac{x_1 - x}{x} = \frac{y_1 - y}{y} = \frac{z_1 - z}{z},$$

$$\text{ovvero} \quad \frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z};$$

equazioni che rappresentano una retta, la quale passa sempre per l'origine comunque possa variare la posizione del punto x , y , z .

Esempio 2. L'equazione dell'iperboloide semplice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dà per equazione del piano tangente

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} - \frac{z_1 z}{c^2} = 1,$$

e come equazione della normale ,

$$\frac{a^2(x_1 - x)}{x} = \frac{b^2(y_1 - y)}{y} = -\frac{c^2(z_1 - z)}{z},$$

e ciò a norma delle equazioni 2 e 4.

Or supponendo costanti x_1 , y_1 , z_1 nell'equazione del piano tangente, essa rappresenterà un nuovo piano che taglia l'iperboloide secondo una curva, che sarà il luogo di tutti i piani tangenti che passano pel punto x_1 , y_1 , z_1 . E nello stesso modo si dimostrerà agevolmente che qualsiasi superficie di 2° grado sarà toccata in una curva piana da tutti i piani ad essa tangenti, che passano per un punto fisso x_1 , y_1 , z_1 .

Volendosi conoscere se il piano tangente tagli l'iperboloide, bisognerà cercare se le variabili x , y , z possano ammettere più sistemi di valori reali che nel tempo stesso rendano soddisfatte le equazioni della superficie e quella del piano tangente, vale a dire le equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} - \frac{z_1 z}{c^2} = 1.$$

Or componendo queste due equazioni con quella della superficie ne risulta

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\} \left\{ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right\} - \left\{ \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} \right\}^2 \\ & = \left\{ 1 + \frac{z^2}{c^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{z_1^2}{c^2} \right\} - \left\{ 1 + \frac{z_1 z}{c^2} \right\}^2, \end{aligned}$$

ovvero riducendo ,

$$\left\{ \frac{x_1 x - y_1 y}{ab} \right\}^2 = \left\{ \frac{z_1 - z}{c} \right\}^2 ;$$

equazione che si risolve nelle due ,

$$\frac{x_1 x - y_1 y}{ab} = \frac{z_1 - z}{c} , \quad \frac{x_1 x - y_1 y}{ab} = - \frac{z_1 - z}{c} .$$

E queste due equazioni unite all'altra ,

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} - \frac{z_1 z}{c^2} = 1 ,$$

esprimono due rette che giacciono sull'iperboloide e s'incontrano nel punto x, y, z di questa superficie. Si potrà riguardare la superficie come prodotta per mezzo di queste due rette, essendochè in ogni punto di essa dovranno intersecarsi due rette.

Le stesse considerazioni potranno agevolmente estendersi all'iperboloide doppia ed all'ellissoide, od anche ad ogni altra superficie, e così troveremo che il piano tangente non può intersecare nè l'iperboloide doppia, nè l'ellissoide.

212.

La curvatura delle superficie.

La curvatura in un dato punto di una linea è misurata dall'arco del circolo osculatore, il quale in quel punto ha comuni colla linea due elementi. Ma non si potrà similmente determinare coll'aiuto di una sfera la curvatura di una superficie, imperocchè la curvatura della prima è uniforme intorno ad una normale, mentre quella della seconda è diversa e talvolta in senso opposto, essendovi delle superficie che sono intersecate dai loro piani tangenti. Or per comparare queste diverse curvature di una superficie intorno alla normale, immagineremo condotte per l'estremo di questa delle curve qualunque che siano giacenti nella superficie. Sia

$$1. \quad z = f(x, y)$$

l'equazione della superficie, M il punto comune x, y, z delle curve di questa superficie; s l'arco di una di esse curve C , ρ_1 il suo raggio di curvatura nel punto M, e ρ quello della sezione normale che contiene la tangente alla curva C nel punto M. L'angolo v formato dai raggi ρ e ρ_1 sarà dato dall'equazione

$$2. \quad \cos v = \cos(\rho, x)\cos(\rho_1, x) + \cos(\rho, y)\cos(\rho_1, y) + \cos(\rho, z)\cos(\rho_1, z),$$

indicando con (ρ, x) e (ρ_1, x) , (ρ, y) e (ρ_1, y) , (ρ, z) e (ρ_1, z) gli angoli che i raggi ρ e ρ_1 formano cogli assi delle x, y, z .

Or essendo la normale perpendicolare al piano tangente

$$z - z_1 = p(x - x_1) + q(y - y_1),$$

si avrà, come si è dimostrato nel n° precedente e ponendo $P = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\cos(\rho, x) = \pm \frac{p}{P}, \quad \cos(\rho, y) = \pm \frac{q}{P}, \quad \cos(\rho, z) = \mp \frac{1}{P}.$$

Nel tempo stesso rispetto agli angoli che ρ_1 forma cogli assi coordinati, a norma dell'equazione 12 n° 209 avranno luogo le relazioni

$$\begin{aligned} \cos(\rho_1, x) &= \pm \rho_1 \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}, & \cos(\rho_1, y) &= \pm \rho_1 \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}, \\ \cos(\rho_1, z) &= \pm \rho_1 \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds}. \end{aligned}$$

Mercè queste relazioni avremo rispetto a $\cos v$ dall'equazione 2 il valore

$$3. \quad \cos v = \pm \frac{\rho_1}{P} \left\{ p \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} + q \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} - \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} \right\}.$$

Ma indicando con x', y', z' le derivate prime e con x'', y'', z'' , le derivate seconde di x, y, z rispetto ad s qual variabile indipendente, ne risulta

$$z' = px' + qy'$$

$$4. \quad z'' = px'' + qy'' + rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2,$$

e per l'equazione 3 si ha

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} = x'', \quad \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} = y'', \quad \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} = z'';$$

quindi avendo riguardo all'equazione 4 e senza por mente ai segni, si avrà

$$5. \quad \cos v = \rho_1 \frac{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or le derivate x', y', z' , facendo astrazione dai segni, esprimono nel tempo stesso i coseni degli angoli che la tangente alla linea, il cui raggio di curvatura è ρ_1 , forma cogli assi coordinati. Se dunque taglisi la superficie secondo una curva qualunque C , la quale passando pel punto M ivi abbia la stessa tangente, il fattore di ρ_1 , resterà costante; e perciò potremo porre $\rho_1 = K \cos v$, K disegnando un numero costante per tutte le curve che nel loro punto comune M hanno una stessa tangente. Laonde se v è nullo, sarà $\rho_1 = \rho$, quindi $\rho = K$, e

$$6. \quad \rho_1 = \rho \cos v, \quad \rho = \frac{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}.$$

Laonde il raggio di curvatura di una linea giacente sopra una superficie, dipende dalla curva della sezione normale che ha la medesima tangente e dall'angolo v . Se la prima curva è piana, essa costituisce la sezione obliqua, ed allora ρ_1 è la proiezione di ρ .

Per semplificare questa ricerca poniamo il piano xy pa-

parallelo al piano tangente nel punto M, ossia x, y, z ; ne verrà $p = 0, q = 0$ e la seconda delle equazioni 6 si cangerà in

$$7. \quad \rho = \frac{1}{rx'^2 + 2sxy' + ty'^2}.$$

Or indicando con φ l'angolo che la sezione normale forma con un piano che passando per la normale sia parallelo al piano zx , si avrà

$$x' = \cos \varphi, \quad y' = \sin \varphi,$$

$$e \quad \rho = \frac{1}{r \cos^2 \varphi + 2s \sin \varphi \cos \varphi + t \sin^2 \varphi},$$

ovvero, ponendo per brevità $\tan \varphi = \alpha$,

$$8. \quad \rho = \frac{1 + \alpha^2}{r + 2s\alpha + t\alpha^2}.$$

Il valore di ρ cangerà con quello dell'angolo φ ; e per ottenere il valore massimo o minimo di ρ , farà d'uopo in

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{2[sx^2 + (r-t)\alpha - s]}{[r + 2s\alpha + t\alpha^2]^2}$$

pareggiare il numeratore a zero. Così si ottiene

$$\alpha^2 + \frac{r-t}{s} \alpha - 1 = 0 \text{ ed}$$

$$9. \quad \alpha = -\frac{r-t}{2s} \pm \frac{[ts^2 + (r-t)^2]^{\frac{1}{2}}}{2s}.$$

Questo valore, ch'è sempre reale, dimostra:

1) che in ogni superficie, per la quale le derivate parziali p, q, r, s, t non prendano valori singolari, vale a dire per ogni punto semplice della superficie, si hanno due sezioni principali, rispetto alle quali il raggio di curvatura prende il valore massimo o minimo;

2) che i piani di queste sezioni s'incontrano ad angolo retto, essendo -1 il prodotto delle due radici α .

Dall' equazione 8 si può ancora conoscere, se tutte le sezioni normali fatte intorno al punto M, siano o no convesse. Imperocchè pareggiandone a zero il denominatore, ossia

$$10. \quad t\alpha^2 + 2sa + r = 0,$$

$$\text{si ha} \quad \alpha = - \frac{s \pm (s^2 - rt)^{\frac{1}{2}}}{t}.$$

Or se sia $s^2 - rt < 0$, il denominatore dell' equazione 8 ed in conseguenza ρ non muteranno di segno; quindi la superficie giacerà da un solo lato del piano tangente, vale a dire che la superficie sarà convessa.

Se poi sia $s^2 - rt > 0$, ρ diverrà infinito per ciascuna radice dell' equazione 10, e quindi in vicinanza di questo valore avrà segno opposto. La superficie ammetterà dunque sezioni normali, di cui l' una si troverà da un lato e l' altra dall' altro lato del piano tangente in M. La superficie non sarà dunque convessa; così è quella della conoide, rispetto alla quale pel n° 206 si ha

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0,$$

$$\text{ovvero} \quad (qr - ps)^2 + p^2(rt - s^2) = 0,$$

e perciò $rt - s^2$ dovrà esser sempre quantità negativa.

Se in fine sia $s^2 - rt = 0$, vi sarà un solo valore infinito pel raggio di curvatura. Per una sola direzione la curvatura sarà dunque nulla, e per le altre la superficie sarà convessa. Questa condizione dimostra che la superficie è sviluppabile.

Conduciamo ora i piani xz ed yz parallelamente alle sezioni principali, lasciandone il sito tuttavia arbitrario. Con ciò una delle radici dell' equazione 9 diverrà nulla, e l' altra infinita, o ciò ch' è lo stesso, sarà $s = 0$, ed in conseguenza ρ prenderà a norma dell' equazione 8 il valore

$$11. \quad \rho = \frac{1}{r \cos^2 \varphi + t \sin^2 \varphi}.$$

Se dunque indichiamo con R_1, R_2 i raggi di curvatura delle sezioni principali, sarà per uno di essi $\sin \varphi = 0$, e per l'altro $\cos \varphi = 0$; quindi

$$R_1 = \frac{1}{r}, \quad R_2 = \frac{1}{t},$$

e' pel raggio di curvatura ρ di qualunque sezione normale si avrà

$$12. \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi.$$

Siano inoltre ρ_1, ρ_2 , i raggi di curvatura di due sezioni normali, inclinate tra loro ad angolo retto, e che stiano comunque rispetto alla sezione che ha per raggio di curvatura R_1 o R_2 . Risulterà dall'equazione 12 la semplicissima relazione

$$13. \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = r + t.$$

Supponiamo in fine che per la normale siano condotte n sezioni normali, che dividano tutto lo spazio intorno in $2n$ angoli eguali, ciascuno del valore $\frac{\pi}{n}$: si avrà secondo l'equazione 12 per la somma dei raggi reciproci di curvatura $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ di queste sezioni la relazione

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_n} = \frac{1}{R_1} \sum \cos^2 \frac{m\pi}{n} + \frac{1}{R_2} \sum \sin^2 \frac{m\pi}{n},$$

i valori di m estendendosi da $m = 1$ fino ad $m = n$. E scambiando l'angolo $\frac{m\pi}{n}$ col doppio $\frac{2m\pi}{n}$, si avrà dall'ultima equazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_n} &= \frac{n}{2} \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right\} \sum \cos \frac{2m\pi}{n}. \end{aligned}$$

Ma la somma dei coseni, $\cos \frac{2m\pi}{n}$, estesa da $m = 1$ fino ad $m = n$ essendo nulla, come si troverà facilmente ponendo

$$\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \cos \frac{6\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{n} = S$$

e moltiplicando i due membri per $2 \sin \frac{\pi}{n}$; si avrà

$$14. \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_n} = \frac{n}{2} \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_n} \right\},$$

vale a dire che la massima e minima curvatura delle sezioni normali formano una media aritmetica di tutte le curvature.

213.

Superficie dei corpi.

Sia $z = f(x, y)$ l'equazione di una superficie qualunque. Nelle distanze $x = a$ ed $x = A$ si conducano due piani paralleli al piano yz , e due altri al piano xz nelle distanze $y = b$ ed $y = B$. Calcolare la superficie F definita da questi quattro piani è ciò che dicesi quadrare la superficie.

Or accrescendo di dx la x appartenente alla figura quadrilatera F , questa varierà del suo differenziale parziale rispetto ad x , vale a dire di $\frac{dF}{dx} dx$. E se inoltre y si accresca di dy , il differenziale parziale rispetto ad x verrà ad alterarsi di $\frac{d^2F}{dx dy} dx dy$. Or questo differenziale parziale del 2° ordine potendosi esprimere in x ed y , vale a dire potendosi ottenere un'equazione

$$\frac{d^2F}{dx dy} = \varphi(x, y),$$

ne segue che l'integrale

*

$$\int \varphi(x, y) dy = \psi(x, y),$$

preso rispetto ad y e tra i limiti b e B , ci darà la derivata $\frac{dF}{dx}$, e che l' integrale rispetto ad x tra i limiti a ed A ,

$$\int \frac{dF}{dx} dx = \int \psi(x, y) dx,$$

ci darà il valore di F tra i mentovati piani paralleli, ovvero

$$1. \quad \int \int \varphi(x, y) dx dy = F,$$

equazione, in cui l' ordine dell' integrazione può esser mutato, essendo y indipendente da x .

Per trovare il valore di $\frac{d^2F}{dx dy}$ è da osservarsi che $\frac{d^2F}{dx dy} dx dy$ rappresenta una figura quadrilatera, la quale si avvicinerà tanto più ad un quadrilatero rettilineo, per quanto saranno minori dx e dy , e che la proiezione di questa superficie sul piano xy è rappresentata dal rettangolo $dx dy$. Ma la superficie della proiezione di una figura rettilinea è misurata dal prodotto di essa figura pel coseno dell' angolo di sua inclinazione al piano di proiezione; quindi chiamando α l' angolo del piano tangente la superficie nel punto x, y, z , si avrà

$$dx dy = \frac{d^2F}{dx dy} dx dy \cos \alpha,$$

$$\text{dove} \quad 1 = \varphi(x, y) \cos \alpha.$$

Ed in fine, avendosi per $\cos \alpha$, secondo il n° 211, la relazione

$$\cos \alpha = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ essendo } p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy},$$

si avrà dall' equazione 1:

$$2. \quad F = \int \int (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

Se una curva piana giri intorno ad una retta giacente nel suo piano, e che sia tolta ad asse delle x , la superficie che sarà così generata e che si troverà giacere tra due piani paralleli, $x = a$, $x = A$, potrà determinarsi nel seguente modo. Ogni punto x, y della curva rotante, $y = fx$, descrive una circonferenza il cui piano è perpendicolare all'asse delle x , ed ha per raggio y . Tra il piano di questo cerchio ed un altro ad esso parallelo ed infinitamente vicino, trovasi una sottile striscia della superficie, la quale può riguardarsi qual superficie laterale di un cono retto troncato, e che, dinotando dx la distanza dei piani paralleli, sarà espressa da

$$\pi(y + y + dy) ds = 2\pi y ds, \text{ essendo } ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Si avrà dunque della superficie compresa tra i piani $x = a$ $x = A$ l'espressione

$$3. \quad F = 2\pi \int y ds.$$

Esempio 1. Dall'equazione della superficie sferica $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ si ha ad uso dell'equazione, 2

$$\frac{dz}{dx} = p = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = q = -\frac{y}{z},$$

quindi

$$F = r \iint \frac{dx dy}{(r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} = r \int dx \left\{ \arcsen \frac{y}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\},$$

e prendendo questo integrale da $y = 0$ ad $y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, si ha

$$F = r \frac{\pi}{2} \int dx = \frac{1}{2} \pi r x + C.$$

Ponendo che l'integrale debba annullarsi per $x = 0$, sarà $C = 0$, ed

$$F = \frac{1}{2} \pi r x.$$

Questo valore esprime la quarta parte della zona che giace dal medesimo lato dell'asse delle x , ed ha l'altezza x , quindi sarà $2\pi r x$ la superficie dell'intera zona, e $4\pi r^2$ quella di tutta la sfera.

Esempio 2. La superficie conica

$$a^2(x^2 + y^2) = r^2(a - z)^2$$

$$\text{dà } p = -\frac{ax}{r(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad q = -\frac{ay}{r(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}};$$

in conseguenza

$$F = \frac{1}{r}(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \iint dx dy = \frac{1}{r}(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \int y dx.$$

Estendendo l'integrale da $y=0$ fino ad $y=(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, e ponendo per brevità $(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} = h$, si ha

$$F = \frac{h}{r} \int (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{hr}{2r} (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{hr}{2} \arcsen \frac{x}{r} + C.$$

Questa superficie giace tra due piani paralleli, l'uno dei quali passa per l'asse del cono, l'altro ne dista di x . Se la superficie deve annullarsi con $x=0$, estendendo l'integrale fino ad $x=r$ si avrà la quarta parte della superficie conica, cioè

$$F = hr \frac{\pi}{4}.$$

Esempio 3. Cercasi la superficie di un cilindro $r^2 = x^2 + y^2$, terminata dal cerchio di base e da un piano condotto per l'asse delle y , $z = ax$. In questo modo l'elemento $\frac{d^2F}{dx dy} dx dy$

della superficie proiettasi sull'arco $ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ del cerchio di base e la somma delle strisce $z ds$ rappresenterà la superficie, se prendasi z tra il cerchio di base ed il limite definito dal piano, cosicchè sarà

$$F = \int z ds = ar \int \frac{x dx}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -2ar(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Or integrando tra $x = 0$ ed $x = r$, si ottiene

$$F = 2ar^2$$

Esempio 4. Cerchiamo la porzione di superficie della sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

compresa nella superficie cilindrica

$$x^2 - rx + z^2 = 0.$$

Per l'esempio 1 si ha

$$F = r \int dx \arcsen \frac{y}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le equazioni delle superficie danno $y^2 = r^2 - rx$; quindi l'integrale è da prendersi da $y = (r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}$ fino ad $y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, perciò

$$F = r \int dx \left[\frac{\pi}{2} - \arcsen \left\{ \frac{r}{r+x} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] = r \int dx \arccos \left\{ \frac{r}{r+x} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ma ponendo $\arccos \left\{ \frac{r}{r+x} \right\}^{\frac{1}{2}} = u$, si ha

$$\int u dx = ux - \int x du;$$

e poichè $\frac{r}{r+x} = \cos^2 u$, quindi $x = r \operatorname{tg}^2 u = r \left\{ \frac{1}{\cos^2 u} - 1 \right\}$,

così $\int u dx = ux - r \operatorname{tg} u + ru + C.$

E se l'integrale estendasi da $x = 0$ ad $x = r$, si avrà

$$F = \left\{ \frac{\pi}{2} - 1 \right\} r^2.$$

Questa parte della superficie sferica giace dentro il cilindro

dal lato delle y e z positive. Lo stesso valore si avrà dal lato negativo delle y .

Per trovare poi la superficie tagliata sul cilindro dalla sfera, è d'uopo osservare che la proiezione dell'elemento di questa superficie è l'arco ds del cerchio $x^2 - rx + z^2 = 0$, e che in conseguenza la superficie stessa avrà per espressione

$$F = \int y ds.$$

Ma $ds = \frac{r}{2} \cdot \frac{dx}{(rx - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, ed $y = (r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}$,

quindi, estendendo l'integrale da $x=0$ ad $x=r$, si otterrà

$$F = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{2} \int_0^r \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = r^2,$$

ed in conseguenza $4r^2$ sarà tutta la porzione di superficie cilindrica intersecata dalla sfera.

Esempio 3. Sia da determinarsi la porzione AMB (Fig. 41) di una volta a cupola intersecata dalle semi-ellissi AMC, BMD e che poggia sul parallelogrammo ABCD.

Pongasi nel centro P del parallelogrammo l'origine delle coordinate, in PM l'asse delle z , e nella PG perpendicolare ad AB l'asse delle x , e si consideri che la superficie AMB è tagliata dal piano MPG in un quadrante ellittico rappresentato dall'equazione

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1:$$

dimodochè per la sezione agp , parallela al piano ABCD e nella distanza $Pp = z$, si avrà

$$gp = x = \frac{a}{c}(c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

e per l'angolo $APC = \alpha$ nel triangolo APG si avrà la relazione

$$AG = PG \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha.$$

Ma poichè $\frac{ag}{pg} = \frac{AG}{PG}$, sarà $ag = x \operatorname{tg} \alpha$, e la superficie AMG sarà espressa da

$$F = \int ag \cdot ds = \operatorname{tg} \alpha \int x \, ds.$$

Or si ha

$$ds = \left\{ \frac{c^4 - (c^2 - a^2)z^2}{c^2(c^2 - z^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} dz = \frac{(c^2 - e^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}{(c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} dx, \text{ essendo } e^2 c^2 = c^2 - a^2;$$

$$\text{quindi} \quad F = \frac{a}{c} \operatorname{tg} \alpha \int (c^2 - e^2 z^2)^{\frac{1}{2}} dz,$$

ovvero

$$F = \frac{a}{c} \operatorname{tg} \alpha \left\{ \frac{\pi}{2} (c^2 - e^2 z^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{c^2}{2e} \operatorname{arcsen} \frac{ez}{c} \right\},$$

e per $z = 0$ e $z = c$, essendo $AG = a \operatorname{tg} \alpha$:

$$F = AG \cdot \frac{c}{2} \left\{ \sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{e} \operatorname{arcsen} e \right\},$$

$$\text{quindi} \quad AMB = AB \cdot \frac{c}{2} \left\{ \sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{e} \operatorname{arcsen} e \right\}.$$

Si troverà facilmente che nell'ipotesi di $a > c$ la seconda parte dell'integrale diviene una funzione logaritmica di z , nota per l'equazione 6 del n° 58.

Esempio 6. Rotando intorno all'asse delle x l'ellisse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

ed essendo $ds = \left\{ \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} dx$, si avrà

$$F = \frac{2\pi b}{a^2} \int [a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Essendo $a > b$, pongasi $a^2 - b^2 = a^2 e^2$; ed integrando da $x = 0$, si avrà

$$F = \frac{2\pi b}{a} \int_0^x (a^2 - e^2 x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi b}{a} \left\{ x(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{e} \operatorname{arcsen} \frac{ex}{a} \right\}.$$

E ponendo il limite superiore $x = a$, si avrà dall'ultima espressione la superficie della semi-ellissoide di rotazione,

$$\pi b^2 + \frac{\pi ab}{e} \operatorname{arc sen} e.$$

Se poi fosse $b > a$, si farebbe $b^2 - a^2 = b'^2 e^2$; e quindi risulterebbe la superficie

$$F = \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x (a^4 + b^2 e^2 x^2)^{\frac{1}{2}} dx,$$

ovvero

$$F = \frac{\pi b}{a^2} \left\{ x(a^4 + b^2 e^2 x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^4}{b} \operatorname{arcsen} \frac{be x + (a^4 + b^2 e^2 x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2} \right\},$$

e quindi la superficie della semi-ellissoide

$$\pi b^2 + \frac{\pi a^2}{e} \operatorname{arcsen} \frac{be + b}{a}.$$

Ma se pongasi $a = b$, risulterà in entrambi i casi $F = 2\pi a^2$, vale a dire la superficie dell'emisfera.

Esempio 7. Giri il cerchio

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

intorno all'asse delle x : si ha

$$F = 2\pi \int (b \mp [r^2 - (x - a)^2]^{\frac{1}{2}}) ds,$$

ovvero
$$F = 2\pi (\int b ds \mp \int r dx).$$

Servirà il segno superiore o l'inferiore, secondochè il semicerchio è convesso o concavo verso l'asse delle x . Per la prima superficie si ha $2\pi(bs - rx + C)$, e per la seconda $2\pi(bs + rx + C)$.

Prendendo l'una e l'altra superficie tra i limiti $x = a - r$,

$x = a + r$, si hanno

$$2br\pi^2 - 4r^2\pi \text{ e } 2br\pi^2 + 4r^2\pi,$$

dimodochè l'intera superficie dell'anello verrà espressa da $4br\pi^2$.

214.

Volume dei solidi.

Se pel contorno dell'elemento di superficie $\frac{d^2F}{dxdy}dxdy$, considerato nel n° 213, si trasporti l'ordinata z , verrà così a descriversi la superficie laterale di una colonna che ha per base $dxdy$, e finisce nell'indicato elemento di superficie. I volumi delle colonne terminate dalla superficie F e $\frac{d^2F}{dxdy}dxdy$ siano disegnati da S e $\frac{d^2S}{dxdy}dxdy$. Or il solido $\frac{d^2S}{dxdy}dxdy$ può esser riguardato come un prisma avente la base $dxdy$ e l'altezza z ; quindi sarà

$$\frac{d^2S}{dxdy}dxdy = z dxdy,$$

donde per mezzo d'integrazione risulterà

$$1. \quad S = \int \int z dxdy.$$

L'integrale $\int z dy$ disegna una superficie piana, parallela al piano yz e da questo distante di x . Quindi l'integrale, in cui z dinota una funzione di x ed y , dovrà prendersi tra quei limiti che rappresentano y qual funzione di x , dimodochè l'integrale stesso si mostri funzione di x . È inoltre $\int z dy dx$ il volume di un prisma che sulla base $\int z dy$ si eleva della quantità dx . L'integrale di questa espressione, ch'è da prendersi tra i limiti convenienti alla variabile x , ricondurrà all'equazione 1.

L'estensione di una superficie parallela al piano yz e da questo distante di x , potendosi rappresentare qual funzione Fx della distanza x da un punto fisso, si avrà immediatamente pel solido, terminato dai piani $x=a$ ed $x=A$, l'espressione

$$2. \quad S = \int_a^A Fx dx.$$

Girando, per esempio, la curva $y = fx$ intorno all'asse delle x , verrà a definirsi uno spazio il quale da ogni piano $x=a$, parallelo ad yz , sarà tagliato in un cerchio πy^2 ; dimodochè lo spazio compreso tra i piani x ed $x+dx$, avrà la grandezza $\pi y^2 dx$, quindi tra i piani $x=a$ ed $x=A$ avrà il volume

$$3. \quad S = \pi \int_a^A y^2 dx.$$

Questa formola esprime dunque il volume dei solidi risultanti dalla rotazione di una superficie piana intorno all'asse delle x .

Esempio 1. Una figura piana e chiusa C , avente l'aia a^2 , movesi parallelamente alla sua prima posizione in modo da rimaner simile per forma e sito, ed in modo ancora che ogni suo punto descriva una linea retta, e che la sua aia a^2 varii secondo il quadrato della distanza da un punto fisso A . Qual sarà il volume S del solido descritto dalla figura C ?

Sia h la distanza del piano della curva C dal punto fisso A , e b^2 la sua aia nella distanza $h-x$ da A , in conseguenza del problema si avrà

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{h^2}{(h-x)^2}, \text{ donde } b^2 = \frac{a^2}{h^2} (h-x)^2,$$

in conseguenza

$$S = \frac{a^3}{h^3} \int (h-x)^3 dx = C - \frac{a^3}{3h^3} (h-x)^3.$$

Prendendo l'integrale da $x=0$ fino ad $x=h$, si avrà

$$S = \frac{1}{3} a^3 h,$$

vale a dire il volume della piramide e del cono.

L'integrale preso da $x=0$ fino ad $x=k$, ci dà

$$S = \frac{a^3}{3h^3} [h^3 - (h-k)^3].$$

Or se per $x=k$ la superficie a^3 prenda il valore b^3 , ed in conseguenza sia $\frac{a}{b} = \frac{h}{h-k}$, ovvero $h = \frac{ak}{a-b}$, si avrà

$$S = \frac{k}{3} \cdot \frac{a^3 - b^3}{a-b} = \frac{k}{3} (a^2 + ab + b^2),$$

vale a dire il volume del tronco di piramide o cono.

Esempio 2. Un triangolo ACD (Fig. 42) muovesi verso B parallelamente alla sua prima posizione in modo che A scorra sempre nella retta AB, la retta AC nel piano CAB, il punto D sulla DE parallela ad AB, ed AC varii in ragione di AB. Qual'è il volume del solido descritto dal triangolo ACD?

Sia $AB = h$, $AC = a$, l'altezza costante dei triangoli CAD, $C_1A_1D_1, \dots = b$, ed $AA_1 = x$; si avrà pei due nominati triangoli

$$\frac{CAD}{C_1A_1D_1} = \frac{CA}{C_1A_1}, \text{ ovvero } C_1A_1D_1 = \frac{ab}{2h} (h-x),$$

quindi se AB è perpendicolare al piano CAD, sarà

$$S = \frac{ab}{2h} \int (h-x) dx = C - \frac{ab}{4h} (h-x)^2.$$

Integrando da $x=0$, fino ad $x=h$, si ha

$$S = \frac{1}{4} abh,$$

vale a dire la metà del prisma che avesse CAD per base ed AB per altezza.

Ma se s'integri da $x=0$ fino ad $x=h$, e si ponga $a=c$ per $x=k$, si avrà

$$S = \frac{ab}{4h} (2hk - k^2),$$

e poichè $\frac{a}{c} = \frac{h}{h-k}$ ed in conseguenza $h = \frac{ak}{a-c}$, sarà

$$S = \frac{1}{4} (a+c)bk.$$

Esempio 3. Tagliando l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con un piano parallelo ad yz , la sezione sarà pel n° 199 un'ellisse rappresentata dall'equazione

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

in cui x rimane costante per un medesimo piano secante. I semi-assi di questa ellisse sono

$$b \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad c \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

quindi la superficie dell'ellisse è

$$bc \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\} \pi.$$

Questo è il valore di $\int z dy$, quando è preso tra i limiti

$$y = -b \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad y = +b \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Quindi il volume sarà espresso da

$$S = bc\pi \int \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\} dx = \left\{ x - \frac{x^3}{3a^2} \right\} bc\pi,$$

e pei limiti $x = 0$ ed $x = +a$, si ha

$$S = \frac{2}{3} \pi abc;$$

quindi il volume dell'intera ellissoide sarà $\frac{4}{3} \pi abc$, che si muta in quello della sfera nell'ipotesi di $a = b = c$.

Tagliando l'iperboloide semplice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con un piano parallelo ad xy , si avrà per sezione l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2},$$

i cui semiassi sono

$$a \left\{ 1 + \frac{z^2}{c^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad b \left\{ 1 + \frac{z^2}{c^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

e la cui superficie è rappresentata da

$$\pi ab \left\{ 1 + \frac{z^2}{c^2} \right\}.$$

Questa superficie rappresenta il valore dell'integrale $\int y dx$, preso tra gl'indicati limiti. Si ha dunque per espressione del volume:

$$S = \iint y dx dz = \pi ab \int \left\{ 1 + \frac{z^2}{c^2} \right\} dz,$$

integrale che esteso da $z = 0$ fino a $z = c$, dà

$$S = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Quindi se la semi-ellissoide e l'indicata iperboloide semplice abbiano i medesimi assi, e sia loro comune l'ellisse del piano xy , si avrà tra il volume della semi-ellissoide e quello dell'iperboloide di eguale altezza la relazione

$$E : H = 1 : 2.$$

Disegni inoltre C il volume del cilindro tangente alle due superficie nell'ellisse del piano xy , e K quello del cono asintotico avendo comune col cilindro l'altezza c ; considerando che il cilindro ed il cono s'incontrano nel piano $z=c$, si avrà

$$C = \pi abc, \quad K = \frac{1}{3} \pi abc;$$

quindi la semplicissima relazione

$$K : E : C : H = 1 : 2 : 3 : 4.$$

Con eguale facilità si trova che il volume dell'iperboloide doppia

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

compreso tra i piani $z=c$ e $z=2c$, è rappresentato da $\frac{2}{3} \pi abc$.

Esempio 4. Per determinare lo spazio racchiuso dalla volta a cupola dell'esempio 5 del n° precedente, è da osservarsi che dietro l'ipotesi ivi fatta si avrà

$$\frac{apb}{APB} = \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}, \quad \text{ovvero } apb = \left\{ 1 - \frac{z^2}{c^2} \right\} g,$$

indicando con g la superficie del triangolo APB (Fig. 41). Quindi pel volume S del solido $ABPM$ si avrà

$$S = g \int \left\{ 1 - \frac{z^2}{c^2} \right\} dz = g \left\{ z - \frac{z^3}{3c^2} \right\};$$

ed estendendo l'integrale da $z = 0$ a $z = c$,

$$S = \frac{2}{3} gc.$$

Similmente si otterrà il volume di ciascuno dei quattro solidi che hanno per base uno dei quattro triangoli della base $ABCD = G$: quindi la capacità K dell'intera volta sarà data da

$$K = \frac{2}{3} Gc.$$

Supponendo che G_1 e c_1 siano la base e l'altezza della faccia esteriore; sarà

$$M = \frac{2}{3} (G_1 c_1 - Gc)$$

l'espressione della parte solida della volta, se qualunque piano menato per PM tagli una qualunque delle quattro facce della volta in un quadrante ellittico. Se ciò non avviene, il volume potrà esser determinato con un calcolo simile. Contentandosi di un valore approssimato, si ha, ponendo $c_1 = c + \beta$, $G_1 = G + \alpha$, α e β indicando piccole quantità:

$$M = \frac{dK}{dG} \alpha + \frac{dK}{dc} \beta,$$

e poichè $\frac{dK}{dG} = \frac{2}{3} c$, $\frac{dK}{dc} = \frac{2}{3} G$; si avrà

$$K = \frac{2}{3} (G\beta + c\alpha).$$

Esempio 3. Giri la parabola $y^2 = 2px$ intorno al suo asse. La paraboloidoide di rotazione che ne risulta, ha il volume

$$S = \pi \int y^2 dx = 2\pi \int x dx,$$

ovvero, integrando da $x = 0$,

$$S = \pi px^2 = \frac{1}{2} \pi xy^2.$$

La paraboloidoide è quindi la metà del cilindro di egual base ed altezza.

Girando l'ellisse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ intorno all'asse maggiore, si ha

$$S = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2x - \frac{x^3}{3}),$$

quindi tra $x = -a$ ed $x = +a$,

$$S = \frac{4}{3} \pi ab^2.$$

Ma se l'ellisse girasse intorno all'asse minore, vale a dire che girasse intorno all'asse delle x l'ellisse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, si avrebbe nella stessa ipotesi

$$S_1 = \frac{4}{3} \pi a^2b;$$

quindi $S : S_1 = b : a$.

Esempio 6. Girando il cerchio

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

intorno ad un asse parallelo a quello delle x , si ha

$$y^2 = b^2 + r^2 - x^2 - 2b(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

considerando solamente l'arco concavo verso l'asse di rotazione. Donde segue pel volume

$$S = \pi \left\{ b^2 + r^2 - \frac{1}{3} x^2 \right\} x - \pi b x (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \pi b r^2 \arcsen \frac{x}{r};$$

ed in conseguenza tra $x = 0$ ed $x = (r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} = h$;

$$S = \frac{1}{3} \pi (r^2 + 2b^2) h - \pi b r^2 \arcsen \frac{h}{r}.$$

FIN E.

58N 612307

INDICE.

CALCOLO DIFFERENZIALE.

INTRODUZIONE.

N°.	1. Idea della funzione. pag.	3
»	2. Legge della variazione della funzione	4
»	3. Derivate delle funzioni semplici.	10
»	4. Derivate delle funzioni composte	20
»	5. Dell'infinitamente piccolo ed infinitamente grande.	24
»	6. Idea del calcolo differenziale.	28

CAPO PRIMO.

Funzioni di una variabile.

A. Differenziale del 1° ordine.

»	7. Funzioni semplici.	29
»	8. Funzioni composte	30
»	9. Continuazione	32
»	10. Funzioni implicite	37

B. Derivate e differenziali di ordine superiore.

»	11. Funzioni semplici	39
»	12. Funzioni composte	43
»	13. Funzioni implicite	50
»	14. Cambiamento della variabile indipendente	52
»	15. Continuità delle funzioni derivate.	57
»	16. Continuazione	61

C. Valori rimarchevoli delle funzioni.

»	17. Valori indeterminati delle funzioni.	63
»	18. Continuazione	65
»	19. Massimi e minimi	68
»	20. Continuazione	76

D. Delle funzioni in serie.

»	21. Serie di Taylor	79
»	22. Validità di questa serie	81
»	23. Formola del binomio.	87
»	24. Serie per $\log(x+h)$	90
»	25. Serie per $\arctg(x+h)$	94
»	26. Serie per $\sin(x+h)$ e $\cos(x+h)$	97
»	27. Serie di Stirling	101

E. Variabile immaginaria.

»	28. Serie di Taylor e di Stirling per una variabile immaginaria.	102
»	29. Serie per e^{ix} ed e^{-ix}	108
»	30. Formola di Moivre	109
»	31. Serie per $\cos nx$ e $\sin nx$	112
»	32. Serie per $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$	114
»	33. Fattori di $x^2 + 1$	116
»	34. Valori di $I(a+ib)$	121

CAPO SECONDO.

Funzioni di più variabili.

A. Differenziali del 1° ordine.

»	35. Differenziali parziali e totali in generale	123
»	36. Funzioni implicite	129
»	37. Funzioni omogenee.	131

B. Differenziali di ordine superiore.

»	38. Differenziali parziali.	131
»	39. Differenziali totali	137
»	40. Funzioni implicite.	140
»	41. Funzioni omogenee.	143
»	42. Cambiamento della variabile indipendente	145
»	43. Eliminazione delle costanti.	150
»	44. Eliminazione delle funzioni arbitrarie.	155

»	Continuità delle derivate parziali	159
---	--	-----

G. Valori rimarchevoli delle funzioni.

»	46. Valori indeterminati delle funzioni.	161
»	47. Massimi e minimi delle funzioni.	165
»	48. Continuazione.	173

B. Le funzioni in serie.

»	49. Serie di Taylor e di Stirling	177
»	50. Serie di Lagrangia	183

NOTE DEL TRADUTTORE.

Nota I.	189
Nota II.	190

CALCOLO INTEGRALE.

INTRODUZIONE.

»	51. Definizione dell' integrale. 195
---	--------------------------------------

I. FUNZIONI DIFFERENZIALI.

CAPO PRIMO.

Funzioni differenziali di una variabile.

A. Forme fondamentali degli integrali.

»	52. Gli integrali indefiniti.	199
»	53. Gli integrali definiti.	201

B. Integrale indefiniti.

a. Metodi sintetici d' integrazione.

»	54. Integrazione per decomposizione	206
»	55. Integrazione per riduzione	209
»	56. Integrazione per serie	217
»	57. Serie di Bernoulli	223

b. Metodi analitici d' integrazione.

»	58. Integrazione per sostituzione	221
---	---	-----

»	59. Differenziazione sotto il segno integrale	228
»	60. Integrazione sotto il segno integrale	231

c. Funzioni frazionarie razionali.

»	61. Osservazioni generali.	234
---	------------------------------------	-----

1. Fattori binomii.

»	62. Possibilità della decomposizione	235
»	63. Metodi di scomposizione. 238	
»	64. Continuazione	243

2. Fattori trinomii.

»	65. Possibilità della decomposizione	249
»	66. Metodo della scomposizione	

3. Integrale della frazione.

»	67. Frazioni parziali con denominatori binomii.	257
»	68. Frazioni parziali con denominatori trinomii.	260

d. Funzioni irrazionali.

»	69. Allontanamento della forma irrazionale	264
»	70. Riduzione delle forme irrazionali	268
»	71. Continuazione	276

e. Funzioni trascendenti.

»	72. Funzioni trigonometriche.	278
»	73. Continuazione	284
»	74. Altre funzioni trascendenti	286

C. Integrali definiti.

a. Leggi generali.

»	75. Deduzione dagli integrali indefiniti	289
»	76. Metodi generali.	293
»	77. Metodi speciali.	301
»	78. Integrazione per approssimazione	307

- » 79. Integrazione ripetuta. . . 311
» 80. Continuazione. . . 314

b. Integrali euleriani.

- » 81. La funzione Gamma. . . 317
» 82. La funzione Beta. . . 320
» 83. Applicazioni . . . 323

c. Funzioni periodiche.

- » 84. Legge generale . . . 329
» 85. Integrale $\varphi t dt$ e $\psi t dt$. . . 331
» 86. Integrale di $\Sigma B_m \cos m\varphi t dt$
e $\Sigma B_m \sin m\psi t dt$. . . 335
» 87. Caso speciale . . . 339
» 88. Allargamento de limiti . . . 345
» 89. Integrale di
$$\Sigma \cos \frac{n\pi(x-t)}{c} dt$$
. . . 348

- » 90. Integrale doppio di
 $\varphi t f x \cos t x dz dt$ e $\psi t f x \sin t x dz dt$. 350

CAPO SECONDO.

Funzioni differenziali di più variabili.

A. Funzioni differenziali lineari.

- » 91. Possibilità dell'integrale . 356
» 92. Funzioni differenziali di
due variabili. . . 359
» 93. Funzioni differenziali di
tre variabili . . . 362
» 94. Introduzione di nuove va-
riabili . . . 369
» 95. Integrali definiti . . . 371

B. Funzioni differenziali non lineari.

a. Funzioni differenziali monomie.

- » 96. Integrale di esse . . . 376
» 97. Integrali doppi . . . 380
» 98. Integrali doppi definiti . 385

b. Funzioni differenziali di più termini.

- » 99. La forma più semplice . 388
» 100. Funzioni di ogni grado ed
ordine . . . 392
» 101. Continuazione . . . 397

II. EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

CAPO PRIMO.

Una variabile indipendente.

- » 102. Introduzione . . . 404

A. Equazioni differenziali lineari.

- » 103. Osservazioni generali . 405

a. Con fattori costanti.

- » 104. Radici disuguali. . . 410
» 105. Radici eguali . . . 420
» 106. Radici immaginarie. . 425
» 107. Aggiunta . . . 432
» 108. Continuazione . . . 437

b. Con fattori variabili.

- » 109. Equazione generale. . 442
» 110. Integrali particolari. . 443
» 111. Equazioni del primo ordine 451
» 112. Continuazione . . . 455
» 113. Eliminazione dei fattori
variabili. . . 458
» 114. Separazione delle variabili 463
» 115. Equazione di Riccati. . 469

B. Equazioni differenziali non lineari

a. Del primo ordine.

- » 116. Forma e risoluzione ge-
nerali . . . 470
» 117. Casi speciali . . . 486
» 118. Soluzione singolare. . 485
» 119. Continuazione . . . 488

b. Del secondo ordine.

- » 120. Equazioni omogenee . 494
» 121. Equazioni senza x o sen-
za y . . . 497

c. Di ogni ordine.

- » 122. Soluzione singolare . . 500
» 123. Integrazione per serie . 506
» 124. Continuazione . . . 510

CAPO SECONDO.

Più variabili indipendenti.

» 125. Introduzione	515
-------------------------------	-----

Equazioni differenziali parziali.

» 126. Osservazioni generali	516
--	-----

a. Con fattori costanti.

» 127. Coll' ultimo termine costante	518
--	-----

» 128. Coll' ultimo termine variabile	528
---	-----

b. Con fattori variabili.

» 129. Equazioni del primo ordine	532
---	-----

» 130. Continuazione	539
--------------------------------	-----

» 131. Equazioni del 2° ordine	544
--	-----

» 132. Equazioni differenziali simultanee	549
---	-----

CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

» 133. Definizione	559
------------------------------	-----

» 134. Variazione della funzione V	561
--	-----

» 135. Variazione dell' integrale $\int V dx$	565
---	-----

» 136. Massimi e minimi	567
-----------------------------------	-----

» 137. Continuazione	576
--------------------------------	-----

GEOMETRIA ANALITICA.

CAPO PRIMO.

Geometria nel piano.

A. Introduzione.

» 138. Il punto	589
---------------------------	-----

» 139. Trasformazione delle coordinate	592
--	-----

» 140. La linea retta	596
---------------------------------	-----

» 141. Continuazione	598
--------------------------------	-----

» 142. Due rette	600
----------------------------	-----

» 143. Applicazioni	602
-------------------------------	-----

» 144. La circonferenza	608
-----------------------------------	-----

» 145. Discussione dell' equazione del cerchio	609
--	-----

» 149. Tangente al cerchio	611
--------------------------------------	-----

B. Le sezioni coniche.

» 147. Equazione generale	613
-------------------------------------	-----

» 148. L'ellisse	618
----------------------------	-----

» 149. Tangente	622
---------------------------	-----

» 150. Diametri conjugati	624
-------------------------------------	-----

» 151. L'iperbole	627
-----------------------------	-----

» 152. Tangente ed assintoti	630
--	-----

» 153. Diametri conjugati	634
-------------------------------------	-----

» 154. Equazioni agli assintoti	634
---	-----

» 155. La parabola	635
------------------------------	-----

» 156. Tangente	637
---------------------------	-----

» 157. Diametri conjugati	639
-------------------------------------	-----

C. Altre linee curve.

» 158. La lemniscata	640
--------------------------------	-----

» 159. La curva logaritmica	642
---------------------------------------	-----

» 160. La catenaria	643
-------------------------------	-----

» 161. La cicloide	643
------------------------------	-----

» 162. L'epicicloide	648
--------------------------------	-----

» 163. L'ipocicloide	650
--------------------------------	-----

» 164. Le spirali	652
-----------------------------	-----

» 165. La spirale di Archimede	653
--	-----

» 166. La spirale iperbolica	654
--	-----

» 167. La spirale logaritmica	655
---	-----

D. Proprietà generali delle curve.

» 168. La tangente	656
------------------------------	-----

» 169. Continuazione	664
--------------------------------	-----

» 170. Gli assintoti	668
--------------------------------	-----

» 171. Il circolo osculatore	672
--	-----

» 172. Curve osculatrici in generale	679
--	-----

» 173. Punti singolari delle curve	683
--	-----

» 174. Gli archi delle curve	689
--	-----

» 175. Le superficie delle curve	695
--	-----

» 176. Continuazione	701
--------------------------------	-----

» 177. Le evolute ed evolventi	703
--	-----

» 178. Le traiettorie	709
---------------------------------	-----

» 179. Le linee d'inviluppo	716
---------------------------------------	-----

» 180. Curve simili	720
-------------------------------	-----

CAPO SECONDO.

Geometria nello spazio.

A. Introduzione.

» 181. Il punto	723
---------------------------	-----

» 182. Trasformazione delle coordinate	725	» 198. Superficie del 2° grado con centro	774
» 183. La retta	730	» 199. L'ellissoide	779
» 184. Due rette	732	» 200. L'iperboloide semplice	781
» 185. Il piano	735	» 201. L'iperboloide doppia	784
» 186. Il piano e la retta	739	» 202. Superficie del 2° grado senza centro	783
» 177. Due piani	742	» 203. Paraboloide ellittica	787
B. Formazione delle superficie.		» 204. Paraboloide iperbolica	788
» 188. Rappresentazione delle superficie	744	» 205. Superficie conoidali	789
» 189. Rappresentazione delle curve nello spazio	747	» 206. Superficie rettilinee	793
» 190. Generazione delle superficie per mezzo di linee	752	» 207. Continuazione	796
» 191. Superficie cilindriche	753	C. Proprietà generali delle curve.	
» 192. Equazioni differenziale delle superficie cilindriche	758	» 208. La tangente ed il piano normale	799
» 193. Superficie coniche	761	» 209. Piano e cerchio di curvatura	803
» 194. Equazione differenziale delle superficie coniche	764	» 210. Gli archi delle curve	806
» 195. Superficie di rotazione	766	D. Proprietà generali delle superficie:	
» 196. Equazione differenziale delle superficie di rotazione	769	» 211. Piano tangente	809
» 197. Superficie del 2° grado	771	» 212. Curvatura delle superficie	813
		» 213. Superficie dei solidi	819
		» 214. Volume dei solidi	827

Fine dell' Indice.

pag.	ver.	Errori	Correzioni
656		Al n° 168 deve precedere l' indicazione D. Proprietà generali delle curve.	
732	4	$x=p, y=q$	$x=-\frac{p}{a}, y=-\frac{bp-aq}{a}$
738		I valori di $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ dell' equazione 8 debbono esser preceduti da $\pm$, e quello di d da $\mp$.	
809	5	coordinate polari	coordinate rettangolari

CONSIGLIO GENERALE DI PUBBLICA ISTRUZIONE

Napoli 21 Luglio 1858.

Vista la dimanda del tipografo Ferdinando Raimondi, con la quale ha chiesto di porre a stampa l'opera intitolata: *Trattato elementare di matematica superiore, contenente il calcolo differenziale, il calcolo delle variazioni e la geometria analitica di Franke*, voltato dal tedesco in italiano dal *Professore D. Michele Zannotti*.

Visto il parere del Regio Revisore Sig. D. Ambrogio Mendia.

Si permette che la detta opera si stampi; ma non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà, se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto, nel confronto, essere la impressione uniforme all'originale approvato.

Il Consul. di Stato Pres. provv.
CAPOMAZZA

Il Segretario generale
GIUSEPPE PIETROCOLA.

REVISIONE ARCIVESCOVILE

Nihil obstat
JOSEPH MOLINARI
Censor Theol.

Pro Deputato
LEOPOLDUS RUGGIERO
a Secretis

Imprimatur Die XXI Julius MDCCCLVIII.

